

# Modélisation du comportement thermo-mécanique cyclique des alliages à mémoire de forme

L. SAINT-SULPICE<sup>a</sup>, S. ARBAB CHIRANI<sup>a</sup> ET S. CALLOCH<sup>b</sup>

a. *Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes EA4325 – ENIB, Parvis Blaise Pascal, Technopôle Brest-Iroise, 29280 Plouzané*

b. *Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes EA4325 – ENSTA Bretagne (ex-ENSIETA), 2, rue François Verny 29806 Brest Cedex 9*

## Résumé :

*La plupart des applications en AMF subissent des chargements cycliques. Afin de dimensionner ces applications, un modèle macroscopique du comportement thermo-mécanique des AMF a été développé. Basé sur un modèle développé précédemment [8], il prend en compte la présence de martensite bloquée observée lors des essais, ce qui permet de simuler l'apparition de la déformation résiduelle sous chargements cycliques. Les paramètres du modèle ont ensuite été identifiés et son comportement validé à partir de résultats expérimentaux de chargements thermo-mécaniques cycliques.*

## Abstract :

*Most applications using SMA are subjected to cyclic loading. In order to design these applications, a macroscopic model of the thermomechanical behavior of SMA has been developed. Based on a model developed previously [8], it takes into account the presence of retained martensite observed during testing, which simulates the appearance of residual deformation under cyclic loading. Model parameters were then identified and its behavior validated from the experimental results of thermo-mechanical cyclic loadings.*

**Mots clefs :** alliages à mémoire de forme ; modèle macroscopique ; comportement cyclique

## 1 Introduction

Le comportement spécifique des alliages à mémoire de forme (AMF) est dû à une transformation de phase solide-solide appelée transformation martensitique : comme pour les aciers, les phases hautes et basses températures sont respectivement appelées austénite et martensite. La transformation activable par la contrainte ou la température, consiste principalement à du cisaillement se traduisant par une forte déformation, sans changement de volume et réversible.

De plus en plus d'applications utilisant les propriétés thermo-mécaniques des AMF fonctionnent sous chargement cyclique et sont donc sujettes à des phénomènes de fatigue. Cela peut s'accompagner d'une déformation résiduelle similaire à l'effet rochet en plasticité cyclique. Cet effet rochet a largement été étudié durant les vingt dernières années, mais rarement sur les AMF. Il est donc important de développer un modèle pour ces alliages prenant en compte l'effet rochet, pour assurer la fiabilité des structures en AMF.

Dans cette étude, un modèle macroscopique prenant en compte les particularités des AMF sous chargement 3D thermo-mécaniques cycliques est proposé. Il prend en compte l'effet points mémoires, la dissymétrie traction-compression et la déformation résiduelle.

## 2 Modélisation du comportement des alliages à mémoire de forme sous chargements 3D cycliques

Le modèle proposé est un prolongement du modèle décrit dans [8] qui permet de simuler le comportement super-élastique cyclique des AMF sous chargements multiaxiaux non-proportionnels grâce à l'utilisation de deux surfaces seuil de transformation (voir figure 1). Ce principe permet de prendre en compte la transformation inverse et en particulier la réorientation de la martensite qui est observée lors de chargements non-proportionnels.

Cette version précédente du modèle permet aussi de décrire l'apparition de la déformation résiduelle qui apparaît lors de chargements mécaniques cycliques. L'évolution de cette déformation résiduelle étant basée sur une cinétique de transformation particulière pilotée par la transformation cumulée,  $tr$ .

Dans ce papier, des modifications sont proposées afin de prendre en compte l'évolution de la déformation résiduelle au cours de chargements thermo-mécaniques. La transformation cumulée,  $tr$ , contrôlant l'apparition de martensite bloquée entraînant une déformation résiduelle sous chargements cycliques. Cela permet de reproduire le comportement de super-élasticité ainsi que l'effet mémoire assisté sous chargements 3D cycliques.

### 2.1 Partition de la déformation et relation avec la fraction volumique de martensite

L'hypothèse des petites déformations est adoptée, ce qui permet de réaliser la décomposition de la déformation,  $\varepsilon$  en déformation élastique,  $\varepsilon^e$ , et déformation de transformation,  $\varepsilon^{tr}$  :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{tr} = \mathbb{E}^{-1} \varpi + \varepsilon^{tr} \quad (1)$$

Avec  $\varpi$  le tenseur des contraintes et  $\mathbb{E}$  le tenseur d'élasticité supposé identique pour les phases austénitiques et martensitiques.

La fraction volumique de martensite,  $z$ , est définie par la relation proposée par [11] et validée expérimentalement par [4] et [10] en multiaxial :

$$z = \frac{\varepsilon_{eq}^{tr}}{\gamma} \quad (2)$$

Avec  $\gamma$  un paramètre matériau correspondant à la déformation de transformation équivalente maximale. La déformation équivalente étant définie par [3] ainsi :

$$\varepsilon_{eq}^{tr} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{tr} : \varepsilon^{tr}}{\mathbb{K}_\sigma : \mathbb{K}_\sigma}} \approx \frac{\varepsilon^{tr} g(-y_\varepsilon)}{g(-1)} \quad (3)$$

Avec  $\mathbb{K}_\sigma$  le tenseur normal à la surface seuil de transformation directe :

$$\mathbb{K}_\sigma = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \varpi} = \frac{3}{2} g(y_\sigma) \left( 3 \mathbb{N}_\sigma^2 - y_\sigma \mathbb{N}_\sigma - \frac{2}{3} \mathbb{1}_d \right) \quad (4)$$

Où  $\mathbb{N}_\sigma = \frac{\mathbb{S}}{\sigma}$ ,  $y_\varepsilon = 4 \frac{\det(\varepsilon^{tr})}{\varepsilon^{tr} : \varepsilon^{tr}}$  est le troisième invariant des contraintes,  $\bar{\varepsilon}^{tr} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon^{tr} : \varepsilon^{tr}}$  est la déformation équivalente de von Mises et  $g(y)$ ,  $\sigma_{eq}$ ,  $\varpi$  et  $y_\sigma$  sont décrits dans la partie suivante.

### 2.2 Description des surfaces seuil de transformation directe et inverse

Deux surfaces de transformation sont utilisées dans le modèle. L'une,  $f_1$ , pilote la transformation directe, tandis que l'autre,  $f_2$  pilote la transformation inverse. La surface seuil de transformation directe dépend des second et troisième invariants des contraintes :

$$f_1 = \bar{\sigma} - \frac{R(z) + \sigma_0^t(T)}{g(y_\sigma)} \leq 0 \quad (5)$$

Où  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbb{S} : \mathbb{S}}$  est l'équivalent des contraintes de von Mises avec  $\mathbb{S}$  le tenseur déviatorique des contraintes,  $g(y) = \cos\left(\frac{\arccos(1-a(1-y))}{3}\right)$  permet de décrire la forme de la surface de transformation et la dissymétrie traction-compression observée dans les AMF [7, 5] avec  $a$  le paramètre de convexité variant de 0 à 1 [1],  $y_\sigma = \frac{27}{2} \frac{\det(\mathbb{S})}{\bar{\sigma}^3}$  est le troisième invariant des contraintes,  $R(z)$  détermine la taille de la surface de transformation et  $\sigma_0^t(T) = \mu(T - T_0)$  est la contrainte seuil de transformation en traction en fonction de la température,  $T$ , avec  $\mu$  et  $T_0$  deux paramètres matériau. La contrainte équivalent utilisée dans les équations suivante dépend de celle de von Mises,  $\bar{\sigma}$ , et de la fonction  $g : \sigma_{eq} = \bar{\sigma}g(y_\sigma)$

La forme et la taille de la surface de transformation inverse sont identiques à celle de transformation directe :

$$f_2 = \overline{\varpi} - \mathbb{X} - \frac{R(z) + \sigma_0^t(T)}{g(y_{\sigma-X})} \leq 0 \quad (6)$$

Où  $\mathbb{X}$  est le tenseur qui détermine la position du centre de  $f_2$  :

$$\mathbb{X} = \left( (R(z) + \sigma_0^t(T)) \left( \frac{1}{g(y_\varepsilon)} + \frac{1}{g(-y_\varepsilon)} \right) - \delta(z) \right) \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\sqrt{\frac{3}{2}\underline{\varepsilon}^{tr} : \underline{\varepsilon}^{tr}}} \quad (7)$$

Avec  $\delta(z)$  la taille de l'intersection entre les deux surfaces seuil de transformation dans la direction de  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  (figure 1, zone grisée). Elle sera détaillée dans les parties suivantes.

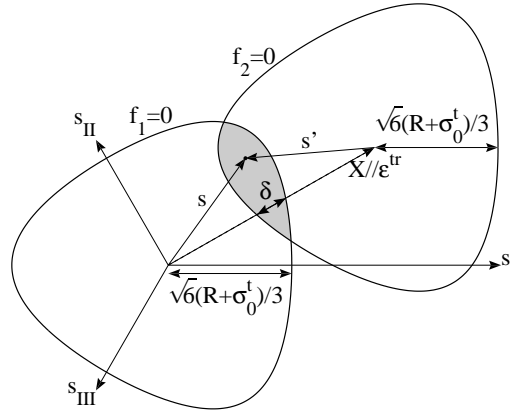


FIGURE 1 – Surfaces de transformation directe et inverse.

### 2.3 Évolution de la déformation de transformation

Au cours des transformations, l'évolution de la déformation de transformation,  $\underline{\varepsilon}^{tr}$ , respecte les règles suivantes. Pour la transformation directe, la loi de normalité est respectée et donc la direction de l'évolution de la déformation de transformation est normale à la surface de transformation directe. Ce comportement a été vérifié en traction-compression biaxiale par [2] et en traction-torsion par [9].

Par contre, au cours de la transformation inverse, un cadre non-associé est utilisé. La direction de l'évolution de la déformation de transformation reste identique à la direction de la déformation de transformation déjà présente. Ces lois de comportement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\gamma \dot{z}}{\mathbb{K}_\varepsilon : \mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{K}_\varepsilon & (\dot{z} > 0) \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = -\dot{\lambda}_2 \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\underline{\varepsilon}^{tr}} = \gamma \dot{z} \frac{g(-1)}{g(-y_\varepsilon)} \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\underline{\varepsilon}^{tr}} & (\dot{z} < 0) \end{cases} \quad (8)$$

Où  $\dot{\lambda}_1$  et  $\dot{\lambda}_2$  sont les multiplicateur de transformation donnés par les conditions de cohérence, et  $\mathbb{K}_\varepsilon$  le tenseur normal à la surface seuil de transformation directe dans l'espace des déformations, donné par l'équation suivante, avec  $\mathbb{N}_\varepsilon = \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\underline{\varepsilon}^{tr}}$  :

$$\mathbb{K}_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon_{eq}^{tr}}{\partial \underline{\varepsilon}^{tr}} = \frac{1}{g(-1)} \left( \frac{2}{3} g(-y_\varepsilon) \mathbb{N}_\varepsilon + 2g'(-y_\varepsilon) \left( -2\mathbb{N}_\varepsilon^2 + y_\varepsilon \mathbb{N}_\varepsilon + \mathbb{1}_d \right) \right) \quad (9)$$

Un cas particulier se produit au cours de chargements non-proportionnels lorsque les deux surfaces de transformation sont atteintes simultanément. Lorsque cela se produit, les transformation directe et inverse s'effectuent simultanément entraînant une évolution de la direction de la déformation de transformation pour une fraction volumique de martensite restant à peu près constante.

Dans ce cas l'évolution de la déformation de transformation est une combinaison de celles en transformations directe et inverse. Sa direction est déterminée directement lors de l'intégration numérique. Cependant son évolution est donnée par :  $\varepsilon_{eq}^{tr} = \dot{\lambda}_1 \mathbb{K}_\varepsilon : \mathbb{K}_\sigma + \dot{\lambda}_2 \frac{g(-y_\varepsilon)}{g(-1)}$ .

## 2.4 Évolution des surfaces seuil de transformation

Au cours de la transformation, la taille et la position des deux surfaces seuil de transformation sont déterminées grâce aux deux variables  $R(z)$  et  $\delta(z)$ , respectivement. Afin de prendre en compte l'effet point mémoire [6], la fraction volumique de martensite est mémorisée à chaque changement de sens de la transformation :  $z_n^{max}$  pour un point mémoire haut et  $z_n^{min}$  pour un point mémoire bas, avec  $n$  le nombre de boucles du chargement. L'évolution de  $R(z)$  et  $\delta(z)$  dépend alors de ces valeurs :

$$\delta(z) = \begin{cases} \delta_0 + \left( p \frac{\frac{z-z_n^{min}}{n-1}}{z_n^{max}-z_n^{min}} - p \right) (\delta_{n-1}^{min} - \delta_0) + \left( p \frac{\frac{z_n^{max}-z}{n-1}}{z_n^{max}-z_n^{min}} - p \right) (\delta_{n-1}^{max} - \delta_0) & (\dot{z} > 0) \\ \delta_0 + \left( p \frac{\frac{z-z_n^{min}}{n-1}}{z_n^{max}-z_n^{min}} - p \right) (\delta_{n-1}^{min} - \delta_0) + \left( p \frac{\frac{z_n^{max}-z}{n-1}}{z_n^{max}-z_n^{min}} - p \right) (\delta_n^{max} - \delta_0) & (\dot{z} < 0) \end{cases} \quad (10)$$

Où  $\delta_n^{min} = \delta(z_n^{min})$ ,  $\delta_n^{max} = \delta(z_n^{max})$ ,  $p$  et  $\delta_0$  sont deux paramètres matériau. Et pour  $R(z)$  :

$$R(z) = \begin{cases} R_{n-1}^{min} + h_1(z) (R_{n-1}^{max} - R_{n-1}^{min}) & (\dot{z} > 0) \\ R_{n-1}^{min} - \delta_{n-1}^{min} + h_2(z) (R_n^{max} - \delta_n^{max} - R_{n-1}^{min} + \delta_{n-1}^{min}) & (\dot{z} < 0) \end{cases} \quad (11)$$

Où  $R_n^{min} = R(z_n^{min})$  et  $R_n^{max} = R(z_n^{max})$ , et les fonctions  $h_1(z)$  et  $h_2(z)$  sont données par :

$$h_1(z) = \frac{h\left(\frac{z_n^{max}}{z_1^{max}} \frac{z-z_n^{min}}{z_n^{max}-z_n^{min}}\right)}{h\left(\frac{z_n^{max}}{z_1^{max}}\right)} \quad (12)$$

$$h_2(z) = \frac{h\left(\frac{z(z_1^{max}-z_n^{min})+z_n^{min}(z_n^{max}-z_1^{max})}{z_1^{max}(z_n^{max}-z_n^{min})}\right) - h\left(\frac{z_n^{min}}{z_1^{max}}\right)}{1 - h\left(\frac{z_n^{min}}{z_1^{max}}\right)} \quad (13)$$

Avec  $h(z) = \frac{\arccos(1-2z)}{\pi}$

## 2.5 Comportement cyclique

Afin de simuler l'apparition de la déformation résiduelle due à la martensite résiduelle, une fraction volumique de martensite bloquée,  $z_b$ , est introduite dans le modèle. C'est une partie de la fraction volumique de martensite globale,  $z$ , mais qui ne se transforme plus en austénite lors de la transformation inverse. Son évolution est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_b = \frac{AB\Delta z e^{\frac{(AB\Delta z \ln(tr+tr_0) - A \ln(tr_0)) - z_j}{C}}}{tr+tr_0} \dot{tr} & (\dot{z} > 0) \\ \dot{z}_b = 0 & (\dot{z} < 0) \end{cases} \quad (14)$$

Où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $tr_0$  sont trois paramètres matériau,  $\Delta z = z - z_{n-1}^{min}$  caractérise l'amplitude de la transformation et  $tr$  est la déformation cumulée de transformation définie par :

$$tr = \int \left| \frac{d\varepsilon_{eq}^{tr}}{\gamma} \right| \quad (15)$$

Où  $d\varepsilon_{eq}^{tr}$  est l'incrément de déformation de transformation équivalente.

### 3 Identification et validation

Le modèle proposé comporte 13 paramètres matériaux. Cinq essais sont utilisés pour identifier tous les paramètres : 4 essais de traction cyclique à 1, 2, 3 et 4 % de déformation maximale et un essai de traction cyclique à amplitudes alternées. Une attention particulière a été portée à l'évolution de la déformation résiduelle au cours du cyclage (figure 2).

$E$	$\nu$	$\gamma$	$a$	$\mu$	$T_0$	$\delta_1^{min}$	$\delta_0$	$R_1^{max}$
43 GPa	0,3	5,85 %	0,7	3 MPa°C <sup>-1</sup>	28,7°C	185 MPa	15 MPa	330 MPa
			$A$	$B$	$C$	$tr_0$		
			0,0057	7,05	0,904	0,123		

TABLE 1 – Paramètres matériaux identifiés sur un Cu-Al-Be.

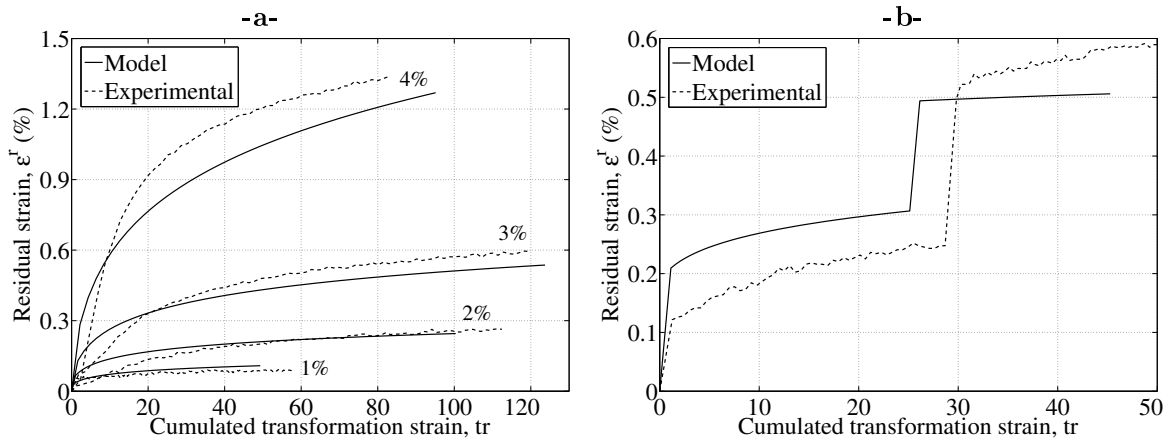


FIGURE 2 – Comparaison essai-simulation de l'évolution de la déformation résiduelle en fonction de la déformation de transformation cumulée lors des chargements utilisés pour l'identification.

Le modèle a ensuite été validé en comparant les résultats des simulations avec ceux de l'essai correspondant. Les essais utilisés sont un essai de traction cyclique à amplitude croissante et un essai thermo-mécanique cyclique d'effet mémoire assisté. On peut observer une bonne corrélation entre les résultats, notamment au niveau de l'évolution des déformations résiduelles (figure 3).

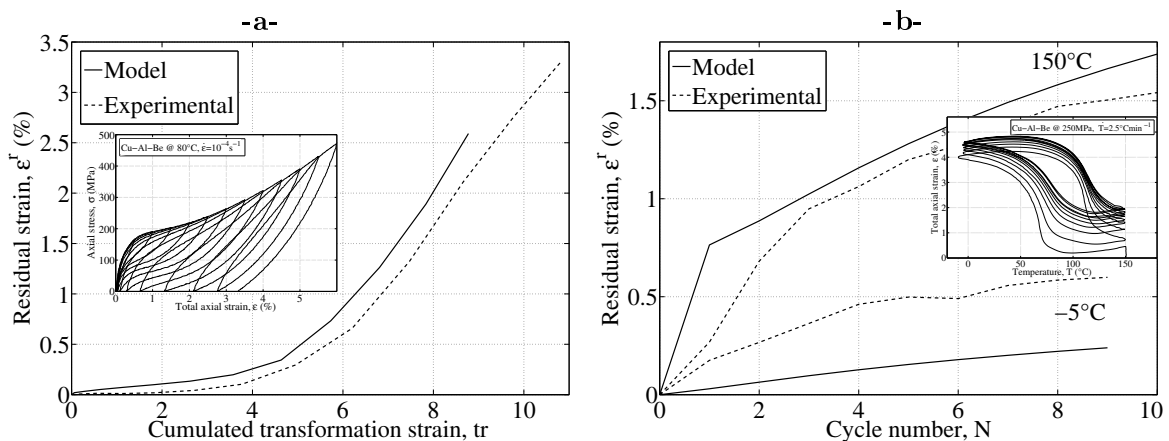


FIGURE 3 – Comparaison essai-simulation de l'évolution de la déformation résiduelle en fonction de la déformation de transformation cumulée ou du nombre de cycles lors des chargements utilisés pour la validation.

## 4 Conclusions

Un modèle a été proposé pour décrire le comportement thermo-mécanique des AMF sous chargement 3D cyclique. Il se base sur un domaine élastique défini par l'intersection de deux surfaces seuil identiques. Le modèle prend en compte le comportement en super-élasticité, celui en effet mémoire assisté, la dissymétrie traction-compression, l'effet points mémoires et l'effet rochet sous chargement non-proportionnel cyclique.

## Références

- [1] Davide BIGONI et Andrea PICCOLROAZ : Yield criteria for quasibrittle and frictional materials. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11-12):2855-2878, 2004.
- [2] Christophe BOUVET, Sylvain CALLOCH et Christian LEXCELLENT : Mechanical behavior of a Cu-Al-Be shape memory alloy under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124:112-124, 2002.
- [3] Christophe BOUVET, Sylvain CALLOCH et Christian LEXCELLENT : A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23:37-61, 2004.
- [4] Pierre Antoine GEDOUIN, Shabnam ARBAB CHIRANI et Sylvain CALLOCH : Phase proportioning in CuAlBe shape memory alloys during thermomechanical loadings using electric resistance variation. *International Journal of Plasticity*, 26(2):258-272, 2009.
- [5] Yong LIU, Zeliang XIE, Jan VAN HUMBEECK et Luc DELAEY : Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys. *Acta Materialia*, 46(12):4325-4338, 1998.
- [6] Jordi ORTIN : Preisach modeling of hysteresis for a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal. *Journal of Applied Physics*, 71(3):1454-1461, 1992.
- [7] Étienne PATOOR, Mohammed El AMRANI, André EBERHARDT et Marcel BERVEILLER : Determination of the origin for the dissymmetry observed between tensile and compression tests on shape memory alloys. *Journal de Physique IV*, 2:495-500, 1995.
- [8] Luc SAINT-SULPICE, Shabnam ARBAB CHIRANI et Sylvain CALLOCH : A 3D super-elastic model for shape memory alloys taking into account progressive strain under cyclic loadings. *Mechanics of Materials*, 41:12-26, 2009.
- [9] Karine TAILLARD : *Étude du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme sous sollicitations multiaxiales complexes*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2006.
- [10] Karine TAILLARD, Shabnam ARBAB CHIRANI, Sylvain CALLOCH et Christian LEXCELLENT : Equivalent transformation strain and its relation with martensite volume fraction for isotropic and anisotropic shape memory alloys. *Mechanics of Materials*, 40(4-5):151-170, 2008.
- [11] Pierre VACHER et Christian LEXCELLENT : Study of pseudoelastic behavior of polycrystalline SMA by resistivity measurements and acoustic emission. *In Proc. of ICM VI*, volume 6, pages 231-236, 1991.