

# Prise en compte des effets de lubrification lors de la simulation de la collision de deux particules dans un fluide

J.C. Brändle de Motta<sup>a</sup>, B. Gazanion<sup>b</sup>, J.-L. Estivalezes<sup>a</sup>, E. Climent<sup>b</sup>, S. Vincent<sup>c</sup>

a. ONERA, 2 av. Edouard Belin, 31055 TOULOUSE

b. IMFT, 1 allé du Professeur Camille Soula, 31400 TOULOUSE

c. Université de Bordeaux, I2M, 16 av. Pey-Berland, 33607 PESSAC

## Résumé :

*Dans la simulation résolue d'écoulements particulaires denses, il est nécessaire d'avoir des modèles de collision performants. Afin de garder un pas de temps et un maillage raisonnables il est nécessaire d'inclure dans ces modèles la collision à sec et la lubrification. On expose un modèle d'interaction particule-particule et particule-paroi basé sur l'approche de W.-P. Breugem. Ce modèle a été validé pour des particules de taille finie avec une approche de pénalisation par domaines fictifs. Il vérifie les coefficients de restitution expérimentaux pour une large gamme de nombres de Stokes.*

## Abstract :

*Robust collision models are required to simulate finite size particulate flows. In order to maintain reasonable time and space steps, dry collision and lubrication have to be included in those models. Particle-particle and particle-wall models based on W.-P. Breugem work are presented. They have been associated to a fictitious domain approach and penalty methods and applied to finite size particle simulations. The experimental restitution coefficient have been well reproduced for a wide range of Stokes numbers.*

**Mots clefs :** lubrification ; particules ; rebond

## 1 Introduction

Dans le cadre des simulations d'écoulements particulaires, il est nécessaire d'établir des modèles de prise en compte de rebonds. Dans le cas où l'on utilise des particules dont la taille n'est pas négligeable par rapport aux échelles de l'écoulement, on doit réaliser une simulation directe des particules et du fluide autour. On traite ainsi des particules de taille finie. Dans la totalité des méthodes de simulation de particules de taille finie, il faut prendre en compte les chocs entre particules afin d'éviter le recouvrement entre celles-ci.

Une première approche pour éviter le recouvrement est d'utiliser des algorithmes simples, par exemple l'écartement manuel des particules à la main après advection. Ce choix se justifie car sous certaines hypothèses, par exemple quand la fraction volumique du solide est suffisamment petite, les interactions entre particules sont négligeables. Un premier problème peut apparaître ici car, le rebond étant non physique, l'énergie peut augmenter. Une deuxième approche est d'inclure des modèles de forces d'interaction capables de produire le choc solide-solide, soit à l'aide d'une force en forme de ressort, [1] et [2], soit avec une forme exponentielle, [3], soit enfin avec un modèle de ressort-amortisseur. Cette dernière reproduit l'énergie après choc pour des particules données. Le principal obstacle est de paramétrer le choc pour qu'il soit réaliste. En effet, les temps caractéristiques de l'écoulement et celui du choc réel sont complètement décorrélés, il faut donc trouver un modèle représentatif.

Une autre problématique à aborder est que dans les simulations de particules de taille finie, on ne résout pas la couche de lubrification. Si l'on voulait résoudre ces échelles les maillages seraient excessivement fins et cela rendrait les calculs trop coûteux. Il faut donc des modèles qui soient capables de reproduire, lors d'un rebond, ces forces de lubrification.

Dans ce document, nous expliquons les modèles de forces de choc solide-solide et de lubrification implémentés dans le code thétis, [5], pour la simulation des écoulements particulaires. L'approche utilisée est basée sur celle présentée par W.-P. Breugem, [6]. L'explication de la méthode de simulation des particules de taille finie fait objet d'un autre exposé dans ce congrès, [7].

## 2 Implementation

Dans l'implémentation présentée ici, la force d'interaction entre les particules (prenant en compte le choc solide-solide et lubrification) est calculée avant la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. Ensuite, elle est insérée comme terme source dans celles-ci, voir [7]. Il est donc nécessaire de les évaluer au temps  $n + \frac{1}{2}$ . Dans la méthode implémentée par W.-P. Breugem, [6] sur laquelle nous sommes basés, la force calculée est définie au temps  $n$  et est utilisée pour l'équation de Newton qui régit le mouvement de chaque particule.

Si on utilise notre code avec une viscosité nulle pour le fluide entourant les particules, on réalise une modélisation granulaire selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{X}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{X}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}_i^n \\ \tilde{\mathbf{V}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \mathbf{V}_i^n - \mathbf{V}_i^{n-1} \end{array} \right. \quad (1) \\ \downarrow \\ \mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^n + \Delta t \left( \frac{1}{m_i} \sum_{j \neq i}^{N_p} \mathbf{F} \left( \tilde{\mathbf{X}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{X}}_j^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{V}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{V}}_j^{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{g} \right) \quad (2) \\ \downarrow \\ \mathbf{X}_i^{n+1} = \mathbf{X}_i^n + \Delta t \left( \frac{\mathbf{V}_i^{n+1} + \mathbf{V}_i^n}{2} \right) \quad (3) \\ \downarrow \end{array}$$

Tout d'abord, nous faisons une prédiction sur la position et la vitesse des particules au pas de temps  $\frac{1}{2}$ , équations 1. Celle-ci va nous aider à évaluer la force d'interaction entre deux particules  $\mathbf{F}$ . Ensuite, nous résolvons l'équation de Newton pour chaque particule. La force d'interaction entre particules est alors distribuée dans le volume eulérien solide. Finalement, on actualise la position des particules de façon lagrangienne 3.

Dans le code multiphasique, l'étape de résolution de l'équation de Newton est remplacée par une résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. La force d'interaction entre particules est distribuée dans le volume interne aux particules. On obtient alors un champ de vitesse global pour les particules et le fluide. Afin d'obtenir la vitesse des particules pour l'étape 3, on calcule, par interpolation du champ fluide, la vitesse des particules.

Quand deux particules sont incluses dans un fluide incompressible, on peut établir trois types d'interactions. D'une part, l'influence propre à l'écoulement créé par une particule, par exemple, la modification de

la vitesse d'une particule lorsqu'elle est dans le sillage d'une autre. D'autre part, l'influence de la force de lubrification et les chocs solide-solide. Les échelles caractéristiques de ces phénomènes sont indépendantes. Dans les simulations de particules de taille finie, le premier type d'interaction est résolu. Le deuxième et le troisième doivent être inclus dans nos modèles d'interaction.

La méthode proposée est d'activer les différentes forces en fonction de la distance adimensionnée par le rayon  $\epsilon$ . La figure 1 montre les différentes régions d'activation pour les différentes forces.

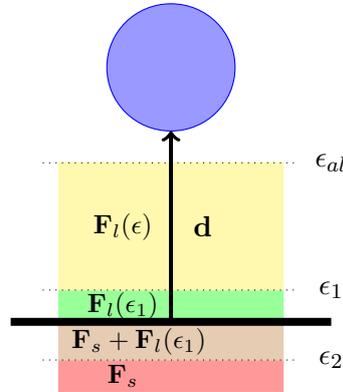


FIGURE 1 – Différentes étapes de la force.

Dans une première zone on ne prends en compte que la force due à la couche de lubrification,  $\mathbf{F}_l$ . Celle ci, est bloquée à partir d'une distance critique,  $\epsilon_1$ , puis enlevée à partir d'un recouvrement maximal,  $\epsilon_2$ . D'autre part, lors du recouvrement on active la force d'interaction solide-solide,  $\mathbf{F}_s$ .

### 3 Choc solide-solide

Les chocs entre particules solides ont été traités par de nombreux auteurs pour des cas granulaires. Dans le cadre d'un rebond sans fluide visqueux, le paramètre le plus important est le coefficient de restitution à vide,  $e_d$ . Il s'agit du ratio entre la vitesse après rebond et celle avant rebond.

Durant un rebond, les particules se déforment et repartent avec une nouvelle vitesse. Il est impossible d'utiliser les forces issues de l'étude analytique des solides déformables car cela impliquerait des pas de temps de l'ordre de  $10^{-9}$  s. La méthode la plus répandue est d'utiliser des sphères dures pour lesquelles on permet un certain recouvrement et un temps fini pour le choc, [4]. De plus dans le cas d'un écoulement granulaire, il est communément accepté que, sous la condition que le temps du choc soit négligeable par rapport au temps de l'écoulement granulaire, il est possible d'utiliser ces modèles sans affecter la physique du résultat, voir par exemple, [8]. Notre méthode se base sur l'hypothèse que, tant que le temps du choc reste petit relativement au temps de l'écoulement, les chocs reproduisent la physique du problème.

On introduit une force ressort-amortisseur qui permet de rétablir le bon coefficient de restitution. L'équation 4 donne la forme de cette force.

$$\mathbf{F}_s = \frac{m_e \left( \pi^2 + [lne_d]^2 \right)}{[N_c \Delta t]^2} \mathbf{d} - \frac{2m_e [lne_d]}{[N_c \Delta t]} \dot{\mathbf{d}} \quad (4)$$

La force dépend du coefficient de restitution à vide mesuré sur la particule,  $e_d$ , et de la masse réduite des particules, qui vaut  $m_e = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$  quand il s'agit d'un choc entre deux particules et qui vaut la masse de la particule quand il s'agit d'un choc particule paroi.

Cette force reproduit un choc dont le coefficient de restitution correspond à la valeur expérimentale, et dont la durée est  $N_c$  itérations en temps. Pour mieux reproduire la physique il faudrait utiliser une

durée de choc extrêmement petite. Il faut donc utiliser un minimum d'itérations afin d'assurer un découplage temporel entre le choc et l'écoulement. Cependant, des test numériques montrent que pour moins de 8 itérations en temps cette force ne reproduit pas le bon coefficient de restitution. Le choix  $N_c = 8$  est donc retenu car c'est le nombre minimum d'itérations nécessaire pour reproduire la bonne vitesse après choc.

## 4 Lubrification

On peut déduire de l'étude analytique faite par Brenner, [9] la force exercée par un fluide sur une particule sphérique au voisinage d'une surface plane. Cette force est la force de lubrification. Dans le cinquième chapitre de [4] on peut trouver aussi une première expression au premier ordre de cette force. L'équation 5 donne une forme générale de cette force dépendant de la vitesse normale,  $\mathbf{u}_n$ , et de la distance adimensionné. Elle dépend de la viscosité du fluide,  $\mu_f$ , et du rayon de la particule,  $R$ . On voit qu'il s'agit d'une force qui agit comme un amortisseur. La fonction  $\lambda$  proviens des études analytiques cités précédemnet. L'expression dépend de s'il s'agit des deux particules ou d'une particule arrivant sur une paroi, 6 et 7 respectivement.

$$\mathbf{F}_l(\epsilon, \mathbf{u}_n) = -6\pi\mu_f R \mathbf{u}_n [\lambda(\epsilon) - \lambda(\epsilon_{al})] \quad (5)$$

$$\lambda_{pp} = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{9}{20} \log(\epsilon) - \frac{3}{56} \epsilon \log(\epsilon) + 1.346 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6)$$

$$\lambda_{pm} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{5} \log(\epsilon) - \frac{1}{21} \epsilon \log(\epsilon) + 0.9713 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (7)$$

Il faut maintenant traiter les deux limites de cette force. Avec la distance d'activation  $\epsilon = \epsilon_c$  la force de lubrification s'active. Il est néanmoins essentiel de déterminer cette distance d'activation. On doit rappeler qu'ici, le modèle de lubrification viens remplacer une couche fluide qui n'est pas résolue. Il faut donc l'activer sur des distances plus petites que le maillages. La distance d'activation de la lubrification doit donc dépendre de la résolution du maillages. W.-P. Breugem propose  $\epsilon_{al} = 0.5 \frac{\Delta x}{R}$  ou  $\epsilon_{al} = 0.75 \frac{\Delta x}{R}$ . Après une étude paramétrique on a gardé cette dernière valeur.

Il faut aussi traiter le cas où  $\epsilon$  tend vers 0. En effet, on constate que la force de lubrification tends vers l'infini. Cette limite n'est pas compatible avec la physique du problème. En effet, dans les développements analytiques on considère un fluide visqueux sous régime de Stokes. Dans la physique du problème, avant le contact physique entre deux particules sphériques parfaites, on sort des hypothèses dans lesquelles les solutions analytiques ont été trouvés : le fluide ne reste pas incompressible et les particules se déforment, [10]. De plus, à ces échelles, on a l'influence de la rugosité des particules. Il faut donc limiter cette force. W.-P. Breugem propose deux valeurs entre lesquelles cette force est constante. Il donne les valeurs  $\epsilon_1 = 10^{-3}$  et  $\epsilon_2 = -10^{-2}$ . Après une étude paramétrique on a gardé ces valeurs. Dans notre cas la modification de ces paramètres ne jouait pas un grand rôle dans le résultat.

## 5 Validations

Dans le cas d'un rebond avec une paroi solide il y a une base de données très conséquente, on peut par exemple on peut citer [11] ou [12]. Comme dans le cas de rebond sans fluide on peut définir un coefficient de restitution de lubrification,  $e_l$ .

Dans [13] on propose le nombre de Stokes,  $St = \frac{2}{9} \frac{R u \rho_p}{\mu_f}$ , pour caractériser le rebond. Des études paramétriques on montré que l'on doit utiliser comme vitesse caractéristique,  $u$ , la vitesse normale du choc. On retient comme loi généralisé celle proposé par [14] :  $\frac{e_l}{e_d} = \exp\left(-\frac{35}{St}\right)$ . La figure 2 montre l'accord de cette loi avec l'expérience.

Afin de valider le modèle on a réalisé trois types de simulation.

- La première validation utilise l'algorithme présenté précédemment et n'utilise pas de fluide autour de la particule. Néanmoins, on impose une force de lubrification pour une viscosité donnée. On modifie cette viscosité pour faire évoluer le nombre de Stokes.

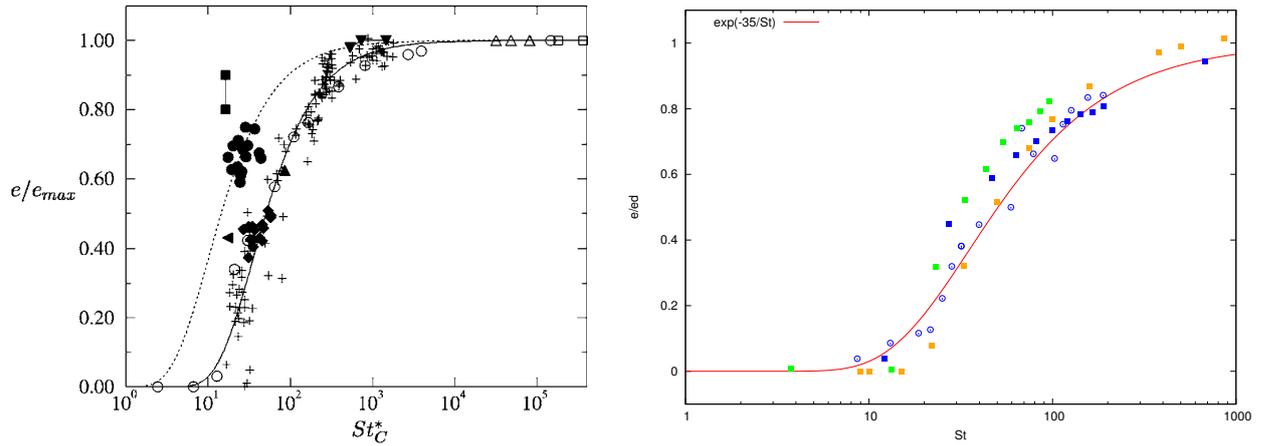


FIGURE 2 – A gauche, expériences de Legendre & al. sur de gouttes confrontés à la loi proposée, source [14]. A droite, Confrontation à la loi empirique [14]. Cercles, méthode implémenté par [6]. Carré bleu, cas de [6] avec l'implémentation présente. Carrée vert, choc à vitesse constante avec solveur Navier Stokes. Carrées jaunes, choc à vitesse donnée sans fluide, équation 2

- Le deuxième cas est celui proposé par W.-P. Breuguem et consiste en une particule soumise à sa propre gravité qui rebond sur le sol. Le rayon de la particule est modifié afin de changer la vitesse du choc.
- Le troisième cas est une particule lancée sur une paroi avec une vitesse normale qu'on fait varier afin de changer le nombre de Stokes.

Dans la figure 2 on voit les résultats obtenus pour chaque cas. On reprend aussi les résultats de W.-P. Breuguem, [6]. On constate que même quand le fluide n'est pas pris en compte (carrées jaunes), le coefficient de restitution est bien reproduit.

## 6 Conclusion

Grâce au modèle implémenté le code de simulation directe des écoulements particulaire peut traiter des concentrations élevées de particules. La figure 3 montre la simulation d'un lit fluidisé avec 2133 particules. Dans cette simulation on a une concentration du solide de 20% en bas du lit.

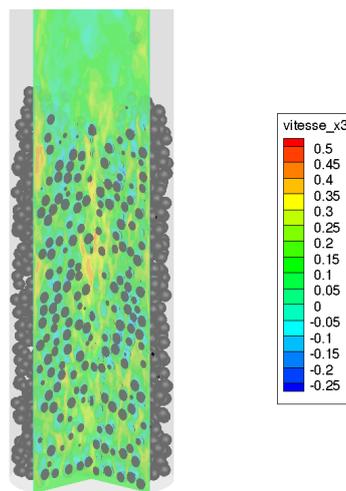


FIGURE 3 – Instant du lit fluidisé.

## Références

- [1] Glowinski R., Pan T. W., Hesla T. I., Joseph D. D., and Periaux J. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2), 363–426, 2001.
- [2] Corre C., Estivalezes J. L., Vincent S., and Simonin O. Direct numerical simulation of the motion of particles larger than the kolmogorov scale in a homogeneous isotropic turbulence. 2008.
- [3] Coquerelle M. and Cottet G. A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies. *Journal of Computational Physics*, 227(21), 9121–9137, November 2008.
- [4] Crowe C., Sommerfeld M., and Tsuji Y. *Multiphase flows with droplets and particles*. CRC, 1998.
- [5] <http://thetis.enscbp.fr>.
- [6] Breugem W. A combined Soft-Sphere collision for immersed boundary method for resolved simulations of particulate flows. In *Proceedings of the ASME 2010 3rd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting and*, Montréal, August 2010.
- [7] Brändle de Motta J. C., Vincent S., Estivalezes J.-L., and Climent E. Simulation numérique des écoulements de suspension à l’aide d’une méthode de pénalisation des équations de navier-stokes. In *Congrès Français de Mécanique*, Besançon, August 2011.
- [8] Lacaze L., Phillips J. C., and Kerswell R. R. Planar collapse of a granular column : Experiments and discrete element simulations. *Physics of Fluids*, 20(6), 063302, 2008.
- [9] Brenner H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical Engineering Science*, 16(3-4), 242–251, 1961.
- [10] Sundararajakumar R. R. and Koch D. L. Non-continuum lubrication flows between particles colliding in a gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 313, 283–308, 1996.
- [11] Gondret P., Lance M., and Petit L. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of Fluids*, 14(2), 643–652, 2002.
- [12] Yang F. and Hunt M. L. Dynamics of Particle-Particle collisions in a viscous liquid. *Physics of Fluids*, 18(12), 121506–11, 2006.
- [13] Davis R. H., Serayssol J., and Hinch E. J. The elasto-hydrodynamic collision of two spheres. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 163(-1), 479–497, 1986.
- [14] Legendre D., Daniel C., and Guiraud P. Experimental study of a drop bouncing on a wall in a liquid. *Physics of Fluids*, 17(9), 097105–13, 2005.
- [15] Joseph G. G., Zenit R., Hunt M. L., and Rosenwinkel A. M. Particle-wall collisions in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 433(-1), 329–346, 2001.