Approche multi-échelle de la mécanique

N. DAHER

Institut FEMTO-ST, Université de Franche Comté, CNRS

Résumé :

Après un bref rappel de la procédure de Huygens en mécanique et de son extension conceptuelle, fondée par Leibniz sur la multiplicité des mondes possibles et celle des points de vue sur chaque monde (perspectivisme leibnizien), une formalisation générale de ces concepts, conduisant à une meilleure saisie de la mécanique, est présentée – et spécialement de la mécanique relativiste d'Einstein. Celle-ci s'exprime sous une forme arborescente où les diverses branches convergent (à l'approche du repos) vers un tronc commun correspondant à la mécanique de Newton. Cette arborescence est régie par une loi d'échelles multiples liant les branches, au nombre desquelles apparaissent sur trois branches singulières les trois points de vue associés à la vitesse, la célérité et la rapidité (développés au cours de l'histoire de la mécanique) : chacune d'elles reflète cette mécanique à une échelle différente. Alors que le perspectivisme physique introduit, de façon éparse et indépendamment les unes des autres, les différentes perspectives chacune exprimée par une modélisation spécifique, le perspectivisme leibnizien relève d'une théorisation rationnelle et relationnelle, associée à une « Structure Mère » qui donne naissance aux différentes perspectives et en fournit la raison d'être.

Abstract :

After a brief recall of Huygens's procedure in mechanics and its conceptual extension, founded by Leibniz on the multiplicity of possible worlds and that of points of view on each world (Leibnizian perspectivism), a general formalization of these concepts, leading to a better grasp of mechanics, is presented – and especially of Einsteinian relativistic mechanics. It is expressed under a treelike form where the different branches converge (in the vicinity of the rest state) towards a common trunk corresponding to Newtonian mechanics. This treelike form is governed by a multiple-scale law linking the branches, three singular ones revealing the three points of view associated with the velocity, the celerity and the rapidity (developed in the history of mechanics): each of them reflects this mechanics at a different scale. While the physical perspectivism introduces, in a dispersed way and independently of one another, the different perspectives each expressed by a specific modeling, the Leibnizian perspectivism corresponds to a rational and relational theorization, associated with a "Mother Structure" that gives birth to the different perspectives and provides their "raison d'être".

Mots clés : **mécanique, dynamique, principe de relativité, propriétés de conservation, caractères rationnel et relationnel, points de vue et échelles multiples.**

1 Introduction

Huygens et Leibniz avaient soulevé des objections sérieuses à la démarche newtonienne [1, 2], mais l'histoire des sciences a choisi : si les mathématiques au 18$^{\text{ième}}$ siècle sont leibniziennes, la physique est devenue newtonienne et l'est restée, abordant les problèmes par approximations successives, avec une construction (caractérisée par un certain arbitraire) de modèles confrontés ensuite à l'expérience. En dépit des succès extraordinaires de cette méthode et de la modélisation correspondante, elles ont fini par poser des problèmes tant physiques qu'épistémologiques [3-6]. Poursuivant l'ambition du « grand rationalisme » en science, Leibniz refusait, avec l'exigence de s'en tenir à la « raison suffisante », de s'embarquer dans un modèle ou d'accepter un choix contingent.
Au-delà de la remise en cause de choix considérés par Newton comme nécessaires, mis en forme par Einstein, la mécanique du 20$^{\text{ième}}$ siècle, en introduisant la rapidité et la célérité [4], a relativisé la nécessité de la vitesse. Cela actualise les réticences de Leibniz à considérer le problème de la mécanique de façon particulière au travers du seul point de vue spatio-temporel au travers de la vitesse comme (seule) caractéristique du mouvement. Leibniz, en effet, ne considérait comme essentielle que la prise en compte des propriétés de conservation, la vitesse (cinématique intimement liée à la structure de l'espace et du temps) n'étant qu'une simple manière d'être, une modalité d'existence parmi d'autres – certaines pouvant être purement dynamiques. Une telle distinction est corroborée par l'approche moderne de la mécanique avec certains acquis de la théorie des groupes utilisant la rapidité au lieu de la vitesse comme paramètre directeur pour exprimer le mouvement [5, 6]. On peut comprendre, a posteriori, la raison pour laquelle Leibniz n'a pas été suivi à son époque et ses exigences ont été occultées, puis oubliées : la mécanique d'Einstein et les autres façons de caractériser le mouvement étaient alors bien loin.
Nous allons voir qu'il est possible de répondre aux exigences leibniziennes et de contourner la construction de la mécanique partant d'un point de vue particulier sur le mouvement en gardant indéterminé, dans sa pluralité, le paramètre relatif à ce mouvement. On déterminera d'abord la relation fondamentale de la dynamique (essence de la mécanique – sa forme intrinsèque) liant entre elles les deux entités conservées (impulsion et énergie). Bénéficiant de sa forme et de sa symétrie, on déterminera alors simultanément et de façon relationnelle, de multiples modalités d'existence (formes extrinsèques) régies par une loi d'échelles-multiples, chaque modalité reflétant un point de vue particulier parmi lesquels vont apparaître ceux développés au cours de l'histoire de la mécanique. La généralité de l'approche conduit à d'autres mondes possibles que ceux associés aux mécaniques de Newton et Einstein, ce qui va nous amener à établir un lien succinct avec certaines approches récentes [7–10].
Les développements relatifs aux concepts sous-jacents et la déduction des structures mathématiques associées aux trois modélisations (formulation de Lagrange et Hamilton, méthode géométrique et approche par la théorie des groupes) sont fournis dans [11]. Ici l'accent va être mis sur la possibilité de construire une mécanique intrinsèque (hors point de vue), susceptible de s'auto-organiser : les différentes spécifications du mouvement que postulent les diverses modélisations et qui correspondent à des hypothèses superflues et non nécessaires vont pouvoir être déduites simultanément à partir de la théorisation au lieu d'être imposées a priori (source d'irrationalité).

2 Huygens, la conservation et le principe de relativité

Corrigeant des conclusions trop hâtives de Descartes, Huygens [2] a fait faire un grand pas à la dynamique en mettant en évidence, pour les chocs élastiques « frontaux », l'existence de deux quantités conservées. A partir de l'étude expérimentale, il a exprimé deux principes fondamentaux dans des conditions particulières (*Dans un espace plus large, ces conditions devront être encore remplies, même si d'autres aspects apparaitront naturellement : le moment cinétique...*).

Est affirmé que, les résultats de ce choc élastique sont déterminés : il y a donc deux quantités conservées dans un référentiel donné. Huygens reprend de Galilée l'énergie (ou force vive) et contrairement à Descartes, la quantité de mouvement algébrique.
Avec l'expression qu'il avait de l'énergie (proportionnelle à v^2), et sa loi de composition additive des vitesses, il met alors en évidence que, de la conservation de l'énergie dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre, on peut déduire la conservation de l'impulsion [2]. Si l'on adopte sa méthode en faisant tendre la vitesse relative (de translation) vers 0, l'expression de l'impulsion p se déduit alors de celle de l'énergie par une simple dérivation : $p = dE/dv$. Ainsi, la différenciation par rapport à la vitesse fait passer d'une quantité conservée à une autre.
La démarche de Huygens a disparu même de la mémoire des physiciens car, avec Lagrange et Hamilton, la relation de v à E et p peut s'exprimer par $v = dE/dp$ (après avoir opéré une transformation de Legendre sur : $H = vp - L$, $p = dL/dv$, $H \equiv E$ en mécanique). Si dans le cas newtonien cette relation est équivalente à $p = dE/dv$, ce ne sera plus le cas avec la dynamique d'Einstein. Cette réfutation du résultat de Huygens tient à ce que son raisonnement utilise, pour appliquer le principe de relativité, l'additivité dans la composition des vitesses, ce qui n'est plus valable dans le cas de la dynamique d'Einstein.

3 Extension leibnizienne de l'approche de Huygens

L'exigence de Leibniz de considérer la multiplicité potentiellement infinie de points de vue sur une réalité donnée permet de surmonter cette difficulté non seulement dans le cadre einsteinien, mais aussi pour toute autre dynamique qui pourrait advenir. Au lieu d'appliquer son raisonnement au seul paramétrage additif du mouvement, il convient de le paramétrer par l'ensemble infini $\{v_\mu\}$ en laissant ces v_μ indéterminés. La loi de composition, pour chaque choix, sera, au lieu de $v' = v + V$ qui correspondait, après passage à la limite de l'écriture du principe de relativité $[f(v') - f(v)]/V$, à la différenciation $dE/dv = df(v)/dv$, une loi de composition du type $v'_\mu = v_\mu \; T_\mu \; V_\mu$. Ainsi, l'opérateur d/dv va se transformer, pour chaque loi de composition T_μ, en l'opérateur O dont l'expression va donner : $I_\mu \, d/dv_\mu$, limite, quand V_μ tend vers 0, de $[f^\mu(v_\mu') - f^\mu(v_\mu)]/V_\mu$ avec $v_\mu' = v_\mu \; T_\mu \; V_\mu$ et $E = f^\mu(v_\mu)$ (les points de vue multiples et indéterminés exprimés au travers de l'opérateur multiple $O = I_\mu \, d/dv_\mu = I_\beta \, d/dv_\beta = \ldots$ remplacent le seul point de vue additif exprimé au travers du simple opérateur de dérivation d/dv). Les I_μ sont des fonctions des v_μ.
De la sorte, appliqué à l'énergie E – première quantité conservée – cet opérateur O, fournit une seconde quantité conservée $p = OE$.
Comme les applications successives de l'opérateur O fournissent à chaque fois une nouvelle entité conservée et comme le problème requiert deux entités conservées et seulement deux, il est nécessaire d'imposer une contrainte $M \equiv O^2E$ de manière à ne plus obtenir de nouvelles entités conservées. Avec les propriétés attachées aux lois de conservation, on est conduit à :

$$M \equiv O^2E = \lambda E + \gamma OE + \eta \qquad (1)$$

où λ, γ et η sont des constantes.

Ce résultat s'obtient en partant de la forme générale associée à une infinité potentielle de mondes possibles, fonction des deux entités conservées E et p = OE, M = F(E, p) = F(E, OE), à laquelle on impose la contrainte exprimant l'idée de conservation ($M_1 + M_2 = M_1' + M_2'$), ce qui réduit la forme générale à celle donnée en (1).

En utilisant (sans préciser les paramètres et les lois de composition) les définitions mises en œuvre, la forme de (1) qui correspond explicitement à : $M = I_\mu^2 d^2E/dv_\mu^2 + [I_\mu \, dI_\mu/dv_\mu] \, dE/dv_\mu = \lambda E + \gamma I_\mu dE/dv_\mu + \eta$ peut s'écrire autrement puisque compte tenu de $p = OE = I_\mu dE/dv_\mu$ on peut exprimer les opérateurs du premier et du deuxième ordre O et O^2 en fonction des entités conservées par :

$$O = I_\mu \, d/dv_\mu = p d/dE \quad (2)$$

$$O^2 = I_\mu{}^2 d^2/dv_\mu{}^2 + [I_\mu \, dI_\mu/dv_\mu] \, d/dv_\mu = p^2 d^2/dE^2 + (p dp/dE) d/dE \quad (3)$$

où l'on a utilisé la propriété suivante : $O = I_\mu \, d/dv_\mu = (I_\mu \, dE/dv_\mu) \, d/dE = p d/dE$
L'expression générale $I_\mu{}^2 d^2E/dv_\mu{}^2 + [I_\mu \, dI_\mu/dv_\mu] \, dE/dv_\mu$ (forme extrinsèque dépendante des points de vue v_μ) se réduit alors à $p dp/dE$ (forme intrinsèque indépendante de toute perspective). Cela correspond à une procédure de filtrage, les points de vue exprimés au travers des couples (I_μ, v_μ) étant éliminés au profit du seul couple (E, p). Le système d'équations différentielles sous-déterminées du second-ordre (1) se transforme en l'équation différentielle du premier-ordre déterminée liant E et p, indépendamment de tout point de vue :

$$M = p \, dp/d E = \lambda E + \gamma \, p + \eta \quad (4)$$

Apparaissent donc directement les dynamiques newtonienne et einsteinienne comme des cas doublement particuliers : $(\lambda, \gamma, \eta) = (0, 0, m)$ pour la dynamique newtonienne et $(\lambda, \gamma, \eta) = (1/c^2, 0, 0)$ pour la dynamique einsteinienne. Mais d'autres solutions proposées récemment apparaissent également comme des cas particuliers associés à $(\lambda, \gamma, \eta) = (\lambda, 0, \eta)$ et $(\lambda, \gamma, \eta) = (\lambda, \gamma, 0)$. Le premier cas correspond aux approches fournies par le programme de recherche appelé : « doubly special relativity » [7, 8] et le deuxième correspond à la déformation du caractère hyperbolique de la dynamique einsteinienne au travers de la géométrie pseudo-finslerienne [9, 10].

Le passage à trois dimensions peut se faire avec : $M = \mathbf{p}.d\mathbf{p}/d E = \lambda E + \boldsymbol{\gamma}.\mathbf{p} + \eta$

Ayant ainsi éliminé tout ce qui relève des points de vue attachés aux couples (I_μ, v_μ) présents dans l'opérateur O, on peut déduire l'ensemble des équations fondamentales des dynamiques possibles (dont les dynamiques newtonienne et einsteinienne $M = m$ et $M = E/c^2$ qui vont nous intéresser ici et pour lesquelles différentes méthodes ont été développées) sans avoir, au préalable, spécifié le mouvement, soit

$$M = O^2E = Op = p \, dp/dE = m > 0 \qquad \text{(Huygens-Newton)} \quad (5)$$

$$M = O^2E = Op = p \, dp/dE = E/c^2 > 0 \qquad \text{(Poincaré-Einstein)} \quad (6)$$

4 paramétrages du mouvement

Nous avons obtenu ce qu'on peut appeler l'essence des deux dynamiques. Leurs modalités d'existence, vont être déterminées par l'information fournie par cette essence d'une part, et d'autre part, comme on va le voir, par une information complémentaire qui va permettre de découpler la structure sous-déterminée.

Pour déterminer les modalités d'existence (ou les points de vue) adaptées à ces dynamiques, on découple la structure générale avec une sorte de séparation de variables. Au sein de l'ensemble potentiellement infini de points de vue, il en existe un (μ = d : pour découplage) qui rend la structure découplée et c'est ce point de vue qu'on prendra comme point de vue de référence (ou élément de base) pour les autres.

La procédure de filtrage a fourni : $M = p \, dp/dE$; pour renouer avec la forme faisant apparaître les points de vue, il suffit de remplacer la forme intrinsèque de l'opérateur $O = p d/dE$ par la forme équivalente extrinsèque $O = I_d \, d/dv_d$ considérant parmi la multiplicité illimitée de points de vue celle déduite par découplage (μ = d) de la structure extrinsèque de la dynamique. On écrit donc :

$$M = p \, dp/dE = I_d \, dp/dv_d \quad \Rightarrow dp/dv_d = M/I_d \quad (7)$$

Cela suggère d'identifier le rapport M/I_d à une constante C, soit $M/I_d = C$. Une simple analyse dimensionnelle montre que C a la dimension d'une masse, ce qu'on traduit par $C = m$, obtenant : $I_d = M/m = 1$, pour Huygens-Newton et $I_d = M/m = E/mc^2$ pour Poincaré-Einstein d'après (5) et (6). En procédant ainsi, nous séparons les différentes entités variables p, v_d, M, I_d ce qui mène à une solution parmi une infinité d'autres qui vont se greffer sur celle-ci de façon naturelle.

La combinaison des procédures de découplage ($I_d = M/m$) et de filtrage [$M = c^2\, p\, dp/dM > 0$ (Poincaré-Einstein) et $M = m > 0$ (Huygens-Newton)] conduit à

$$I_d = M/m = [1 + p^2/m^2c^2]^{1/2} > 1, \text{ pour } p \neq 0 \qquad \text{(Poincaré-Einstein)} \qquad (8)$$

$$I_d = M/m = 1 \qquad \text{(Huygens-Newton)} \qquad (9)$$

Ceci permet d'introduire une relation d'ordre infiniment multiple, liant les I_μ au point de vue de référence I_d au travers du rapport M/m qui vérifie d'après (8) et (9) :

$$(M/m)^\delta \geq M/m \geq (M/m)^\eta, \text{ avec } \delta \geq 1 \text{ et } \eta \leq 1 \qquad (10)$$

On obtient ainsi la structure de la mécanique sous de multiples échelles dès lors qu'on pose :

$$I_\mu = (I_d)^{1+d-\mu} = (M/m)^{1+d-\mu} \qquad (11)$$

retrouvant, en particulier, la valeur de I_d pour $\mu = d$. Ceci conduit à une multiplicité illimitée de solutions reflétant chacune une modalité d'existence ou un point de vue particulier. Même si les valeurs des exposants peuvent être quelconques, le développement des points de vue montre que seules quelques valeurs entières s'avèrent être opérationnelles, fournissant des propriétés mathématiques remarquables dont celles postulées par les différentes modélisations.

Les systèmes différentiels newtonien et einsteinien associés à des infinités de modalités d'existence (ou points de vue) conduisent ainsi à :

$$M = O^2E = I_\mu^2 d^2E/dv_\mu^2 + [I_\mu\, dI_\mu/dv_\mu]\, dE/dv_\mu = I_\mu^2 d^2E/dv_\mu^2 + [I_\mu\, dI_\mu/dE]\, (dE/dv_\mu)^2 \qquad (12)$$

avec

$$M = m \text{ et } I_\mu = (1)^{1+d-\mu} = 1 \qquad \text{(Huygens-Newton)} \qquad (13)$$

$$M = E/c^2 \text{ et } I_\mu = (E/mc^2)^{1+d-\mu} \qquad \text{(Poincaré-Einstein)} \qquad (14)$$

Tout devient bien déterminé dès lors qu'on précise les conditions aux limites, soit :

$$p = 0,\ E = E_0 = mc^2,\ v_\mu = 0\ \forall\mu. \qquad (15)$$

En laissant la théorie générale s'auto-organiser et se structurer de l'intérieur, au lieu de lui imposer des postulats externes et contraignants, on acquiert une rationalité supérieure : les points de vue individuels trouvent alors leur source dans la « Structure Mère » (12), reliant une infinité de points de vue dont quatre basiques, singuliers et opérationnels (non explicités ici), les autres n'étant que des combinaisons plus ou moins compliquées des quatre points de vue de base. Les trois points de vue usuels – qui se confondent (dégénérescence) dans la mécanique de Newton et Huygens – correspondent dans le cadre einsteinien à v_d , v_{d+1} et v_{d+3} appelées respectivement célérité, rapidité et vitesse. Ces trois perspectives ont été abordées par de multiples modélisations dont trois rationnelles (rationalités partielles) mathématiquement identifiables : la méthode géométrique, l'approche par la théorie des groupes et la formulation de Lagrange et Hamilton (déduites dans [11] de la présente théorisation). Il est possible de profiter de cette approche pour résoudre diverses questions ouvertes avec de multiples conséquences épistémologiques et physiques.

5 Conclusion

Inspirée par les critiques leibniziennes avec deux sortes de multiplicité (celle des mondes possibles et celle des points de vue sur chaque monde), cette formalisation générale de la mécanique se révèle efficace et fructueuse tant pour l'explication (déduction rationnelle et relationnelle de ce qui est postulé individuellement et a priori : source d'irrationalité) que pour l'exploration (mise en évidence de nouvelles dynamiques compatibles avec le principe de relativité et les propriétés de conservation). Cette approche montre que la mécanique einsteinienne prend la forme d'une structure infiniment arborescente incluant les trois branches singulières qui correspondent à ce qui fut développé au cours de l'histoire. Elle fait apparaître aussi la dynamique einsteinienne comme un cas particulier parmi d'autres dynamiques bien déterminées – la détermination est rendue possible grâce aux contraintes imposées par les propriétés de conservation. Cette démarche conduit, d'une part, à des prolongements naturels de la dynamique d'Einstein et à des liens avec de récents développements relatifs à deux programmes de recherche, le premier correspondant au cadre appelé : « doubly special relativity » [7, 8] et le second relevant de la géométrie où l'on déforme le caractère hyperbolique de la mécanique einsteinienne en utilisant la géométrie de Finsler [9, 10]. D'autre part, elle fournit une ligne de démarcation entre les prolongements libres purement mathématiques (extension à de nouvelles géométries, formulations faibles attachées au formalisme de Lagrange et Hamilton…) et ceux contraints par les deux pierres angulaires de la physique que sont les principes de conservation et de relativité.

Remerciements : Je voudrais remercier les membres du groupe « Epiphymaths » pour leurs critiques et remarques constructives qui ont permis à cette démarche de progresser et de s'affiner au cours des années et particulièrement J. Merker qui m'a donné l'envie d'approfondir la mécanique dans ses dimensions formelle et conceptuelle. Je tiens aussi à remercier C. A. Risset pour son aide précieuse tant pour les multiples discussions échangées que pour sa lecture attentive et ses corrections.

References

[1] M. Jammer, Concepts of space, The history of theories of space in physics. Second Edition,Harvard university press, Cambridge, Massachusetts.
[2] J. Barbour, Absolute or relative motion?, The discovery of dynamics. Vol 1, Cambridge university press.(2001).
[3] L. Smolin, Rien ne va plus en physique!, Dunod, Paris, (2007)
[4] J.M. Lévy-Leblond, Speed(s) Am. J. Phys. 48(5), May (1980).
[5] J.M. Lévy-Leblond, What is so « special » about relativity? Lectures notes in physics, in group theoretical methods in physics, Lectures notes in physics, vol 50 (Springer Verlag, 1976)
[6] C. Comte, Langevin et la dynamique relativiste. In Epistémologiques, V 01.2, 1-2, EDP Sciences, Paris, (2002).
[7] J. Magueijo and L. Smolin, Lorentz invariant with an energy scale, Phys. Rev. Lett. **88** (19), 190403, May 2002.
[8] F. Hinterleitner, Canonical doubly special relativity theory, Phys. Rev. D **71**, 025016 Jan. 2005.
[9] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation. Physics Letters A (2004) 40-47.
[10] E. Minguzzi, Relativity principles on 1+1 dimensions and differential aging reversal. arXiv:physics/0412010v2 [physics.class-ph] 10 Feb 2006.
[11] N. Daher, Objectivité, Rationalité et Relativité Scientifiques. Le cas de la Dynamique, dans Annales Françaises des Microtechniques et de Chronométrie, vol. 79, n°58, 2009, pp 78–95.