

# Optimisation du couplage traction torsion dans une plaque stratifiée

D. Reveillon<sup>a</sup>, V. Placet<sup>a</sup>, C. Garcin<sup>a</sup>, S. Carbillet<sup>a</sup>, L. Boubakar<sup>a</sup>

a. Institut FEMTO-ST, Départ. Méc'Appli, 24 rue de l'Épitahe, 25030 BESANCON

## Résumé :

Les matériaux composites permettent de personnaliser la réponse d'une structure vis à vis des sollicitations. En vue d'exhiber un couplage traction/torsion très fort sur une plaque rectangulaire, l'optimisation du séquençage d'un stratifié a été menée en exploitant un modèle analytique de plaque prenant en compte les non-linéarités géométriques. Une bonne corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux a permis de valider la loi de comportement atypique du stratifié obtenu.

## Abstract :

Composite materials allows to tailor structural responses according to loads. In order to expose a strong extension/twist coupling on a rectangular plate, an optimization of the ply sequencing of a laminate has been done using an analytical plate model taking into account geometrical non-linearities. An accurate agreement between numerical and experimental data validates the behavior shown by this plate.

**Mots clefs :** couplage traction-torsion, plaque stratifiée, optimisation

## 1 Introduction

Le couplage traction-torsion, déjà étudié dans la littérature [1], est un phénomène qui est rendu possible grâce à deux propriétés d'une plaque stratifiée composite. La forte anisotropie présente dans certains matériaux composites permet de rendre sensible le comportement d'une structure par rapport à la direction de sollicitation. Ceci permet dans un assemblage stratifié de combiner des déformations planes qui peuvent induire des déplacements hors du plan de la plaque. On comprend dans la figure 1 que l'action d'une contrainte  $\sigma_{xx}$  permet de générer deux cisaillements opposés grâce à une répartition anti-symétrique des angles. Cette disposition des cisaillements induit un champ de déplacement assimilable à une rotation.

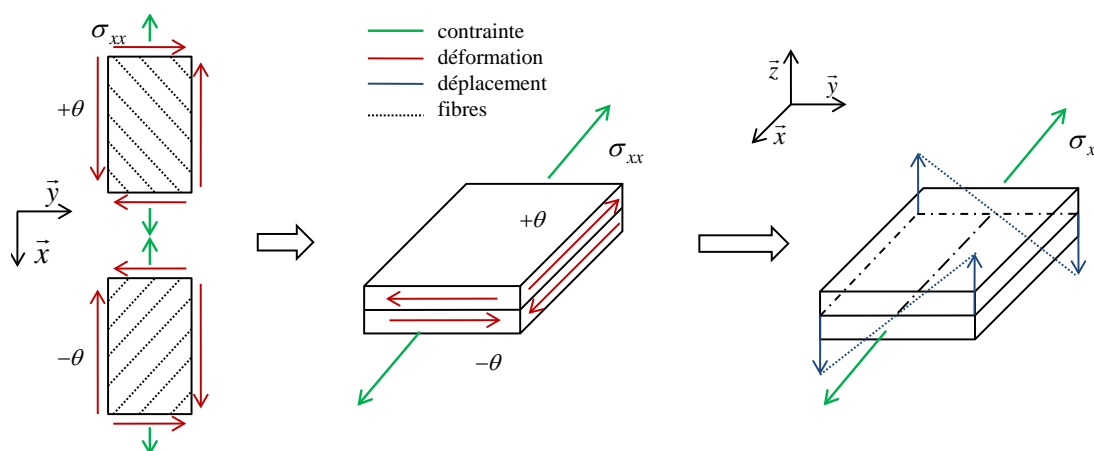


FIG. 1 – Couplage traction-torsion

## 2 Modélisation du phénomène de traction-torsion

Le modèle suivant se base sur la "Classical Laminate Theory" (CLT [2] et [4]) pour prédire la rotation des sections droites dans un stratifié avec l'hypothèse de Kirchhoff-Love qui néglige les cisaillements transverses. L'estimation du vrillage nécessite une description des efforts qui dépend de la géométrie (grands déplacements). En effet, plus la plaque est vrillée plus celle-ci tend à reprendre sa forme plane quand elle est soumise à une force de traction. Ceci s'explique car la répartition locale de l'effort de traction n'est pas uniquement membranaire. Ce phénomène peut être qualifié de non-linéaire géométrique. On suppose que le vrillage est constant dans l'envergure de la plaque, ce qui est corroboré par des simulations éléments finis. Cette approximation nous permet de définir un paramétrage simple de la plaque (figure 2).

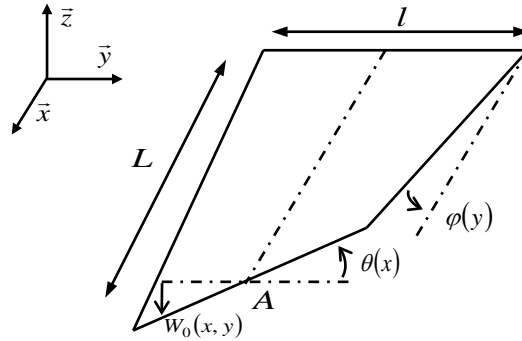


FIG. 2 – Paramétrage de la plaque

La relation entre les courbures et les déplacements hors plan est donnée par l'équation 1. Ce déplacement transverse se décompose usuellement en deux composantes de flexions et une de torsion. Dans notre cas, les conditions limites, les symétries et les efforts réduisent ce déplacement à la seule rotation. Les équations 2 et 3 relient directement la déformation  $k_{xy}$  aux rotations  $\theta$  et  $\phi$ .

$$W_0(x, y) = \frac{-k_{xy}}{2}xy - \frac{k_x}{2}x^2 - \frac{k_y}{2}y^2 + C_1x + C_2y + C_3 \quad \Rightarrow \quad W_0(x, y) = \frac{-k_{xy}}{2}xy \quad (1)$$

$$\theta(x) = \arcsin\left(\frac{\partial W_0(x, y)}{\partial y}\right) \approx \frac{-k_{xy}}{2}x \quad (2)$$

$$\phi(y) = \arcsin\left(\frac{-\partial W_0(x, y)}{\partial x}\right) = \arcsin\left(\frac{k_{xy}}{2}y\right) \quad (3)$$

On présente en figure 3 différentes coupes de la plaque, qui permettent de discerner l'action de  $F\vec{x}$  suivant la courbure de la plaque. Cette force se dissocie en  $\vec{F}_T$  qui agit sur le comportement en membrane de la plaque et  $\vec{F}_R$  qui agit sur le comportement en flexion.

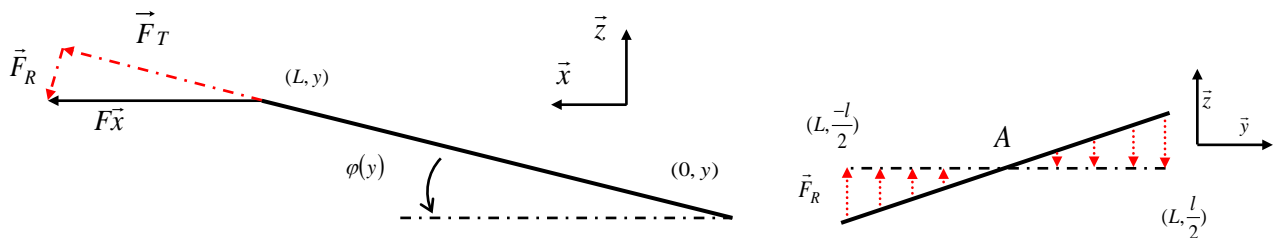


FIG. 3 – Différentes vues de l'application de  $F\vec{x}$  sur la plaque

L'expression des deux composantes de cet effort  $F\vec{x}$  (éq. 4 et 5) à l'extrémité de la plaque suivant le repère local, permet de calculer le moment de torsion  $M_R$  suivant  $\vec{x}$  (éq. 6).

$$dF_R(y) = \frac{Fdy}{l} \sin(\phi(y)) = \frac{-Fk_{xy}}{2l} y dy \quad (4)$$

$$dF_T(y) = \frac{Fdy}{l} \cos(\phi(y)) \approx \frac{-F}{l} dy \quad (5)$$

$$\overrightarrow{M_R\vec{x}} = \left( \int \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F_R(M)} \right) \cdot \vec{x} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y F_R dy = \frac{-Fk_{xy}}{2l} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{-Fk_{xy}l^2}{24} \quad (6)$$

La CLT permet de relier les déformations et courbures aux efforts et flexions généralisés, ce qui permet d'extraire la relation 7. Ensuite, la rotation peut être exprimée en fonction des différents paramètres initiaux (éq. 8).

$$k_{xy} = k_{xy}^0 + B_{16}^{-1} N_x - D_{66}^{-1} M_{xy} = k_{xy}^0 + B_{16}^{-1} \frac{F}{l} + D_{66}^{-1} \frac{M_R}{2l} = k_{xy}^0 + F \left( \frac{B_{16}^{-1}}{l} - \frac{D_{66}^{-1} k_{xy} l}{48} \right) \quad (7)$$

La relation ainsi posée prend en compte la non-linéarité géométrique issue des grands déplacements induits par une rotation, on peut retrouver la formulation dite linéaire (éq. 9) en faisant tendre  $D_{66}^{-1}$  vers 0, ce qui revient à rigidifier la plaque en torsion.

$$k_{xy} = \frac{\frac{B_{16}^{-1} F}{l} + k_{xy}^0}{1 + \frac{D_{66}^{-1} Fl}{48}} \Rightarrow \theta(x) = \arcsin \left( \frac{\frac{B_{16}^{-1} F}{l} + k_{xy}^0}{1 + \frac{D_{66}^{-1} Fl}{48}} x \right) \approx \frac{\frac{B_{16}^{-1} F}{l} + k_{xy}^0}{1 + \frac{D_{66}^{-1} Fl}{48}} x \quad (8)$$

$$k_{xy} = k_{xy}^0 + B_{16}^{-1} N_x = k_{xy}^0 + B_{16}^{-1} \frac{F}{l} \Rightarrow \theta(x) = \arcsin \left( \left( k_{xy}^0 + B_{16}^{-1} \frac{F}{l} \right) x \right) \approx \left( k_{xy}^0 + B_{16}^{-1} \frac{F}{l} \right) x \quad (9)$$

### 3 Optimisation

Le but de cette optimisation est d'obtenir un stratifié de matériaux composites qui puisse être facilement testé sur une machine de traction et donc qui exhibe une rotation importante et une bonne résistance statique.

#### 3.1 Paramètres

Les paramètres d'entrée de cette optimisation sont les angles, les épaisseurs et les matériaux constituant les différentes couches du stratifié. La répartition des couches est supposée antisymétrique pour les orientations et symétrique pour les autres paramètres. Ceci permet d'une part de simplifier la relation entre efforts et déformations de la plaque en annulant certains termes de couplages qui peuvent s'avérer gênant, mais aussi de diviser par deux le nombre de paramètres à optimiser.

#### 3.2 Fonctionnelle d'erreur

La fonctionnelle d'erreur  $f$  (éq. 10) comporte deux composantes différentes. La première est la rotation induite par une force de traction fixée. La seconde composante de la fonction permet d'assurer la résistance du stratifié en fixant la quantité sur tous les plis du critère de Hill-Tsai. L'optimisation consiste à chercher des couples de paramètres  $x_i$  qui minimise la fonction  $f$ .  $\theta_{obj}$  et  $\sigma_{obj}^{HT}$  sont des valeurs cibles d'angle de rotation et de critère de Hill-Tsai. Dans la pratique, ce sont les paramètres  $a_\theta$  et  $a_\sigma$  qui sont les plus difficiles à régler, car ce sont eux qui permettent de pondérer l'importance

et la forme de chaque composante de la fonction erreur. La fonction exponentielle permet, en accord avec la valeur des  $a_i$ , de faire référence soit à un objectif, soit à une contrainte.

$$f(X) = e^{a_\theta(\theta(X) - \theta_{obj})} + \sum_{i=1}^n e^{a_{\sigma_{HT}}(\sigma_i^{HT}(X) - \sigma_{obj}^{HT})} \quad (10)$$

### 3.3 Description de la démarche d'optimisation

Comme le montre la figure 4, on commence par appliquer un algorithme génétique qui permet de sonder globalement l'espace des paramètres d'entrée. A la suite de celui-ci, un algorithme de gradient basé sur une évaluation par différence finie des dérivées partielles de la fonction  $f$  par rapport aux paramètres est utilisé. Ceci permet de faire converger localement un individu par rapport à  $f$ . D'autres méthodes pourraient remplacer l'algorithme génétique, telle que la méthode de Monte Carlo qui effectue des tirages aléatoires des différents paramètres, ou encore une discrétisation complète de l'espace des paramètres, ces deux méthodes étant dans notre cas moins efficaces en raison du nombre important de paramètres.

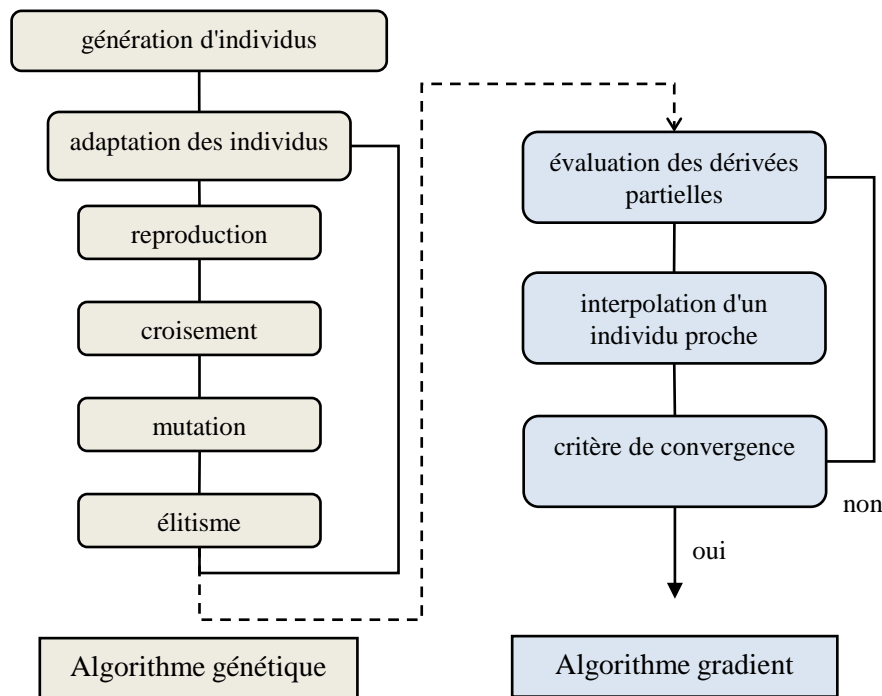


FIG. 4 – Stratégie d'optimisation

#### 3.3.1 Algorithme génétique

La fonction d'adaptation d'un individu correspond à l'inverse de la fonctionnelle d'erreur et permet d'utiliser les différents opérateurs qui suivent. L'opérateur de reproduction recopie dans une nouvelle famille les individus de la précédente famille en fonction de leurs adaptations. Le croisement est un opérateur qui choisit aléatoirement un couple d'individus pour créer deux individus dont les paramètres sont des combinaisons du premier couple. La mutation modifie aléatoirement la valeur d'un paramètre d'un individu avec la probabilité  $p_m$ . L'élitisme permet quant à lui de recopier intégralement sans modification un ou plusieurs individus très évolués de la famille précédente. L'application itérative de ces différents opérateurs sur une famille aléatoire initiale permet d'améliorer au vu de la fonction objective les individus qui la composent. La programmation initiale de cet algorithme a été effectuée par F. Richard [3] sous Matlab.

### 3.3.2 Algorithme gradient

Les dérivées partielles de la fonction  $f$  par rapport aux paramètres d'entrée donnent accès à la direction d'amélioration d'un individu donné dans l'espace des paramètres. Cette fonction n'étant pas explicitement définie, on évalue ces dérivées partielles par différences finies (éq. 11).

$$\left. \frac{\partial f(X)}{\partial X_i} \right|_X = \frac{f(X_1, X_2, \dots, X_i + \Delta X_i, \dots, X_{n-1}, X_n) - f(X)}{\Delta X_i} \quad (11)$$

L'interpolation des nouveaux paramètres grâce aux dérivées partielles (éq. 12) est délicate. Le plus sûr est de se servir uniquement du signe de celles-ci pour interpoler les paramètres  $X'_i$  caractérisant le nouvel individu. Le paramètre  $p$  permet de régler la finesse de l'avance des itérations, il est possible de choisir un  $p_i$  différent pour chaque paramètre. Les  $X_i^{min,max}$  correspondent aux bornes de l'espace des paramètres choisies au début de l'optimisation.

$$X'_i = X_i - p(X_i^{max} - X_i^{min}) \operatorname{sgn} \left( \left. \frac{\partial f(X)}{\partial X_i} \right|_X \right) \quad (12)$$

Si le nouveau pas effectué n'a pas amélioré l'individu obtenu lors de l'étape précédente ( $f(X') > f(X)$ ), on peut soit arrêter le calcul et se contenter de  $X$  ou diminuer astucieusement  $p$ .

### 3.3.3 Résultats

L'application de cette stratégie d'optimisation a permis de trouver des paramètres optimaux (par rapport à la fonction objectif  $f$ ) de séquençage de plis qui permettraient de montrer un fort couplage traction-torsion. Les résultats (figure 5) très encourageants de l'optimisation ont permis de commencer la fabrication des plaques.

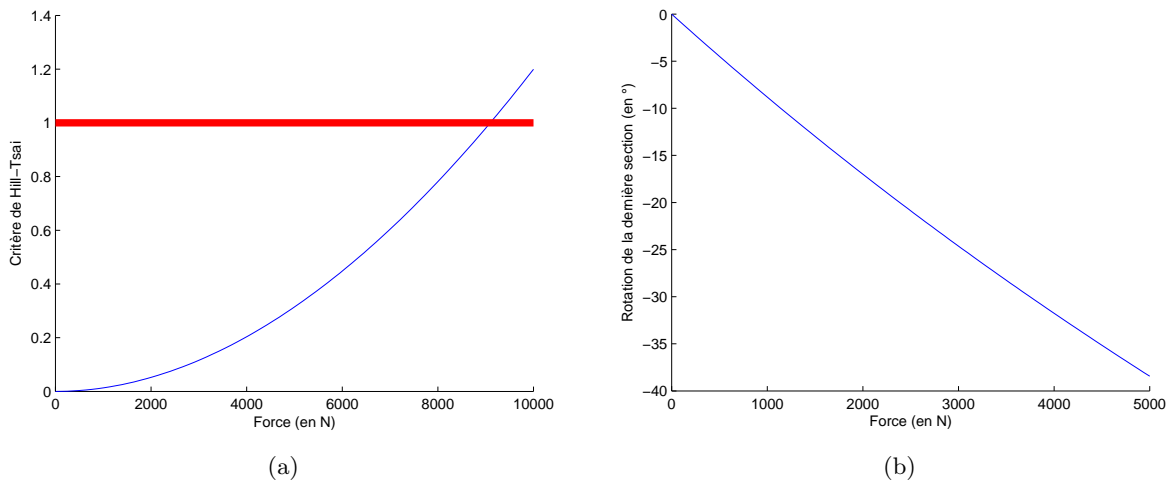


FIG. 5 – Extraits des résultats d'une optimisation : évolution du critère de Hill-Tsai (a) et de la rotation (b) en fonction de la force appliquée

## 4 Corrélation essais/simulations

Une configuration optimale du stratifié a été réalisée afin de comparer les résultats numériques face à la réalité d'un essai expérimental. La dimension des éprouvettes testées est de  $530 \times 30 \times 2 \text{ mm}^3$ . On remarque sur la figure 6, que les deux formulations prenant en compte ou non la non-linéarité géométrique (NLG), se corrént bien avec les résultats expérimentaux. On notera également que sur la plage explorée la non proportionnalité en effort se voit très peu.

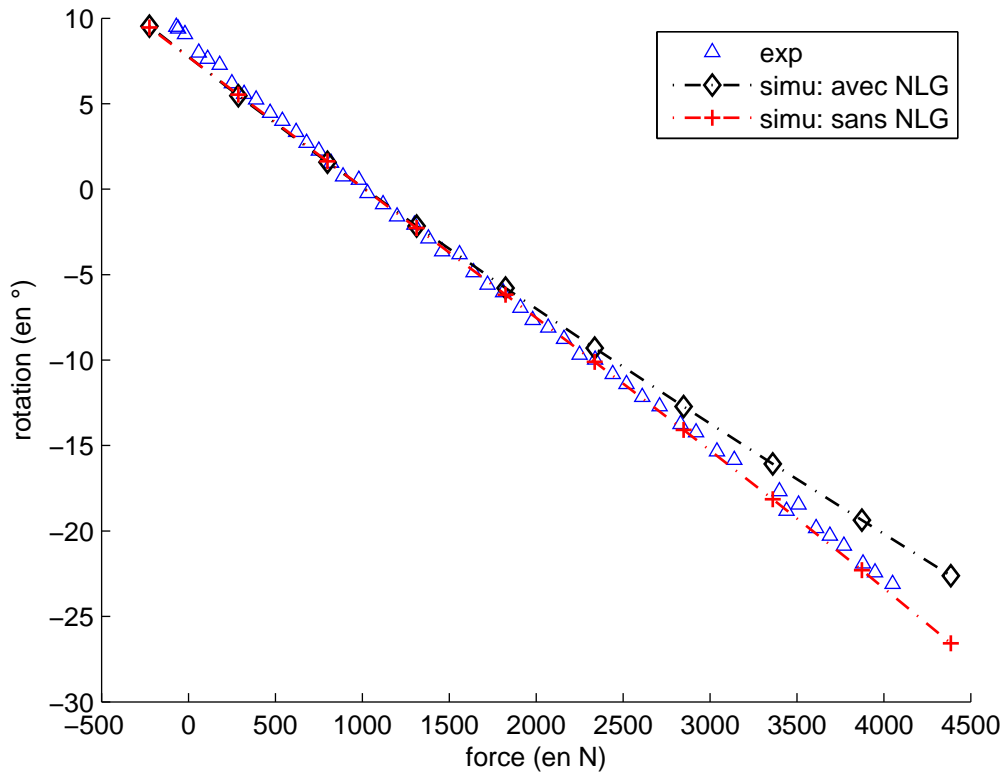


FIG. 6 – Rotation en fonction de la force

## 5 Conclusions

Une modélisation simple du phénomène de couplage traction-torsion dans un composite stratifié qui explicite la rotation induite par une force de traction a permis d'effectuer une optimisation de l'empilement pour rendre la rotation observable avec les moyens de mesure disponibles, la rotation linéique atteinte étant de  $70^\circ \cdot \text{m}^{-1}$ . Les comparaisons effectuées entre simulations et expériences ont permis de valider la loi reliant la force appliquée à la rotation. Il serait néanmoins intéressant par la suite d'optimiser le stratifié de façon à augmenter l'écart entre les deux formulations, pour ainsi valider la formulation la plus proche de la réalité.

## Références

- [1] E.A. Armanios, A. Makeev, and D. Hooke. Finite-displacement analysis of laminated composite strips with extension-twist coupling. *Journal of Aerospace Engineering*, pages 80–91, jul 1996.
- [2] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermes, 4 édition, 1997.
- [3] F. Richard. *Identification du comportement et évaluation de la fiabilité des composites stratifiés*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1999.
- [4] G. H. Staab. *Laminar composites*. Butterworth Heinemann, 1999.