

# Une modélisation micromécanique du comportement des composites élastiques incluant les effets microstructuraux

T.-H. Tran<sup>a</sup>, V. Monchiet<sup>a</sup>, G. Bonnet<sup>a</sup>

a. Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, LMSME UMR8208 CNRS, 5 boulevard Descartes, 77454 Marne la Vallée Cedex, France

## Résumé :

*On propose une démarche micromécanique visant à déterminer le comportement macroscopique des composites périodiques en incluant les effets de gradient de la déformation et la taille des éléments microstructuraux. Ces effets peuvent être obtenus dans le cadre classique de l'homogénéisation des milieux périodiques en incluant les termes d'ordre supérieur du développement asymptotique [1] et négligés dans les approches classiques. Chaque terme de la série est alors obtenu en résolvant un problème d'élasticité posé sur la cellule élémentaire. Une approche basée sur la transformée de Fourier rapide s'avère particulièrement bien adaptée pour la résolution de ces problèmes successifs. Enfin, on propose une transition micro-macro fondée sur l'énergie élastique en vue de la formulation de loi de comportement du composite. Des illustrations pour des composites à fibres seront enfin proposées dans la dernière partie de ce travail.*

## Abstract :

*We propose a micromechanical approach for the modeling of the macroscopic behavior of composites materials including strain gradient effects and the size of the microstructural elements. These effects are taken into account, in the homogenization framework of periodic media, by considering higher order terms in the asymptotic expansion fields [1] which are neglected in the classical approaches. Each term of the series are then obtained by solving linear elastic problems posed over a periodic unit cell which are solved by means of modified Fast Fourier Transform based method. In fine, we propose a micro-macro transition based on the elastic energy density, in order to formulate the macroscopic law of the composite. An application to a composite reinforced by long fibers is proposed in the last part of this paper.*

**Mots clés :** Milieu du Second Gradient, Homogénéisation, Développement Asymptotique

## 1 Introduction

La démarche classique d'homogénéisation des milieux périodiques appliquée aux matériaux composites repose sur l'hypothèse de séparation des échelles, c'est à dire que la taille des éléments microstructuraux reste petite devant la taille de la structure étudiée. Dans ce cadre de validité, les grandeurs dites macroscopiques sont uniformes à l'échelle locale (celle des hétérogénéités), les propriétés effectives (obtenues par le processus d'homogénéisation) n'introduisent pas de taille caractéristique liée à la microstructure (typiquement la taille des renforts). Cette hypothèse reste valide lorsque la taille des hétérogénéités reste petite devant les dimensions de la structure étudiée. Des modèles visant à intégrer les effets microstructuraux à l'échelle macroscopique ont été proposés dans les années 60 (voire par exemple [7, 8, 4, 5]). Essentiellement, ce sont les modèles dits de milieux du second gradient, ils introduisent les effets du gradient de la déformation et une taille caractéristique de la microstructure.

Contrairement aux méthodes d'homogénéisation, les modèles à gradient permettent de rendre compte véritablement des effets d'échelles. Néanmoins ces modèles sont de nature phénoménologique, ils ont été établis sans lien direct avec les propriétés de la microstructure. De plus, ces modèles introduisent généralement un grand nombre de paramètres dont l'identification expérimentale pose un certain nombre de difficultés.

On propose donc ici une démarche visant à intégrer les effets microstructuraux dans un cadre d'homogénéisation. L'approche s'appuie sur les résultats de Boutin [1] concernant les techniques par développement asymptotique appliquées aux milieux composites. Dans ce cadre les effets de gradient de la déformation macroscopique sont introduits à l'échelle locale en considérant les termes d'ordre 2. Les approches classiques se restreignent, elles, à un développement au premier ordre, pour la description des champs locaux. Une approche basée sur la transformée de Fourier rapide, introduite par [6], est proposée pour la résolution du problème à l'ordre 2. Enfin, la transition micro-macro est alors effectuée à partir d'une relation de moyenne écrite sur l'énergie élastique. On démontre ainsi que le comportement à l'échelle de la structure est celui d'un milieu du second gradient. L'identification des propriétés effectives de ce milieu dans le cas d'un composite à fibre est présentée dans la dernière partie de ce travail.

## 2 L'approche par développement asymptotique

On rappelle ici la méthode par développement asymptotique et la formulation du problème à l'ordre deux établi dans [1]. On considère donc un milieu périodique défini par une cellule de base choisie de forme parallélépipédique (bien adapté pour la mise en oeuvre des méthodes de résolution numérique). Chacune des phases constitutives du milieu hétérogène sont décrites par les équations de l'élasticité :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \end{cases} \quad (1)$$

On note par  $\epsilon = l/L$  le facteur d'échelle, où  $l$  et  $L$  représentent respectivement la taille caractéristique de la cellule et de la macrostructure étudiée. L'existence de deux échelles suppose que le facteur  $\epsilon$  soit petit devant 1. Dans ce contexte on peut appliquer la méthode basée sur les développements asymptotiques. Celle-ci est constituée des quatre étapes suivantes :

- On introduit les deux variables d'espace  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$ , où  $\mathbf{x}$  est la variable d'espace "macroscopique" ou "lente" tandis que  $\mathbf{y}$  est la variable d'espace "microscopique" ou "rapide".
  - Le déplacement en tout point de la microstructure peut être développé sous la forme :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$
  - Dans les équations d'élasticité (1) l'utilisation de deux variables d'espace  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  suggère d'utiliser la décomposition suivante pour l'opérateur gradient :  $\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y$ , où les indices  $x$  et  $y$  indiquent que les dérivées sont prises respectivement par rapports aux variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .
  - On regroupe les termes de même puissance en  $\epsilon$  pour former des systèmes d'équation d'ordre 0, 1, 2,...
- Le problème à l'ordre zéro est un problème trivial qui conduit à :  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{U}^0(\mathbf{x})$ . C'est à dire que le champ  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  est de nature purement macroscopique. Le champ à l'ordre 1  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  vérifie :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{y}) : [\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{U}^0)] \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_y \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla_y) \\ \mathbf{u} \text{ périodique, } \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \quad (2)$$

Il s'agit du problème généralement considéré dans les approches classiques par homogénéisation dans lesquelles  $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{U}^0)$  s'interprète comme le tenseur des déformations macroscopiques. La considération des termes aux ordres supérieurs du développement asymptotique fait que  $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{U}^0)$  ne peut s'interpréter

comme tel. Nous reviendrons sur ce point dans la section qui suit.

Compte tenu de la linéarité des équations, le champ  $\mathbf{u}^1$  est une fonction linéaire de  $\varepsilon_x(\mathbf{U}^0)$ . On a donc :

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \varepsilon_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x})) \quad (3)$$

S'agissant maintenant du champ à l'ordre deux,  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , il vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{y}) : [\varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) + \varepsilon_x(\mathbf{u}^1)] \\ \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{y}} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{u} \text{ périodique, } \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \quad (4)$$

avec :  $\mathbf{f} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{y}) : (\varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^1) + \varepsilon_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x})))]$ . Encore une fois, compte tenu de la linéarité des équations, le champ de déplacement  $\mathbf{u}^2$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{U}^2(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \varepsilon_x(\mathbf{U}^1(\mathbf{x})) + \mathbf{X}^2(\mathbf{y}) : \nabla_{\mathbf{x}} \varepsilon_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x})) \quad (5)$$

Les champs d'ordre supérieur sont obtenus en employant la même stratégie.

### 3 Le comportement homogénéisé

Le principe d'homogénéisation consiste à remplacer le milieu hétérogène réel par un milieu fictif, homogène, équivalent obtenu par des relations de moyenne sur les grandeurs locales. Les champs locaux peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{X}^2(\mathbf{y}) : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{A}^0(\mathbf{y}) : \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{A}^1(\mathbf{y}) : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{E} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Où les composantes de  $\mathbf{A}^0(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{A}^1(\mathbf{y})$ , etc, sont calculées à partir de celles des tenseurs  $\mathbf{X}^1(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{X}^2(\mathbf{y})$ , etc. Les champs  $\mathbf{X}^i(\mathbf{y})$  étant périodiques et à moyenne nulle sur la cellule élémentaire, les champs  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  représentent le déplacement et la déformation macroscopique :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_V = \mathbf{U}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{U}^2(\mathbf{x}) + \dots; \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_V = \varepsilon_x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) \quad (7)$$

Où les crochets  $\langle \bullet \rangle_V$  définissent la moyenne prise sur le volume de la cellule élémentaire, noté  $V$ . Dans la suite on néglige les termes faisant intervenir le double, triple, etc, gradient de la déformation macroscopique. L'énergie élastique macroscopique,  $W(\mathbf{x})$ , est alors définie par :

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_V = W^0(\mathbf{x}) + \varepsilon W^1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 W^2(\mathbf{x}) \quad (8)$$

Où les potentiels  $W_0(\mathbf{x})$ ,  $W_1(\mathbf{x})$ ,  $W_2(\mathbf{x})$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{0hom} : \mathbf{E}; & W^{(1)} &= \mathbf{E} : \mathbf{C}^{1hom} : \nabla \mathbf{E}; \\ W^{(2)} &= \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} : \mathbf{C}^{2hom} : \nabla \mathbf{E} \end{aligned} \quad (9)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{0hom} &= \langle \mathbf{A}^0(\mathbf{y}) : \mathbf{C}(\mathbf{y}) : \mathbf{A}^0(\mathbf{y}) \rangle_V; & \mathbf{C}^{1hom} &= \langle \mathbf{A}^0(\mathbf{y}) : \mathbf{C}(\mathbf{y}) : \mathbf{A}^1(\mathbf{y}) \rangle_V; \\ \mathbf{C}^{2hom} &= \langle \mathbf{A}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{C}(\mathbf{y}) : \mathbf{A}^1(\mathbf{y}) \rangle_V \end{aligned} \quad (10)$$

Le potentiel obtenu est une fonction quadratique de la déformation macroscopique et du gradient de la déformation macroscopique. Le comportement du milieu décrit par un tel potentiel est celui d'un milieu dit du second gradient tel qu'introduit dans les travaux de Toupin [7, 8] et Mindlin [4, 5].

## 4 Résolution par un schéma itératif basé sur la transformée de Fourier rapide

L'utilisation d'un schéma itératif basé sur la transformée de Fourier rapide (TFR), tel qu'introduit dans [6] est bien adapté pour résoudre les problèmes d'élasticité successifs posés sur la cellule élémentaire. L'algorithme introduit dans [6] permet de résoudre le problème à l'ordre 1 défini par (2). Le problème à l'ordre deux fait intervenir des forces de volume  $\mathbf{f}$  ainsi que le terme  $\mathbf{C}(\mathbf{y}) : \varepsilon_x(\mathbf{u}^1)$  qui peut s'interpréter comme un champ de polarisation imposé à la cellule élémentaire. Une réécriture du schéma algorithmique est donc nécessaire. Les problèmes (2) et (4) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s}(\mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{y}} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{u} \text{ périodique, } \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \quad (11)$$

Le problème d'inhomogénéité est résolu par la méthode TFR en s'appuyant sur la solution d'un problème d'inclusion au sens d'Eshelby [3]. Considérons le problème d'élasticité suivant :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{y}} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{u} \text{ périodique, } \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \quad (12)$$

dont on cherche la solution pour  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{f}$  imposés. Le champ des déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et le champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des champs périodiques à moyenne nulle sur la cellule élémentaire. Les problèmes (2) et (4) peuvent tout deux se mettre sous la forme (12). La solution de (12) s'écrit, dans le domaine de Fourier :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi}) : (\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})) \quad (13)$$

Où  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\xi})$  etc, représentent les transformées de Fourier des champs  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$ ,  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})$ , etc, et  $\boldsymbol{\xi}$  désignent les vecteurs d'ondes. Dans (13),  $\boldsymbol{\Gamma}^0(\mathbf{y})$  est le tenseur de Green du milieu périodique associé au milieu homogène de rigidité  $\mathbf{C}^0$  et le symbole "\*" désigne le produit de convolution. Le tenseur d'ordre deux  $\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})$  est fonction des forces de volume  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$  :

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i}{\|\boldsymbol{\xi}\|^4} \left[ \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} - (\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \otimes \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})) \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \right] \quad (14)$$

L'identification du système (12) avec (11) donne  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) = (\mathbf{C}(\mathbf{y}) - \mathbf{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s}(\mathbf{y})$ . La solution du problème (11) peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\mathbf{y}) * \left[ (\mathbf{C}(\mathbf{y}) - \mathbf{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s}(\mathbf{y}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}) \right] \quad (15)$$

Où  $\mathbf{b}(\mathbf{y})$  est la transformée de Fourier inverse de  $\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})$  défini dans (14). La résolution de cette équation intégrale peut être obtenue en utilisant les mêmes outils que ceux utilisés dans la méthode classique introduite dans [6]. Le schéma itératif utilisé est décrit ci-dessous :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{y}) = \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}^i(\boldsymbol{\xi})) \\ \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{y}) = \mathbb{C}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{y}) + \mathbf{s}(\mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\sigma}^i(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{y})) \\ \text{test de convergence} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi}) : (\boldsymbol{\sigma}^i(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})) \end{cases} \quad (16)$$

Où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  désignent respectivement la transformée de Fourier et son inverse. Le schéma est alors stoppé lorsque l'équilibre local est atteint.

## 5 Illustration

Considérons un composite à fibres défini par une cellule carrée de cotés  $2b$  et contenant une fibre de section cylindrique de rayon  $a$ , alignée dans la direction  $Ox_3$ . Les modules élastiques de la matrice sont choisis égaux à  $\mu_M = 20GPa$ ,  $\lambda_M = 20GPa$  tandis que ceux de l'inclusion sont  $\mu_I = 40GPa$  et  $\lambda_I = 40GPa$ . Pour des raisons de simplicité d'écriture, on représente le gradient de la déformation macroscopique à l'aide d'un vecteur de dimension 18 :

$$\nabla \mathbf{E} = [G_{11} \dots G_{61} \ G_{12} \dots G_{62} \ G_{13} \dots G_{63}] \quad (17)$$

avec  $G_{11} = \nabla_1 E_{11}$ ,  $G_{12} = \nabla_2 E_{11}$ ,  $G_{61} = \sqrt{2} \nabla_1 E_{12}$  etc. Le tenseur  $\mathbf{C}^{2hom}$  est représenté par une matrice de dimension  $18 \times 18$  :

$$[\mathbf{C}^{2hom}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & \dots & C_{1161} & C_{1112} & \dots & C_{1162} & C_{1113} & \dots & C_{1163} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & C_{6161} & C_{6112} & \dots & C_{6162} & C_{6113} & \dots & C_{6163} \\ & & & C_{1212} & \dots & C_{1262} & C_{1213} & \dots & C_{1263} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & C_{6262} & C_{6213} & \dots & C_{6263} \\ & & & & & & C_{1313} & \dots & C_{1363} \\ & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & C_{6363} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (18)$$

*Sym*

La cellule est soumise à des sollicitation en état plan de déformation ( $G_{11}, G_{22}, G_{12}, G_{21}, G_{61}, G_{62}$ ). Sur les figures 1, 2 et 3 on représente les variations des composantes planes (dans le plan  $Ox_1x_2$ ) de la matrice  $[\mathbf{C}^{2hom}]$  (ou plutôt les composantes adimensionnées, notées  $\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}/(4b^2\mu_M)$ ) en fonction du rapport  $a/b$ .

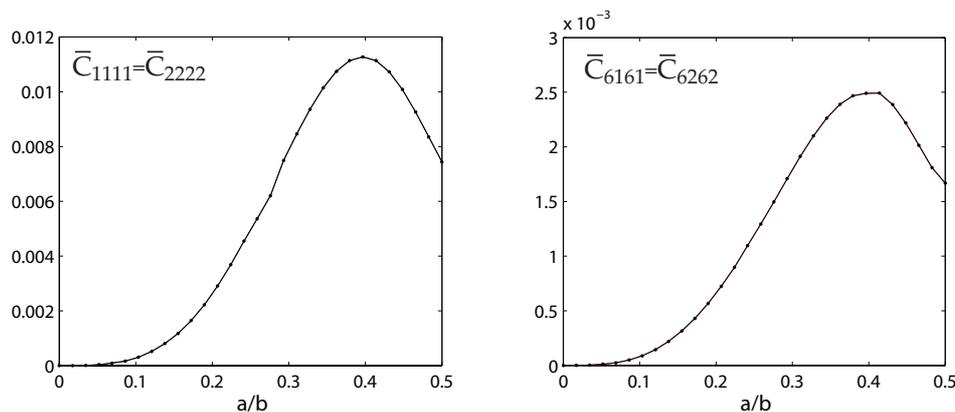


FIGURE 1 – Composantes  $\bar{C}_{1111}$  et  $\bar{C}_{6161}$  en fonction du rapport  $a/b$ .

## 6 Conclusion

Nous avons proposé une approche micromécanique visant à rendre compte des effets du second gradient et des effect de taille des éléments microstructuraux. La démarche repose sur (i) l'utilisation de l'approche par développement asymptotiques pour la détermination des champs locaux aux ordres supérieurs, (ii) l'utilisation d'un schéma itérative basé sur la transformée de Fourier rapide pour la

résolution des problèmes locaux successifs (ii) l'écriture d'une équivalence fondée sur l'énergie élastique pour la transition d'échelle. La mise en oeuvre de la méthode dans le cas d'un composite à fibre a permis de mettre en évidence la pertinence de la démarche proposée pour l'identification des coefficients des milieux du second gradient.

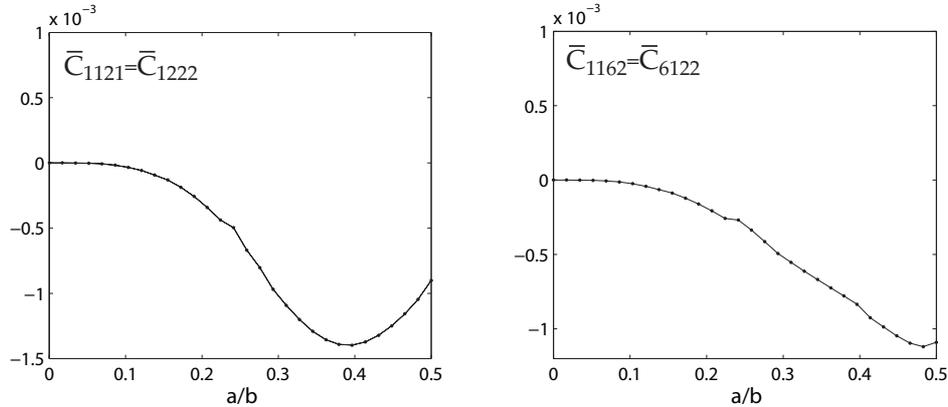


FIGURE 2 – Composantes  $\bar{C}_{1121}$  et  $\bar{C}_{1162}$  en fonction du rapport  $a/b$ .

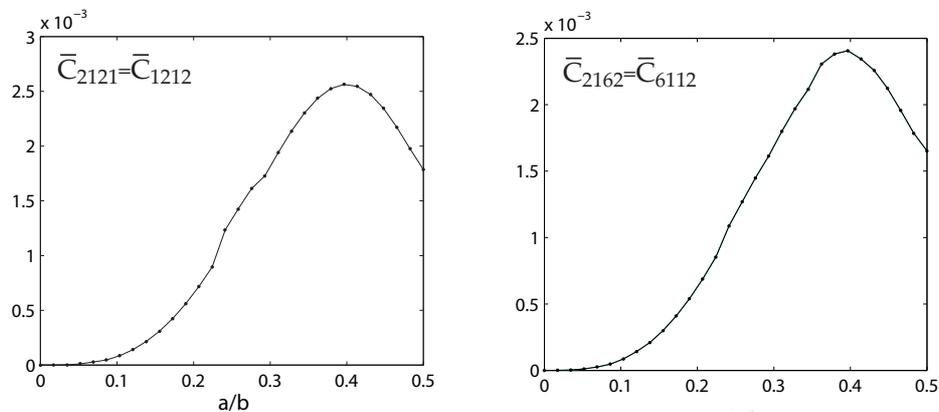


FIGURE 3 – Composantes  $\bar{C}_{2121}$  et  $\bar{C}_{2162}$  en fonction du rapport  $a/b$ .

## Références

- [1] **Boutin, C.** 1996 Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Solids and Structures*. **33**(7); 1023-1051.
- [2] **Mindlin, R.D.** 1964 Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Analysis*. **16**; 51-78.
- [3] **Eshelby J.D.** 1957 The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond., A* **241**; 376-396.
- [4] **Mindlin, R.D., Eshel, N.N.** 1964 On first strain gradients theory in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. **4**; 109-124.
- [5] **Mindlin, R.D., Eshel, N.N.** 1968 On first strain gradients theory in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. **4**; 109-124.
- [6] **Moulinec, H., Suquet, P.** 1994 A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R. Acad. Sci.* **318**(11); 1417-1423.
- [7] **Toupin, R.** 1962 Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rat. Mech. Analysis*. **11**(1); 385-414.
- [8] **Toupin, R.** 1964 Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Rat. Mech. Analysis*. **17**(2); 85-112.