

Développement d'un modèle hybride MAE–X-FEM pour la modélisation des couches minces

A. IFIS, F. BILTERYST, M. NOUARI

LEMTA CNRS-UMR 7563, GIP-InSIC, 27 rue d'Hellieule F-88100 Saint-Dié-des-Vosges

Résumé :

Un grand nombre d'applications industrielles requièrent l'intégration de couches minces au sein de structures (soudure, brasure, collage, revêtements,...), et nécessitent ainsi une modélisation fine de leur comportement hétérogène. Dans cet objectif, un nouveau modèle, couplant l'approche théorique des développements asymptotiques raccordés (MAE) et la méthode numérique des éléments finis étendus (X-FEM), est introduit pour décrire le comportement thermomécanique de ce type de structures, garantissant la précision des résultats sans raffinement particulier du maillage inhérent à une discrétisation classique. Des premiers résultats pour le cas d'assemblages brasés axisymétriques sont également présentés et confrontés à ceux obtenus par des approches classiques.

Abstract:

Many industrial applications deal with the integration of thin layers inside mechanical structures (welding, gluing, brazing, coating) and need consequently an accurate modeling of their heterogeneous behavior. For this aim, a new model is introduced while coupling the analytical matched asymptotic expansions method (MAE) with the numerical Extended Finite Elements method (X-FEM) in order to describe the thermomechanical behavior of such structures. This leads to highly accurate results without excessive mesh refinement. First results obtained for axisymmetric brazed structures are presented and compared with those issued from classical finite elements computations.

Mots clefs : couches minces, développements asymptotiques raccordés, X-FEM

1 Introduction

L'intégration de couches minces au sein de structures mécaniques relève souvent du développement de procédés innovants de fabrication dans la plupart des domaines industriels de pointe. En contrepartie, elles se doivent d'assurer les fonctions sensibles, telles que par exemple l'assemblage (soudage, brasage et collage) ou le revêtement d'outillages. Des performances thermomécaniques que ces couches procurent aux structures est né un grand besoin en termes de modélisation pour la simulation du comportement de ces structures finement hétérogènes. Cette problématique se retrouve notamment dans la conception d'outillages rapides stratifiés, assemblés par brasage, pour des applications telles que la fonderie [1] ou l'injection plastique [2]. Pourtant, la plupart des approches théoriques et méthodes numériques développées pour cet objectif présentent certaines limitations qui ne leur permettent pas de prendre en considération le comportement et l'influence des joints. Tantôt ces derniers doivent être modélisés en utilisant des hypothèses de simplification dans le cas des approches théoriques, tantôt l'utilisation des éléments finis classiques nécessitent un degré de raffinement trop extrême pour atteindre des résultats précis dans le cas des méthodes numériques. Toutefois, des méthodes récentes d'enrichissement multi-échelles semblent proposer une alternative aux limitations précédentes. On pourra se référer à [3 pour une présentation de ces méthodes.]

Ainsi, en reprenant un travail antécédent [4-5], un nouveau modèle hybride est défini, afin de remédier aux limitations précédentes, par un couplage de deux méthodes: la méthode analytique des développements asymptotiques raccordés (MAE) et la méthode numérique des éléments finis étendus (X-FEM). La première permet d'approximer la solution globale "macro" par un terme de perturbation issu de l'analyse locale "micro" au niveau du joint [6]. D'autre part, la méthode X-FEM rajoute à l'approximation

standard des éléments finis une deuxième partie dite d'enrichissement [7]. Le couplage MAE-X-FEM consiste alors à intégrer la perturbation issue de l'approche MAE dans la formulation X-FEM.

2 Présentation du modèle hybride par couplage MAE-X-FEM

2.1 Préambule

Basée sur la méthode de partition de l'unité, X-FEM a été développée pour remédier aux limitations de la méthode FEM standard dans l'approche de problèmes perturbés. Ainsi, la formulation X-FEM du champ de déplacement est donnée par :

$$\mathbf{u}(x) = \sum_i N_i(x) \mathbf{u}_i(x) + \sum_k^{N_{enr}} N_k(x) \psi_k \mathbf{b}_k \tag{1}$$

où le premier membre décrit la solution non perturbée approchée par la formulation standard FEM, tandis que le second terme, dit d'enrichissement, permet d'introduire, à l'aide des fonctions ψ_k et des paramètres d'enrichissement b_k , la perturbation sur N_{enr} nœuds localisés dans son voisinage. L'efficacité de la formulation X-FEM et la précision des résultats dépendent donc de l'enrichissement utilisé, d'où l'intérêt d'un couplage de cet enrichissement avec une méthode analytique la plus adéquate possible : ce sera la technique des développements asymptotiques raccordés (MAE) [6].

Par MAE, deux problèmes vont être analysés, le problème "perturbé" où le joint joue le rôle de perturbation, et le problème "non perturbé" posé sur la structure homogène. Cela conduit à utiliser deux développements. Le premier, dit extérieur, restitue le comportement global "loin" du joint caractérisé par le paramètre de perturbation ε . Ce dernier est issu du modèle adimensionnel et représente un rapport entre l'épaisseur du joint et la longueur totale de l'assemblage :

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^0(x) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x) \tag{2}$$

Ce développement, discontinu à l'endroit de la perturbation, résulte du champ continu non perturbé $\mathbf{u}^0(x)$ corrigé du terme $\varepsilon \mathbf{u}^1(x)$ lié à la présence du joint. La continuité locale au franchissement du joint sera assurée par le raccordement de (2) avec un second développement, dit intérieur et valable "à proximité" de la perturbation :

$$\mathbf{v}(\varepsilon \bar{x}) = \mathbf{v}^0(\bar{x}) + \varepsilon \mathbf{v}^1(\bar{x}) \tag{3}$$

décrivant la solution sur un domaine (semi-)infini parcouru par la variable $\bar{x} = x/\varepsilon$ (figure 1). Les règles de raccordement spécifiques [6] entre (2) et (3) vont permettre de restituer l'impact de la présence du joint sur le comportement global (2) au travers du terme $\varepsilon \mathbf{u}^1(x)$.

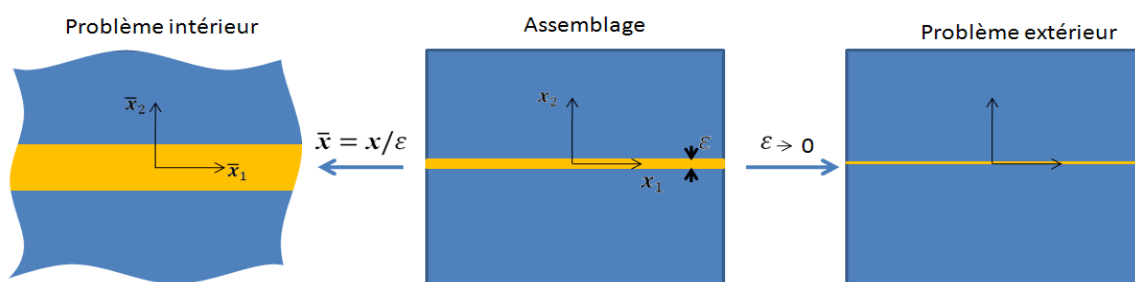


FIG. 1 – Principe MAE

En exploitant la similitude entre les deux approximations (1) et (2), l'idée consiste à utiliser MAE pour construire la partie enrichissement dans la formulation X-FEM suivant le schéma ci-dessous.

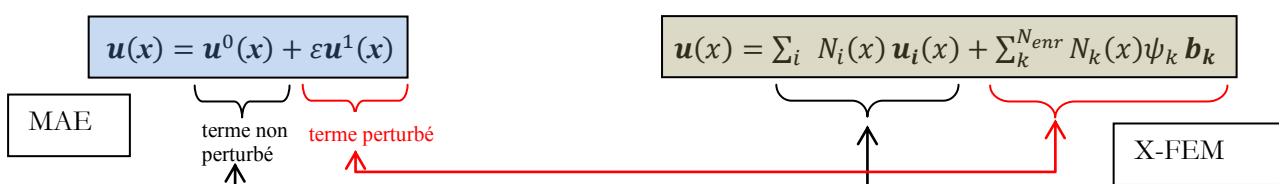


FIG. 2 – Principe du couplage MAE-X-FEM

2.2 Mise en œuvre sur un problème mécanique axisymétrique

Afin de décrire plus finement le modèle, nous considérons l'assemblage cylindrique brasé de la figure 3, constitué de l'assemblage de deux strates identiques de caractéristiques mécaniques (E_1, ν_1) par un joint d'épaisseur e et de caractéristiques (E_2, ν_2) .

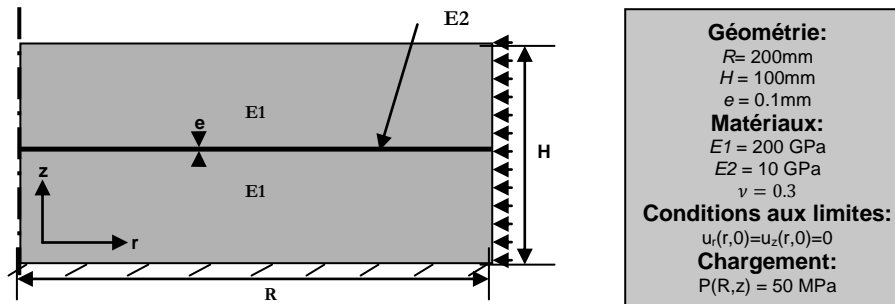


FIG. 3 – Modèle de l'assemblage brasé

Le modèle adimensionné est caractérisé par le paramètre de perturbation est défini par $\varepsilon = \frac{e}{H} \ll 1$, où e est l'épaisseur du joint et H une dimension caractéristique de l'assemblage. Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité linéaire, aux équations classiques :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \\ \sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \\ 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \end{cases}$$

On peut noter que la géométrie plane du joint n'est en aucun cas restrictive. De même, l'assemblage est supposé parfait : ainsi, les contraintes résiduelles à l'intérieur de la brasure et les problèmes aux interfaces ne seront pas modélisés. Mais ces derniers pourraient être intégrés dans le modèle afin de rendre compte de phénomènes plus complexes impactant le développement intérieur à l'endroit du joint.

2.2.1 La formulation X-FEM

La formulation retenue ici s'inspire de celle adoptée dans l'approche des problèmes de fissuration [7]. Pour ces derniers, la décomposition (1) prend la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_j N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j + \sum_k N_k(\mathbf{x}) \left(\sum_1^4 c_k^l F_l(\mathbf{x}) \right) \quad (4)$$

Si le premier terme reste issu d'une discrétisation FEM standard, le second restitue la discontinuité en déplacement au franchissement de la fissure (zone (1) figure 4) via la fonction de Heaviside $H(\mathbf{x})$, tandis que le troisième terme utilise des fonctions d'enrichissement particulières restituant le comportement singulier en pointe de fissure (zone (2)). Dans le cas qui nous intéresse ici, nous nous arrêterons au second terme en remarquant que la fonction $H(\mathbf{x})$ joue un rôle double : elle permet de capturer les nœuds enrichis et les situer par rapport à la fissure, ainsi qu'elle permet de générer la discontinuité du champ à calculer.

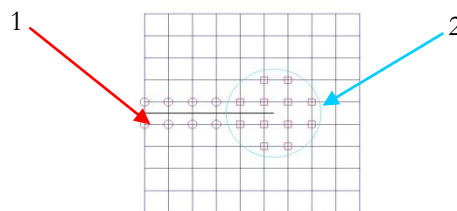


FIG. 4 – Stratégie d'enrichissement dans le cas de la fissuration [7]

L'idée sous-jacente du modèle mis en œuvre va donc consister à s'affranchir d'une discrétisation classique FEM d'un modèle continu finement hétérogène par l'adoption d'un modèle X-FEM restituant une interface de discontinuité à l'endroit du joint. Ainsi, nous adoptons la stratégie d'enrichissement suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \sum_i \mathbf{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \mathbf{u}^0_i + \sum_k^{N_{enr}} \mathbf{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \mathbf{H}(\mathbf{z}_k) \mathbf{a}_k \quad (5)$$

où \mathbf{u}^0_i est la valeur du champ $\mathbf{u}^0(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ prise au i ème nœud.

La partie FEM de cette formulation est associée au terme non perturbé du développement extérieur (2), alors que le terme d'enrichissement correspond à la perturbation présentée par le second terme du même développement.

Faisant le choix d'éléments Q4, et en utilisant la formulation X-FEM (5), les sauts des déplacements entre les nœuds de l'élément s'expriment comme suivant :

$$\begin{cases} u_{r2} - u_{r1} = u_{r2}^0 - u_{r1}^0 + a_{r1} + a_{r2} \\ u_{z2} - u_{z1} = u_{z2}^0 - u_{z1}^0 + a_{z1} + a_{z2} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{r3} - u_{r4} = u_{r3}^0 - u_{r4}^0 + a_{r4} + a_{r3} \\ u_{z3} - u_{z4} = u_{z3}^0 - u_{z4}^0 + a_{z4} + a_{z3} \end{cases} \quad (6)$$

En évaluant les mêmes sauts avec MAE :

$$\begin{cases} u_{r2} - u_{r1} = u_{r2}^0 - u_{r1}^0 + \varepsilon(u_{r2}^1 - u_{r1}^1) \\ u_{z2} - u_{z1} = u_{z2}^0 - u_{z1}^0 + \varepsilon(u_{z2}^1 - u_{z1}^1) \end{cases} \quad \begin{cases} u_{r3} - u_{r4} = u_{r3}^0 - u_{r4}^0 + \varepsilon(u_{r3}^1 - u_{r4}^1) \\ u_{z3} - u_{z4} = u_{z3}^0 - u_{z4}^0 + \varepsilon(u_{z3}^1 - u_{z4}^1) \end{cases} \quad (7)$$

Par égalité entre les expressions (6) et (7), les paramètres d'enrichissement dans (5) se définissent par :

$$\mathbf{a}_k = \varepsilon \frac{[[\mathbf{u}^1_k]]}{2} \quad (8)$$

où \mathbf{u}^1_k est la valeur du champ $\mathbf{u}^1(r, z)$ prise au k ème nœud.

2.2.2 Expression des sauts par MAE

Afin de calculer les sauts des déplacements dans (8), un algorithme de calcul MAE est mis en place. Cet algorithme est présenté en détails dans [6]. Il consiste à raccorder les développements (2) et (3) obtenus par résolutions successives des problèmes extérieurs et intérieurs aux différents ordres de ε . En appliquant cet algorithme dans le cas de l'assemblage axisymétrique, le saut obtenu s'écrit:

$$\begin{cases} [[u_r^1]] = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} (u_{r,z}^0(r, 0) + u_{z,r}^0(r, 0)) \\ [[u_z^1]] = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} (u_{r,r}^0(r, 0) + \frac{u_r^0(r, 0)}{r}) + (\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2} - 1) u_{z,z}^0(r, 0) \end{cases} \quad (9)$$

où (λ_1, μ_1) (respectivement (λ_2, μ_2)) désignent les coefficients de Lamé du matériau constitutif des strates (respectivement du joint). La formulation MAE-X-FEM (5) relie trois entités différentes : le champ global discret $\mathbf{u}(r, z)$, le champ non perturbé $\mathbf{u}^0(r, z)$ et les paramètres d'enrichissement \mathbf{a}_k .

On peut noter dans [4-5] qu'il est nécessaire de calculer numériquement le saut avant même de l'intégrer dans les paramètres d'enrichissement, imposant alors ensuite d'autres simulations pour le calcul du champ global. Cette démarche s'avère plus complexe et couteuse à mettre en œuvre. Un des avantages du modèle MAE-X-FEM introduit ici est de permettre d'exploiter les résultats MAE directement dans un seul calcul éléments finis. Il permet aussi de ramener l'algorithme de résolution X-FEM à un "simple" algorithme FEM standard corrigé. Ceci est dû à la dépendance du saut de $\mathbf{u}(r, z)$ vis-à-vis des dérivées du champ continu $\mathbf{u}^0(r, z)$: ainsi, l'expression (9) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$[[\mathbf{u}]] = [C] \cdot [B^0(r, 0)] \cdot \mathbf{u}^0 \quad (10)$$

$$\text{où : } [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{12} \\ c_1 & c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } c_1 = \varepsilon \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}, c_2 = \varepsilon (\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2} - 1), c_{12} = \varepsilon \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}$$

et $[B^0(r, 0)]$ la matrice gradient à l'emplacement du joint. En tenant compte de cette relation linéaire la matrice de rigidité élémentaire dans un élément enrichi s'écrit:

$$[K] = \int_{\Omega} {}^t[B^0].[D].[B^0]([I]+[CI])^{-1}d\Omega \tag{11}$$

avec $[CI] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H(z_1) & 0 & H(z_2) & 0 & H(z_3) & 0 & H(z_4) & 0 \\ 0 & H(z_1) & 0 & H(z_2) & 0 & H(z_3) & 0 & H(z_4) \end{bmatrix} \cdot [C] \cdot [B^0(r, 0)]$

2.2.3 Résolution numérique

Pour l'assemblage axisymétrique de Figure 1, nous effectuons deux simulations sous Matlab : une première utilisant le couplage MAE-X-FEM, et une seconde utilisant la FEM standard avec un maillage du joint - très grossier - comme le présente la figure 5.

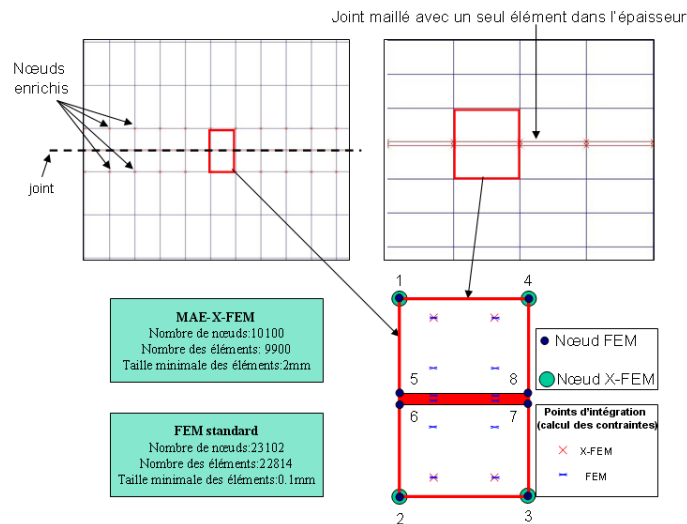


FIG. 5 – Comparaison des maillages X-FEM et FEM

Les déplacements radiaux et longitudinaux sont récupérés le long d'une coupe à R=100mm pour chacune des simulations. La figure 6 montre une comparaison des résultats obtenus.

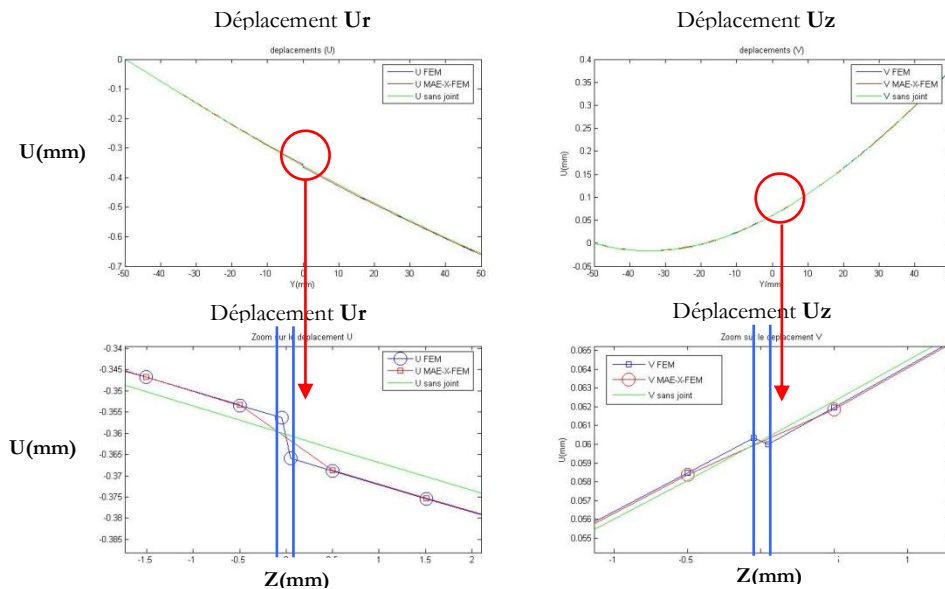


FIG. 6 – Déplacements radiaux et longitudinaux obtenus par MAE-XFEM et FEM

La solution obtenue par le couplage MAE-X-FEM rejoint la solution obtenue par FEM standard dès les premiers nœuds du maillage X-FEM au voisinage du joint. Notons que la courbe obtenue au sein de l'élément enrichi n'est qu'une interpolation linéaire des déplacements aux nœuds de cet élément, ce qui l'éloigne forcément de la solution de référence FEM. La raison reste que la géométrie du joint n'est pas prise en compte dans le modèle proposé. Toutefois, un avantage de la méthode MAE retenue demeure la

possibilité si besoin d'associer une modélisation précise du joint via la résolution supplémentaire par éléments finis du problème intérieur MAE.

L'erreur relative maximale du modèle ne dépasse pas 0.07% pour le déplacement radial et atteint 5.3% pour le déplacement longitudinal. On rappelle à ce titre que la mise en œuvre MAE présentée ici échoue à proximité des bords aux comportements locaux singuliers (joint débouchant et/ou chargé).

3 Conclusion

Les résultats, d'ores et déjà complétés par d'autres cas tests thermomécaniques, stationnaires et transitoires, non présentés ici, montrent la pertinence du modèle hybride MAE–X-FEM pour la modélisation précise du comportement de structures intégrant des couches minces. Les erreurs obtenues par rapport à une solution FEM de référence demeurent faibles. Ce modèle permet en outre d'intégrer des comportements plus complexes (contraintes résiduelles, ...), voire même d'associer si besoin une modélisation fine du comportement de ces couches.

Les limitations du logiciel Matlab ne permettent pas d'espérer poursuivre les développements sous ce code pour des géométries complexes tridimensionnelles. Il est donc envisagé d'implémenter le modèle présenté sous un code de calcul généraliste (Abaqus). Par ailleurs, les travaux présentés doivent être étendus aux bords et à la prise en compte d'effets locaux : le couplage MAE–X-FEM demeure pertinent sous la condition d'enrichissements spécifiques différents au voisinage de ces bords.

References

- [1] J. Thabourey, C. Barlier, F. Bilteryst, M. Lazard, J.L. Batoz, Rapid laminated tooling in die casting: design, modeling and experimental tests, *Advances in Production Engineering and Management Journal* ISSN 1854-6250, under press.
- [2] C. Pelaingre, L. Velnom, C. Barlier, C. Levaillant, A cooling channels innovating design method for rapid tooling in thermoplastic injection molding, 1st conference on advanced research in virtual and rapid prototyping proceedings, 2003, Leiria, Portugal, ISBN : 972-99023-05.
- [3] J. Fish, Z. Yuan, Multiscale enrichment based on partition of unity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.62, 2005, pp. 1341-1359.
- [4] D. H. Nguyen, F. Bilteryst, M. Lazard, P. Lamesle, G. Dour, Coupling of the eXtended Finite Element Method and the matched asymptotic development in the modelling of brazed assembly, *International Journal of Material Forming*, Vol. 1, 2008, pp. 1119-1122.
- [5] D.H. Nguyen, M. Lazard, F. Bilteryst, P. Lamesle, G. Dour, Modelling the brazed assembly by the coupling of the eXtended Finite Element and the matched asymptotic development methods, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 2, 2008, pp. 321-331.
- [6] D. Leguillon, R. Abdelmoula, Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, 2000, pp. 2651-2672.
- [7] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, 1999, pp. 131-150.