

Calcul 3D massif revêtu- Techniques multi-grilles avec raffinement local (MGL)

H. Boffy^a, M.C. Baietto^a, P. Sainsot^a, A.A. Lubrecht^a

a. Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS, CNRS UMR 5259, Villeurbanne F69621, France

Résumé :

Le contact réel entre des surfaces solides est généralement rugueux et dépendant du temps. Les contraintes dues aux rugosités dans le contact peuvent être correctement décrites à l'aide d'un modèle 3D suffisamment robuste pour les calculs. Dans le cas de surfaces revêtues, l'analyse du contact requiert une plus grande finesse afin de modéliser correctement l'interface entre revêtement et substrat. Le contact rugueux est par conséquent un problème multi-échelles, les dimensions caractéristiques comme celles du contact, de l'épaisseur du revêtement et de la rugosité dont les échelles peuvent varier du millimètre au nanomètre. Une discrétisation simple de ce problème multi-échelles n'est pas envisageable au vue des capacités mémoires des ordinateurs actuels et des prochaines générations. Ce papier propose un modèle numérique efficace capable de prendre en compte les différentes échelles du problème, en utilisant plusieurs centaines de millions de points et des techniques de raffinement de maillage.

Abstract :

The actual contact between solid surfaces is generally rough and time dependent. The stresses induced by the rough contact can only be correctly described using a detailed 3D model. Even finer details are required in the case of surface coatings. Consequently, the rough coated contact problem is strongly multi-scale : the characteristic dimensions of the contact, the coating and the roughness range from the millimeter to the nanometer. A straightforward discretisation of this multi-scale problem would exceed the memory and CPU capacity of current (and next generation) computers. This paper proposes an efficient numerical model that can handle this multi-scale problem : using more than $O(10^8)$ points and locally refined grids.

The proposed model is based on multigrid techniques within a finite difference frame work. Localised refinement is implemented to optimize memory requirement and computing time. Validation of the solver is performed through a comparison with analytical results for simple cases.

Mots clefs : Contact-mécanique ; Multigrilles ; Revêtements

Nomenclature

δ_0	Rapprochement des 2 corps solides
λ, μ	Coefficients de Lamé
ν	Coefficient de Poisson
ν_1, ν_2	Nombres de relaxations
$a_0 - a$	Rayon de contact sans-avec revêtement
$E_c - E_s$	Module de Young du revêtement-substrat
f	coefficient de frottement
i, j, k	Indices dans les directions x-y-z

$P_{h0} - P_h$	Pression de Hertz sans-avec revêtement
t	Épaisseur du revêtement
u, v, w	Déplacements dans les directions x-y-z
σ_{ij}	Tenseur des contraintes
σ_{VM}	Contrainte de Von Mises

1 Introduction

Les procédés de fabrication actuels permettent d'obtenir des matériaux à gradients de propriétés dans le volume. Ces propriétés peuvent varier selon les 3 directions. L'utilisation la plus commune de ces procédés concerne la réalisation de matériaux revêtus. Le développement et la sélection des revêtement devient donc une tâche complexe et coûteuse pour les designers. Les simulations numériques peuvent les guider dans leurs choix et réduire les coûts que pourraient amener une approche expérimentale. De plus, ces calculs peuvent aider à choisir correctement le matériau à utiliser lors de la réalisation de procédés spécifiques, comme l'épaisseur de la couche de revêtement, les variations de propriétés, etc. Ce travail s'intéresse au développement d'un algorithme efficace capable de traiter des couches minces ($0.01 < t/a < 10$), des gradients de propriétés ($0.005 < E_c/E_s < 10$) ainsi que la rugosité de surface.

2 Modèle 3D et méthodes numériques

Les outils numériques 3D dédiés aux problèmes de revêtements reposent généralement sur les méthodes éléments-finis (FEM) ou des techniques semi-analytiques combinées avec les transformées de Fourier inverses (FFT). Les méthodes FEM requièrent de grandes capacités informatiques (temps CPU et espace mémoire) si l'on souhaite réaliser des maillages localisés très fins. Les méthodes FFT ne permettent pas de traiter des variations de propriétés dans les 3 dimensions de l'espace. Une discrétisation par différences finies peut prendre en compte ces variations, mais, comme pour les méthodes FEM, requiert des besoins importants en termes de calculs. L'utilisation des méthodes multi-grilles (MG) permet d'accélérer la vitesse de convergence et de prendre en compte l'aspect multi-échelles du problème avec des besoins en calculs limités. De plus, ces méthodes peuvent facilement être couplées avec des techniques de raffinement de maillage permettant de regarder le contact sous toutes ses échelles [1, 9]. Watremetz [10] a été le premier à utiliser ces techniques au travers d'un modèle 2D élastique. Ces études concernent les matériaux avec des gradients de propriétés élastiques transverses. Ce travail concerne la simulation numérique d'un matériau élastique anisotrope en 3D soumis à un chargement normal et tangentiel.

2.1 Modèle mécanique

Les équations constitutives d'un problème 3D d'élasticité peuvent être réduites à trois équations différentielles partielles (PDE), écrites en termes de déplacements. Pour obtenir ces équations, les relations contraintes-déformations sont introduites à l'intérieur des équations d'équilibre. Cela conduit à obtenir les équations classiques d'élasticité, dites de Lamé, dans un matériau continu. Dans le cas d'un matériau élastique revêtu avec gradient de propriété, les coefficients élastiques E et ν ne sont plus des constantes. Les équations d'équilibre, écrites pour des propriétés $E(x, y, z)$ et $\nu(x, y, z)$ dépendantes de la position spatiale du point $M(x, y, z)$, sont les équations de Navier généralisées :

$$(\lambda u_{j,j})_{,i} + (\mu u_{i,j})_{,j} + (\mu u_{j,i})_{,j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+2\nu)} \quad (2)$$

Avec $\lambda = \lambda(x, y, z)$ et $\mu = \mu(x, y, z)$ les coefficients de Lamé.

2.2 Conditions aux limites

On considère un massif parallélépipédique de dimensions finies, sur lequel sont imposées des conditions aux limites de type Dirichlet et/ou Neumann. Sur la surface supérieure ($z = 0$), on impose des contraintes (conditions de type Neumann) à l'aide des relations contraintes-déplacements :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & (3) \\ \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & (4) \\ \sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & (5) \end{cases}$$

Sur les autres faces, on impose des conditions aux limites en déplacement (conditions de type Dirichlet). Ces conditions peuvent être considérées égales à 0 dans le cas de grands massifs (comportement semi-infini). Dans le cas de massifs de dimensions réduites, on peut imposer sur les bords des déplacements calculés à partir des déplacements analytiques obtenus dans le cas d'une charge ponctuelle appliquée au milieu de la surface en $z = 0$ [3], correspondant à la charge totale. La figure (1) représente le domaine d'étude ainsi que les conditions aux limites.

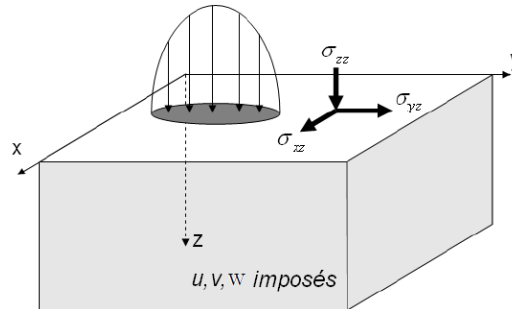


FIGURE 1 – Parallélépipède de dimension finie et conditions aux limites

3 Méthodes numériques

Les équations sont discrétisées en utilisant un schéma aux différences centrées du second ordre sur une grille uniforme. Des grilles très denses peuvent être considérées, conduisant à de grands systèmes d'équations. Les techniques de résolution classiques utilisant la relaxation de Gauss-Seidel requièrent une grande capacité mémoire ainsi que de grands temps de calculs. Les méthodes multi-grilles sont utilisées afin d'accélérer la convergence pour ce genre de problème.

3.1 Techniques multi-grilles

Les méthodes itératives conventionnelles présentent une convergence lente. Les techniques multi-grilles permettent de s'affranchir plus rapidement des erreurs dues aux grandes longueurs d'ondes en utilisant plusieurs niveaux de grilles pour les calculs. La solution numérique d'une équation 2D elliptique obtenue sur une grille uniforme de taille N est transférée puis résolue sur des grilles plus grossières de taille $(N/2)$, $(N/4)$... définissant des niveaux successifs. Un V-cycle (ν_1, ν_2) est défini comme le parcours entre les différents niveaux au cours de la résolution. Plusieurs V-cycles sont nécessaires pour réduire l'erreur de plusieurs ordres de grandeur et obtenir une solution satisfaisante. Pour diminuer le coût de la résolution du problème (réduction des erreurs de toutes les longueurs d'onde), il faut utiliser des niveaux inférieurs. Ainsi, les grandes longueurs d'onde sont réduites à moindre coût car :

-plus le nombre de points sur une grille est faible, plus le nombre de relaxations nécessaire à la résolution est faible. En utilisant des niveaux inférieurs, le nombre de relaxation nécessaires à la convergence est

réduit.

-le coût de chacune des relaxations sur les grilles inférieures est plus faible.

Le changement de grille permet donc de réduire efficacement le temps de calcul, car les relaxations sont utilisées là où elles sont le plus efficaces. Par contre, les opérations de restriction et de correction introduisent dans la solution des erreurs de longueur d'onde proche du pas de maillage. Après chaque opération de changement de grille, il est nécessaire d'effectuer une ou plusieurs relaxations. Dans le cas du problème d'élasticité on utilise $\nu_1 = \nu_2 = 5$.

3.2 Techniques de raffinement de maillage

Les méthodes multi-grilles conviennent parfaitement aux stratégies de raffinement de maillage [1]. Les grilles les plus fines peuvent être restreintes à des sous-domaines de plus en plus petits, tandis que les grilles grossières couvrent la totalité du domaine. L'échange d'informations entre deux grilles consécutives se fait uniquement dans la zone commune. Les résidus de la grille fine et la correction de la grille grosse sont uniquement transférés dans la partie locale, là où la grille plus fine existe. La stratégie de raffinement n'introduit pas de pertes de précision dans la zone raffinée. La vitesse et le taux de convergence sont conservés par rapport à un calcul global alors que le temps CPU est considérablement réduit.

4 Validation

Pour valider le modèle numérique, des comparaisons avec des cas simples pour lesquels des solutions analytiques sont connues [3, 5, 8, 10, 6] ont été réalisées. Dans le cas d'un chargement Hertzien sphère sur plan (P_{h0}, a_0, δ_0), les déplacements en surface dans la zone de contact [3] sont donnés par les relations suivantes sous forme adimensionnée.

Dans le contact ($\bar{r} \leq 1$) :

$$\bar{w}(\bar{r}) = \frac{1}{4}(2 - \bar{r}^2) \quad (6)$$

$$\bar{u}(\bar{r}) = -\frac{(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{1}{3\pi\bar{r}} (1 - (1 - \bar{r}^2)^{3/2}) \frac{\bar{x}}{\bar{r}} \quad (7)$$

$$\bar{v}(\bar{r}) = -\frac{(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{1}{3\pi\bar{r}} (1 - (1 - \bar{r}^2)^{3/2}) \frac{\bar{y}}{\bar{r}} \quad (8)$$

Au centre du contact ($\bar{r} = 0$) :

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = (1 + 2\nu)/2 \quad (9)$$

Aux bords du contact ($\bar{r} = 1$) :

$$\bar{\sigma}_{xx} = (1 - 2\nu)/3 \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = -\bar{\sigma}_{xx} \quad (11)$$

avec : $\bar{r} = \frac{r}{a_0}$, $\bar{x} = \frac{x}{a_0}$, $\bar{y} = \frac{y}{a_0}$, $\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$
 $\bar{u} = \frac{u}{\delta_0}$, $\bar{v} = \frac{v}{\delta_0}$, $\bar{w} = \frac{w}{\delta_0}$, $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}/P_{h0}$, $\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}/P_{h0}$

Nous avons tracé figure (2) l'erreur au sens de la norme 1 sur le déplacement \bar{w} en surface et l'erreur relative sur la contrainte $\bar{\sigma}_{xx}$ au centre.

Ces courbes présentent une pente de coefficient directeur 3,5 traduisant une convergence d'ordre 2, conforme à la discrétisation utilisée. La stratégie de raffinement conserve la précision sur les résultats

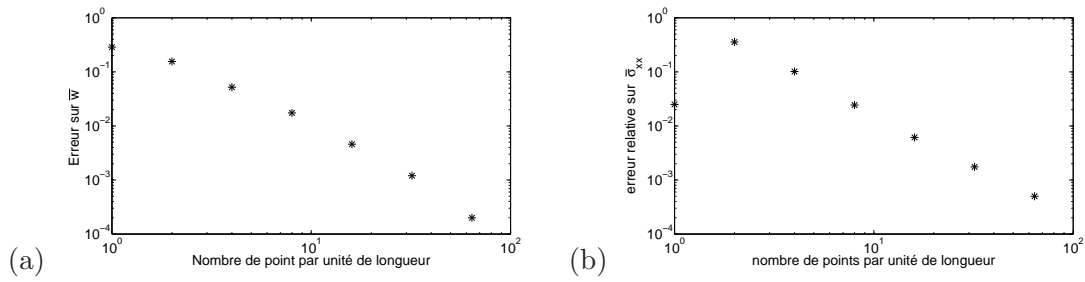


FIGURE 2 – (a) Erreur au sens de la norme 1 sur \bar{w} en surface, (b) Erreur relative sur $\bar{\sigma}_{xx}$ au centre

et sera utilisée pour les calculs sur des massifs revêtus. Le modèle MG peut donc être utilisé pour déterminer numériquement l'expression des coefficients d'influence lorsque leur expression analytique n'existe pas (par exemple pour un massif revêtu). Ces coefficients vont être utilisés pour la résolution du problème de contact entre un indenteur de géométrie quelconque et un massif revêtu.

Dans le cas de sollicitations à charge imposée (géométrie quelconque), le calcul des champs de déplacements et de contraintes dans le massif revêtu nécessite au préalable la résolution du problème de contact par une méthode de gradient conjugué [7].

5 Résultats

Pour illustrer les capacités du modèle, on considère un massif revêtu avec une couche d'épaisseur t , de module de Young E_c différent de celui du substrat E_s .

Une étude paramétrique est réalisée pour des épaisseurs variant de $0.01 < t/a_0 < 10$ et des propriétés mécaniques de revêtement sur la gamme $0.005 < E_c/E_s < 10$. Les variations des paramètres de contact (P_h, a) sont étudiées. Ce type de problème a été précédemment étudié par Chateauminois-Fretigny [2] et Plumet-Dubourg [4] pour des rapports de propriétés allant de $0.005 < E_c/E_s < 3$ à l'aide de méthodes FEM et semi-analytiques. L'algorithme multi-grille permet de traiter de plus grandes gammes de rapports de propriétés ($0.005 < E_c/E_s < 10$) comme le montre la figure (3).

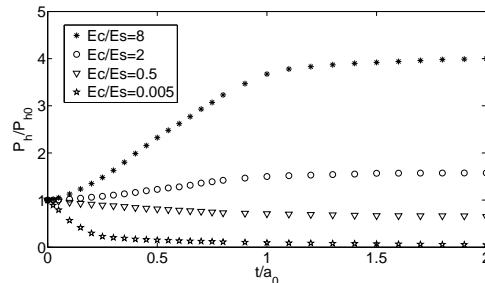


FIGURE 3 – Pression de contact adimensionnée en fonction de l'épaisseur du revêtement adimensionnée pour plusieurs rapports E_c/E_s

La figure (3) montre le comportement asymptotique de la pression adimensionnée pour les grands rapports de t/a_0 . Les valeurs asymptotiques peuvent être retrouvées à l'aide de la formule analytique :

$$\lim_{t/a_0 \rightarrow \infty} P_h/P_{h0} = (E_c/E_s)^{2/3} \quad (12)$$

A partir des déplacements obtenus par le code MG, il est possible également de calculer les contraintes de Von Mises en tout point du massif revêtu. Le calcul de ces contraintes est réalisé en deux parties (dans le revêtement puis dans le substrat) afin de s'affranchir des problèmes de discontinuité à l'interface revêtement-substrat. Les figures (4) et (5) représentent la contrainte de Von Mises adimensionnée dans le cas d'un rapport de propriétés $E_c/E_s = 3$, d'épaisseur $t/a_0 = 0.2$, dans des conditions de contact normal pur ($f = 0$) et glissement pur ($f = 0.3$).

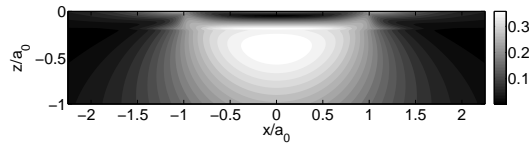


FIGURE 4 – Contrainte de Von Mises adimensionnée $\sigma_{VM}/P_{h0} - E_c/E_s = 3$, $t/a_0 = 0.2$ et $f = 0$

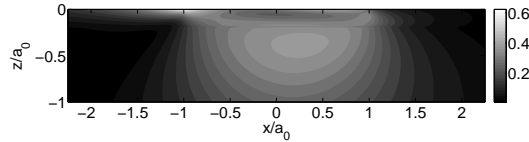


FIGURE 5 – Contrainte de Von Mises adimensionnée $\sigma_{VM}/P_{h0} - E_c/E_s = 3$, $t/a_0 = 0.2$ et $f = 0.3$

6 Conclusion

Un algorithme multi-grille robuste capable de résoudre des problèmes concernant les matériaux revêtus à l'aide de stratégie de raffinement a été présenté. Il est basé sur la résolution des équations de Navier dans un milieu non homogène. Les différents rapports de propriétés qui peuvent être étudiés à partir de celui-ci correspondent à la majorité des cas industriels. La discrétisation des équations permet d'aller plus loin dans l'analyse en considérant des variations de propriétés dans toutes les directions du massif. Des études vont être menées à partir de ce modèle afin d'étudier ses limites sur des cas plus complexes (plus grands rapports de propriétés, variation du coefficient de poisson...). Ce modèle 3D sera également étendu pour la résolution de problèmes thermo-élastiques à partir des équations généralisées de Navier, constituant ainsi la finalité de ce travail.

7 Bibliographie

Références

- [1] Bai, D., Brandt, A., 1987, *Local Mesh Refinement Multilevel Techniques*, J. Sci. Stat. Comp, SIAM, pp. 109-134.
- [2] Fretigny, C., Chateauminois, A., 2007, *Solution for the elastic field in a layered medium under axisymmetric contact loading*, Journal of Physics D : Applied Physics, **40**, pp. 5418-5426.
- [3] Johnson, K.L., 2004, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press.
- [4] Plumet, S., Dubourg, M.C., 1998, *A 3D model for a multilayered body loaded normally and tangentially against a rigid body : application*, Journal of tribology, Trans. ASME, pp.668-676.
- [5] Sainsot, P., Leroy, J.M., Villechaise, B., 1989, *Effect of surface coatings in a rough normally loaded contact*, Journal of tribology, Trans. ASME, pp.151-156.
- [6] Sainsot, P., 2010 *Analytical stresses in rough contacts*, Proc. IMechE, **224** Part C : J. Mechanical Engineering Science, **225**, pp.274-279.
- [7] Sainsot, P., Lubrecht, A.A. 2010 *Efficient solution of the dry contact of rough surfaces : a comparison of FFT and MG methods*, Tribology International, Leeds-Lyon 2010 pp. 1-14.
- [8] Sullivan, T.C.O., King, R.B., 1988 *Sliding Contact Stress Field Due to a Spherical Indenter on a Layered Elastic Half-Space*, Journal of tribology, Trans. ASME, pp.235-240.
- [9] Venner, C.H., Lubrecht, A.A., 2000, *Multilevel methods in lubrication*, Tribology series, **37**, D. Dowson.
- [10] Watremetz, B., Baietto Dubourg, M.-C., Lubrecht, A.A., 2007 *2D thermo-mechanical contact simulations in a functionally graded material : A multigrid-based approach*, Tribology International, pp. 754-762.