

Modélisation du contact normal et tangentiel entre deux matériaux anisotropes

C. BAGAULT, D. NELIAS, M.-C. BAIETTO

Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, 69621 Villeurbanne Cedex, France

Résumé :

Un modèle de contact basé sur des méthodes semi analytiques, s'appuyant sur des solutions analytiques élémentaires, a été développé. Il repose sur des techniques numériques adaptées aux contacts mécaniques inélastiques, inhomogènes ou anisotropes. L'objectif de récents développements est de quantifier les champs de déplacements et de contraintes d'un matériau élastique anisotrope, en contact avec un second matériau rigide ou élastique. Il est intéressant d'observer l'influence des directions privilégiées d'un matériau ainsi que celle de leur orientation.

Abstract :

A contact model using semi analytic methods, relying on elementary analytic solutions, has been developed. It is based on numeric techniques adapted to contact mechanics, with strong potential for inelastic, inhomogeneous or anisotropic problems. Recent developments aim to quantify displacements and stresses of an anisotropic material which is in contact with another rigid or elastic material. The influence of symmetry axes on the contact problem solution will be more specifically analyzed.

Mots clefs : anisotrope, contact, méthode semi analytique

1 Introduction

L'objectif industriel est de créer des modèles de plus en plus fidèle à la réalité. Cela entraîne une restriction des hypothèses simplificatrices, ou en d'autres termes l'implémentation de plus de physique dans la modélisation. Pour y parvenir, il est nécessaire de prendre en compte précisément les propriétés des matériaux utilisés. L'hypothèse que le matériau est isotrope n'est donc plus suffisante. En effet, de part leur fabrication ou leur composition, un matériau peut posséder une voire deux directions privilégiées ou encore être totalement anisotrope. L'influence de l'anisotropie doit être prise en compte pour une meilleure prédiction de l'état de contraintes, et ainsi permettre une meilleure optimisation de la durée de vie des composants [1][2].

Plusieurs méthodes peuvent être mises en place pour calculer le contact entre deux matériaux anisotropes. Bien que celle des Eléments Finis donne des résultats très satisfaisants, le temps de calcul devient vite prohibitif à mesure que le maillage est raffiné. Les méthodes semi analytiques, quant à elles, ont fait leurs preuves et ont l'avantage de palier à de nombreux inconvénients liés aux Eléments Finis lors du calcul d'un contact entre deux surfaces considérées comme semi infinies. Il est alors possible de calculer un contact élastique entre deux matériaux isotropes ou anisotropes en un temps raisonnable.

Le modèle de contact, avec ses spécificités lorsqu'au moins un des matériaux en contact a un comportement anisotrope, sera présenté en premier. L'influence de quelques paramètres, sur la distribution de la pression de contact et sur les champs de contraintes, sera ensuite étudiée. Enfin, l'effet de l'orientation de l'anisotropie sur la solution de contact sera abordé.

2 Résolution du contact

Le code de contact développé est dit semi analytique. Il s'agit d'une sommation numérique de solutions analytiques d'un problème élémentaire, alors que la méthode des éléments de frontière (BEM) utilise une formulation sous forme d'intégrales [3][4]. Une des difficultés est la dérivation ou l'identification de ces

solutions élémentaires analytiques, qui sont très bien connues en isotropie élastique avec les solutions de Boussinesq et Cerruti [5]. La structure est simplifiée en supposant un contact entre deux massifs élastiques semi infinis. Des solutions analytiques donnant les contributions élémentaires de chargements normaux et tangentiels constants sur une surface rectangulaire sont utilisées pour obtenir par sommation les déplacements élastiques de la surface chargée.

Les déplacements élastiques sont exprimés par un double produit de convolution discret entre des coefficients d'influence et les pressions et cisaillement dans le contact. Le problème normal et le problème tangentiels en glissement total ou en glissement partiel sont alors résolus.

La résolution se fait par minimisation de l'énergie complémentaire. Un algorithme d'optimisation sous contraintes est mis en place notamment à partir d'une méthode du gradient conjugué. Pour accélérer les calculs, les transformées de Fourier rapide (FFT) sont utilisées pour effectuer le double produit de convolution.

Après avoir résolu le problème de contact, les contraintes en sous couche peuvent être calculées. Le code est validé à partir de comparaisons avec des solutions analytiques de la littérature pour des géométries simples [6].

3 Anisotropie du matériau

Les matériaux anisotropes sont définis par le tenseur de raideur élastique C_{ijkl} , qui vérifie les relations de symétrie $C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{klij}$. Il relie les contraintes aux déformations par la relation suivante

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}.$$

Les matériaux peuvent être divisés en trois catégories : cubique, orthotrope et anisotrope.

Pour un matériau cubique, trois paramètres suffisent à définir la matrice : E le module d'Young, G le module de cisaillement et ν le coefficient de Poisson.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & & & \\ & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & & & \\ & & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix}$$

Pour un matériau orthotrope, neuf paramètres sont nécessaires : E_1, E_2, E_3 les modules d'Young suivant les trois directions principales, G_{12}, G_{23} et G_{31} les modules de cisaillement et ν_{12}, ν_{23} et ν_{31} les coefficients de Poisson.

$$C = \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})\Delta & E_1(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})\Delta & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})\Delta & & & \\ & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})\Delta & E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})\Delta & & & \\ & & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})\Delta & & & \\ & & & G_{12} & & \\ & & & & G_{23} & \\ & & & & & G_{31} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}} \text{ et } \frac{\nu_{NM}}{E_N} = \frac{\nu_{MN}}{E_M}.$$

Pour un matériau anisotrope, la matrice de raideur élastique est définie par vingt et un coefficients.

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix}$$

Lorsque les orientations des directions principales du matériau ne coïncident pas avec le repère lié au contact, un changement de base doit être effectué.

4 Coefficients d'influence

Les coefficients d'influence qui relient l'effort aux déplacements ou aux contraintes, pour un matériau anisotrope, sont obtenus avec les fonctions de Green [7][8]. Celles-ci peuvent être décrites explicitement dans le domaine de Fourier, alors qu'il est plus difficile d'obtenir leur formulation dans le domaine physique, dû à l'anisotropie du matériau. On travaille alors dans le domaine de Fourier.

On considère un massif semi infini élastique anisotrope, auquel on applique une force ponctuelle normale ou tangentielle. En l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre en déplacement s'écrivent

$$C_{ijkl} \cdot u_{k,lj} = 0.$$

Trois matrices 3×3 sont définies à partir du tenseur C_{ijkl} et des vecteurs n et m , qui forment un trièdre direct avec le vecteur position x .

$$Q_{ik} = C_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l, \quad R_{ik} = C_{ijkl} \cdot n_j \cdot m_l, \quad T_{ik} = C_{ijkl} \cdot m_j \cdot m_l.$$

Six valeurs propres p , complexes et distinctes, deux à deux conjuguées, sont obtenues en calculant les racines de

$$\det(Q + p \cdot (R + R^T) + p^2 \cdot T) = 0.$$

Les vecteurs propres complexes a de l'équation (1) sont alors non triviaux. Les vecteurs propres b en sont déduits par l'équation (2).

$$[Q + p \cdot (R + R^T) + p^2 \cdot T] \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$b = (R^T + p \cdot T) \cdot a \quad (2)$$

Les vecteurs a et b sont les vecteurs propres de Stroh et p les valeurs propres de Stroh [9][10]. Les fonctions de Green sont alors une superposition de combinaisons linéaires de ces six solutions. Les déplacements et contraintes obtenus sont bien des nombres réels. Une des difficultés réside dans le calcul des racines complexes de l'équation de degré six, ainsi que celui des vecteurs propres complexes.

5 Applications

Le contact entre un massif semi infini élastique anisotrope et un indenteur sphérique rigide est étudié. La profondeur est représentée par la direction 3, et la surface est définie par les directions 1 et 2. Dans cet exemple, les propriétés du matériau sont celles d'un matériau isotrope à l'exception de l'une d'entre elles (E_1 ou E_3).

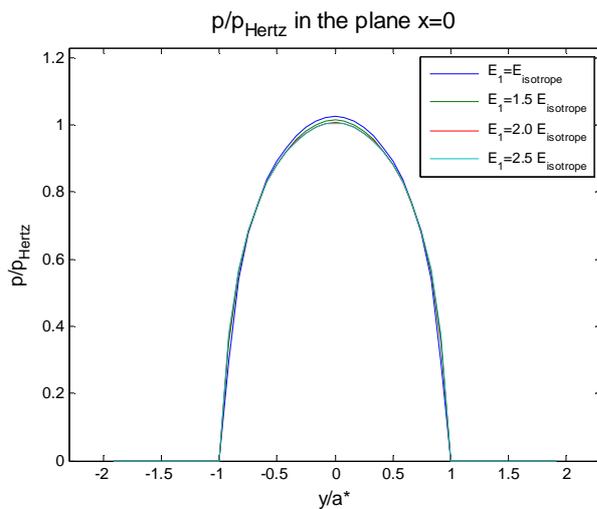


Figure 1 : Influence de E_1 sur la pression de contact

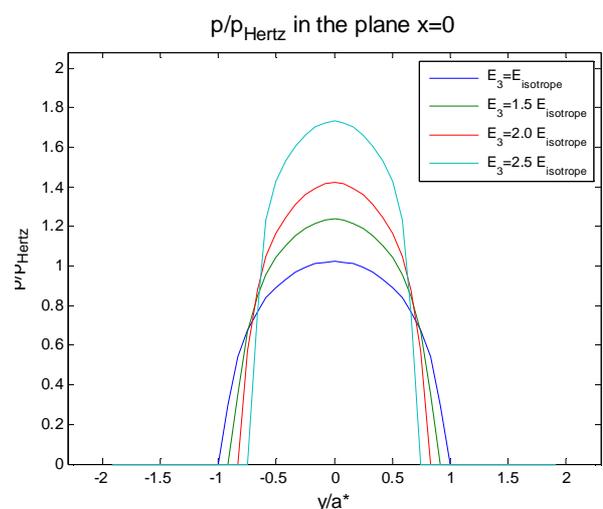


Figure 2 : Influence de E_3 sur la pression de contact

Sur les figures 1 et 2, l'influence de E_1 et E_3 sur la pression de contact est étudiée. On remarque que le

module d'Young dans la direction parallèle à la surface (E_1 ici) a un effet négligeable (le maximum de la pression de contact est diminué de 2% seulement, lorsque E_1 est multiplié par 2,5), alors que le paramètre E_3 a une forte influence sur la distribution de pression et sur le rayon de contact (une augmentation de 69% sur le maximum de la pression de contact et une diminution de 27% sur le rayon de contact, avec un module d'Young augmenté d'un facteur 2,5).

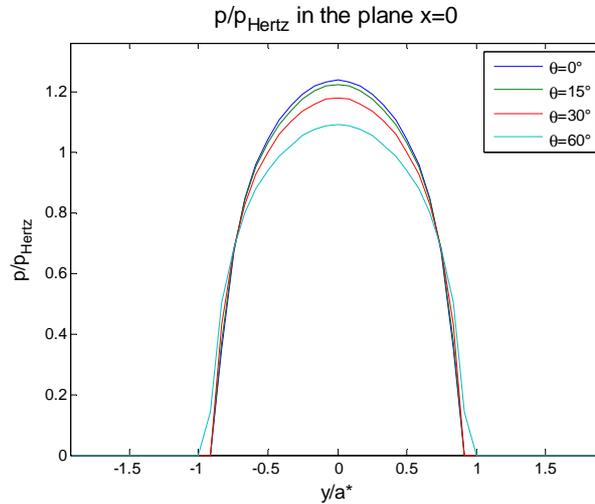


Figure 3 : Influence de l'orientation du matériau sur la pression de contact

L'effet de l'orientation du matériau par rapport au contact est montré en figure 3. Le matériau possède les propriétés d'un matériau isotrope à l'exception de $E_3 = 1.5 E_{\text{isotrope}}$, et ses directions principales sont différentes de celles du contact. Le matériau est orienté d'un angle θ par rapport à la direction 1. Lorsque cet angle augmente jusqu'à atteindre 90° , la solution numérique converge progressivement vers la solution où $E_3 = E_{\text{isotrope}}$ et $E_2 = 1.5 E_{\text{isotrope}}$ (comme illustré sur la figure 1).

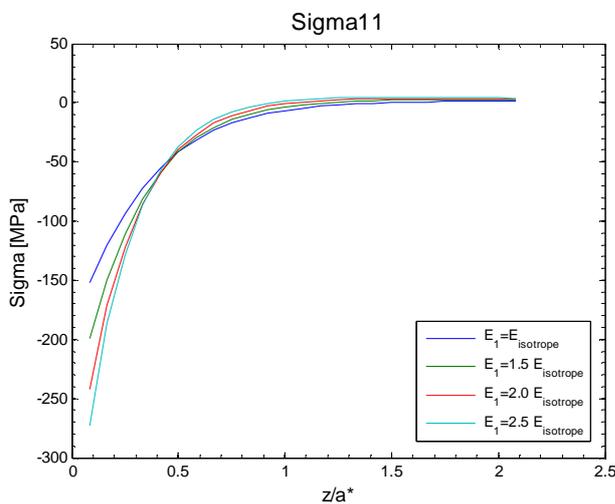


Figure 4 : Influence de E_1 sur σ_{11}

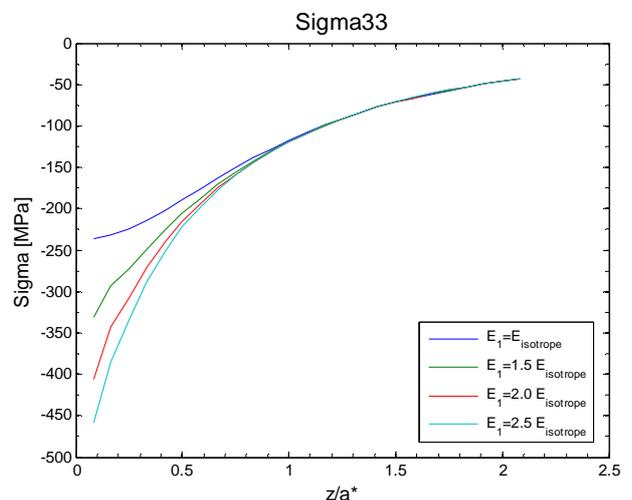


Figure 5 : Influence de E_1 sur σ_{33}

Bien que l'influence du module d'Young dans la direction parallèle à la surface (par exemple E_1) soit négligeable sur la distribution de pression et l'aire de contact, son effet sur les champs de contraintes n'est pas insignifiant. Les composantes des contraintes σ_{11} et σ_{33} sont tracées sur les figures 4 et 5. On observe qu'au centre de la surface ($x_3=0$), σ_{11} augmente de 80%, σ_{22} de 31% et σ_{33} de 94% lorsque E_1 atteint 2,5 fois E_{isotrope} .

6 Conclusion

Une méthode semi analytique a été développée pour résoudre le problème de contact entre deux matériaux

anisotropes. Elle permet d'obtenir des résultats fiables avec un temps de calcul raisonnable. Le modèle a été validé en comparant les résultats pour des matériaux isotropes. Les résultats obtenus en anisotropie montrent l'importance de considérer la totalité des propriétés du matériau.

Il a été montré que la raideur le long de la normale de contact a une forte influence sur la solution de contact ; l'augmentation de E_3 entraîne un maximum de pression de contact plus élevé et un rayon de contact plus faible. Inversement, un changement du module d'Young selon une direction parallèle à la surface (plan (1,2)) n'a pas d'effets notables sur la distribution de la pression de contact (et l'aire de contact). Cependant, notons qu'un changement sur E_1 ou E_2 influe sur les champs de contraintes près de la surface.

L'efficacité de la méthode est soulignée par l'analyse de l'effet de l'orientation des directions principales du matériau par rapport à la normale au contact.

Références

- [1] He L., Ovaert T.C., Three-dimensional rough surface contact model for anisotropic materials, *Journal of Tribology*, 2008.
- [2] Lin Y., Ovaert T.C., Thermoelastic problems for the anisotropic elastic half-plane, *Journal of Tribology*, 2004.
- [3] Rodríguez-Tembleque L., Buroni F.C., Abascal R., Sáez A., 3D frictional contact of anisotropic solids using BEM, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2010.
- [4] Tonon F., Pan E., Amadei B., Green's functions and boundary element method formulation for 3D anisotropic media, *Computers and Structures*, 2001.
- [5] Johnson K.L., *Contact mechanics*, 1985.
- [6] Gallego L., *Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique*, 2007.
- [7] Pan E., Yuan F.G., Three-dimensional Green's functions in anisotropic bimetals, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2000.
- [8] Ting T.C.T., Ven-Gen Lee, The three-dimensional elastostatic Green's function for general anisotropic linear elastic solids, *Mech. Appl. Math.*, 50, 1997.
- [9] Ting T.C.T., *Anisotropic elasticity : theory and applications*, chap.5, 1996.
- [10] Ting T.C.T., New explicit expression of Barnett-Lothe tensors for anisotropic linear elastic materials, *Journal of Elasticity*, 1997.