

Caractérisation d'une entaille dans un milieu homogène par une approche asymptotique

A. Chouaf^a, A. Haloui^a, M. Chergui^a, M. Dupeux^b

a. LCCMMS, Département Génie Mécanique, ENSEM Casablanca Maroc.

b. Laboratoire SIMap, ENSEEG-INPG Grenoble France

a.chouaf_ensem@yahoo.fr

Résumé

La caractérisation d'une entaille dans une structure mécanique nécessite la détermination des paramètres asymptotiques de la singularité des contraintes. Ces paramètres sont l'ordre de la singularité et le facteur d'intensité des contraintes qui permettent de mieux décrire le champ de contrainte réel engendré localement et par la suite étudier les éventuels risques d'endommagements. De nombreux travaux numériques ont été développés pour étudier le caractère singulier des contraintes engendré au voisinage des discontinuités de formes géométriques ou de matériaux. Ces travaux sont souvent difficiles à exploiter ou à utiliser dans le domaine de l'ingénierie et particulièrement en conception où on a besoin d'optimiser la forme géométrique de notre structure tout en assurant une meilleure durée de vie de fonctionnement.

Pour ce faire, nous avons développé une approche simple basée sur la méthode classique des éléments finis qui consiste à utiliser des conditions aux limites suivant un processus itératif sans que le maillage soit fin et coûteux.

Mots clés : *Discontinuité géométrique, Singularité de contrainte, ordre de la singularité, facteur d'intensité de contrainte.*

Abstract

Characterization with a notch in a mechanical structure requires the determination of the asymptotic parameters of the singularity of stresses. These parameters are the order of the singularity and the stress intensity factor to better describe the real stress field generated locally and then study the possible risks of damage. Many digital works have been developed to study the singular character of stresses generated in the vicinity of discontinuities of geometric shapes or materials. These studies are often difficult to operate or use in the field of engineering design and especially where we need to optimize the geometry of our structure while providing a longer operating life. To do this, we developed a simple approach based on the classical finite element method of using boundary conditions following an iterative process without the mesh is fine and expensive.

Keywords: *geometric discontinuity, stress singularity, the order of singularity, stress intensity factor.*

1. INTRODUCTION

La singularité de contrainte est un phénomène lié au manque de régularité géométrique ; Il y a singularité chaque fois qu'il y a discontinuité d'une frontière. Cette situation se rencontre également dans des assemblages de matériaux présentant des propriétés physiques et chimiques très différentes. L'analyse de ces singularités des contraintes nécessite la détermination des grandeurs asymptotiques associées [1]. Nous rappelons que ces grandeurs sont : le facteur d'intensité des contraintes relié à la nature des matériaux et au type de chargement appliqué, le tenseur normalisé qui est une fonction

spatiale permettant d'illustrer la distribution des contraintes et enfin l'ordre de la singularité paramètre reflétant la sévérité de la discontinuité en présence.

La présente étude, nous l'avons développée en deux parties. A travers la première partie, nous avons décrit la méthodologie de notre calcul itératif à partir duquel nous avons calculé l'ordre de la singularité pour une éprouvette comportant une entaille et soumise à la flexion trois points. Dans la seconde partie, nous avons déterminé pour la même structure, le facteur d'intensité de contraintes. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux de la littérature.

2. DETERMINATION DE L'ORDRE DE LA SINGULARITE DE CONTRAINTE DANS UNE STRUCTURE HOMOGENE :

L'analyse du champ de contraintes au voisinage d'une singularité (bord, trou...) est rendue possible par des méthodes asymptotiques. En élasticité linéaire plane (hypothèse des déformations planes ou des contraintes planes), le champ de déplacement \mathbf{u} peut se décomposer en une partie singulière et une partie régulière [2]. La partie singulière, appelée également singularité, contient en partie les coefficients d'intensité de contraintes K_I et K_{II} . Les premières analyses asymptotiques ont été développées par Williams [3] ensuite par Bogy [4] et d'autres par la suite [5,6]. Ces auteurs ont établi une formulation montrant le caractère singulier près de bord. Quand la distance du bord ρ est petite comparée aux autres longueurs caractéristiques géométriques, le champ de contrainte a la forme $K\rho^{-\lambda}$. λ l'une des grandeurs asymptotiques, on l'appelle l'exposant qui exprime la singularité. Sa valeur est dans l'intervalle $0 < \lambda < 1$, selon l'angle de l'ouverture. Le facteur d'intensité K ne peut pas être déterminé par l'analyse asymptotique, mais par l'analyse du champ numérique pour une géométrie un matériau et un chargement spécifiques.

La géométrie que nous allons étudier est constituée d'un matériau homogène représentant une ouverture $2\pi-2\alpha$ ($2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ figure 1).

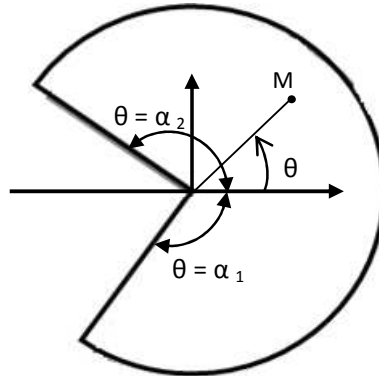


Figure 1 : Domaine homogène avec une ouverture

Pour le domaine représenté par la figure 1, nous rappelons que les composantes du champ de contrainte en un point M de coordonnées polaires (ρ, θ) au voisinage du point singulier, s'expriment à partir de la relation suivante W.C. Carpenter [7] et J P. Slahle et C.E. Shih. [8]:

$$\sigma_{ij}(\rho, \theta) = K f_{ij}(\theta) \rho^{-\lambda} \quad (1)$$

Avec $0 < \lambda < 1$ ce qui implique que la contrainte augmente quand le rayon ρ diminue, cet exposant dépend de la géométrie de domaine autour du point singulier. Ce paramètre caractérise la sévérité de la singularité.

K est le facteur d'intensité de contrainte, dépendant principalement du mode et de l'intensité de chargement, et des propriétés élastiques du matériau près de la singularité.

$f_{ij}(\theta)$ est le tenseur normalisé qui traduit les variations des contraintes avec l'angle polaire θ .

Pour déterminer ces grandeurs asymptotiques, nous allons donc considérer une approche numérique basée sur une méthode des éléments finis itérative, R. S. Barsoum [9,10] et, G. Loppin et A Rigolot [11]. Le principe de cette méthode peut être résumé à travers les étapes suivantes :

Dans un premier temps on construit un domaine D_0 autour du point singulier O (Figure 2), avec une frontière Γ_0 et un maillage intérieur invariants dans une homothétie de centre O et de rapport p ($0 < p < 1$). En suite, par des applications successives de cette homothétie, le domaine D_0 est réduit en des domaines D_i de contours Γ_i de plus en plus petits. A la première itération, les déplacements, déformations et contraintes sont calculés dans chaque élément du maillage en appliquant aux nœuds du contour Γ_0 les valeurs numériques des déplacements issus d'une procédure antérieure indépendante de calcul par éléments finis sur la structure globale. A l'itération i , les déplacements appliqués comme conditions aux limites sur le contour Γ_0 sont pris égaux aux valeurs calculées sur le contour Γ_1 à l'itération $i-1$ par la relation suivante :

$$u_i(M_0) = \frac{1}{p} u_{i-1}(M_1) \quad (2)$$

Où M_0 et M_1 sont deux points appartenant respectivement aux frontières Γ_0 et à Γ_1 .

Il en résulte que pour déterminer l'état de contrainte en un point $M_i \in \Gamma_i$ suffisamment proche du point supposé singulier O , il suffit d'approcher par la méthode des éléments finis l'état de contrainte en un point $M_0 \in \Gamma_0$ en imposant sur la frontière Γ_0 le champ de déplacement suivant :

$$u_i = \frac{1}{p^i} u_0 \quad (3)$$

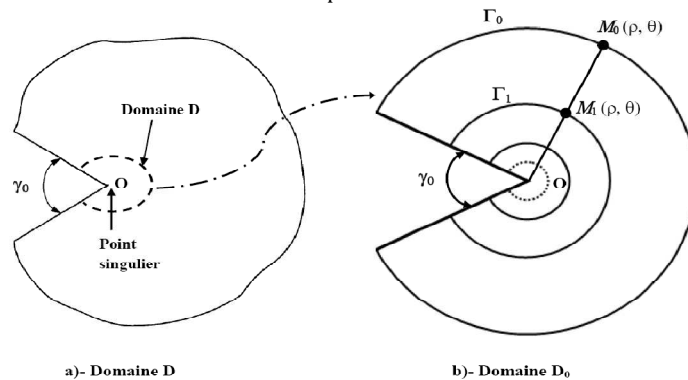


Figure 2 : Schématisation d'une structure avec un point singulier.

a)- Domaine D de la structure avec O point singulier.

b)- Domaine local D_0 inclus dans le domaine D , ayant Γ_0 et γ_0 comme frontière.

Nous supposons que le domaine D_0 défini avant est réduit en n sous-domaines obtenus par transformation homothétique de rapport p . Le calcul itératif d'élément fini déterminera successivement les déplacements et les contraintes pour ces domaines réduits. En exprimant la relation (1) pour deux itérations successives $n-1$ et n , on peut calculer l'exposant λ par l'expression suivant :

$$\lambda = -\frac{1}{\ln(p)} \ln \left[\frac{\sigma_n(\rho_0, \theta)}{\sigma_{n-1}(\rho_0, \theta)} \right] \quad (4)$$

A chaque itération, on peut calculer la valeur de l'exposant λ . Cette valeur est considérée comme définitive, lorsqu'elle ne varie plus entre deux itérations successives.

Pour la démarche exposée ci-dessus, nous avons élaboré un programme informatique principal en C++ permettant pour chaque itération d'exploiter les résultats en déplacements et en contraintes obtenus par SAMCEF ou par ANSYS. Dans l'application de ce programme, nous avons considéré l'étude d'une éprouvette présentant une entaille d'ouverture ($\gamma=\omega$) et soumise à une flexion trois points Figure 3. Le

matériau constituant cette éprouvette est un acier dont le module $E= 2,3 \text{ GPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu=0,36$.

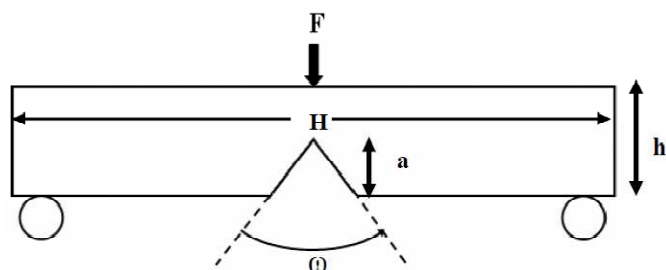


Figure 3 : Eprouvette d'ouverture ω soumise à la flexion 3 points ($H=50\text{mm}$, $h=6\text{mm}$ et $a=1.5\text{mm}$)

Pour cette éprouvette, nous avons donc réalisé pour chaque cas d'ouverture ω une première modélisation tenant compte de la structure globale Figure 4a. En suite nous avons développé les calculs itératifs dans un domaine local entourant la singularité Figure 4b.

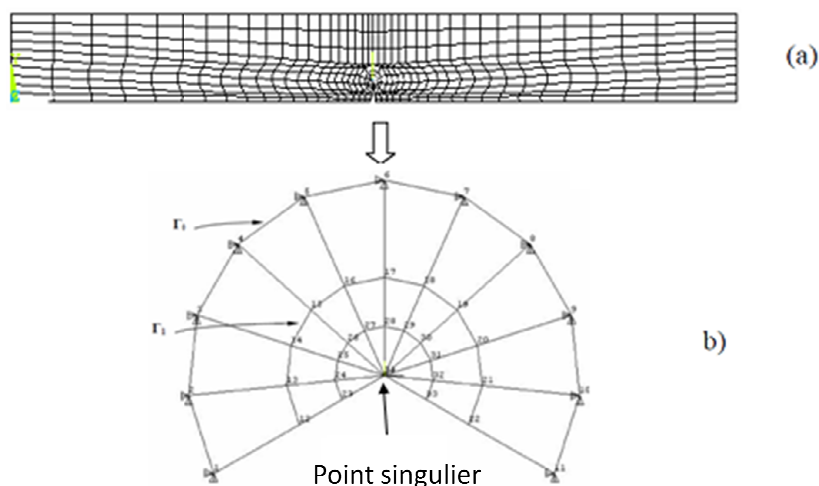


Figure 4 : a) Maillage de la structure globale pour le cas $\omega=15^\circ$
b) Maillage du domaine local autour du point singulier O

Dans le tableau ci-dessous nous avons regroupé les résultats que nous avons obtenus pour l'exposant λ par cette approche numérique et ceux de la littérature D. Leguillon et Sanchez-Palencia E [12,13].

Ouverture ω	Exposant de la singularité λ	
	Approche Numérique	Leguillon et Sanchez-Palencia (1992)
30°	0,540	0,502
45°	0,550	0,506
60°	0,550	0,513
90°	0,560	0,545
120°	0,650	0,616
150°	0,750	0,752
$\sim 0^\circ$	Cas de la fissure, l'exposant théorique est 0,5	

Tableau 1 : Comparaison des valeurs théoriques, numériques et de la littérature de l'exposant de la singularité λ

3. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE AU VOISINAGE D'UNE ENTAILLE

Cette partie est consacrée à la détermination du facteur d'intensité de contrainte, pour cela une description plus fine du champ de contrainte et de déplacement est nécessaire au voisinage du point singulier. Nous avons choisi d'appliquer une méthode basée sur la variation des déplacements sur les bords libres de l'entaille [14] qui consiste à chercher K sous la forme :

$K_I = C/g_y$ avec la constante C déterminée :

$$u_y(\theta = \alpha) = C\rho^\lambda, \text{ et}$$

$$g_y'(\theta) = \frac{(1+\nu)[C_1 C_4 \sin \lambda \theta + \lambda C_5 \sin(2-\lambda)\theta - (3-4\nu)C_5 \sin \lambda \theta]}{E\lambda C_9} \quad (4)$$

avec E et ν , respectivement le module de Young et le coefficient de poisson et :

$$C_1 = 1-\lambda, C_2 = 1+\lambda, C_3 = 1-2\lambda, C_4 = \sin C_1 \alpha,$$

$$C_5 = \sin C_2 \alpha, C_6 = \cos 2C_1 \alpha, C_7 = \cos 2C_2 \alpha,$$

$$C_8 = \cos 2\alpha - \cos 2\lambda\alpha, C_9 = C_1 C_4 - C_2 C_5$$

La deuxième méthode est basé sur la valeur de contrainte normale $\sigma_{\theta\theta}$ pour $\theta = 0^\circ$ (dans le repère locale centré au point singulier) $K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \rho^\lambda \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)$ [15], sur une éprouvette entaillée en V soumise à une flexion trois points (Figure 3).

Les propriétés du matériau constituant l'éprouvette sont : $E = 2,3\text{GPa}$, $\nu = 0,36$, et les valeurs dimensionnelles sont prises égales : $H = 72,6 \text{ mm}$, $h = 17,8 \text{ mm}$, $a = 3,56 \text{ mm}$, et l'ouverture ω prise gale [$60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$].

Pour cette éprouvette, nous avons donc réalisé pour chaque cas d'ouverture ω une modélisation par éléments finis (figure 4).

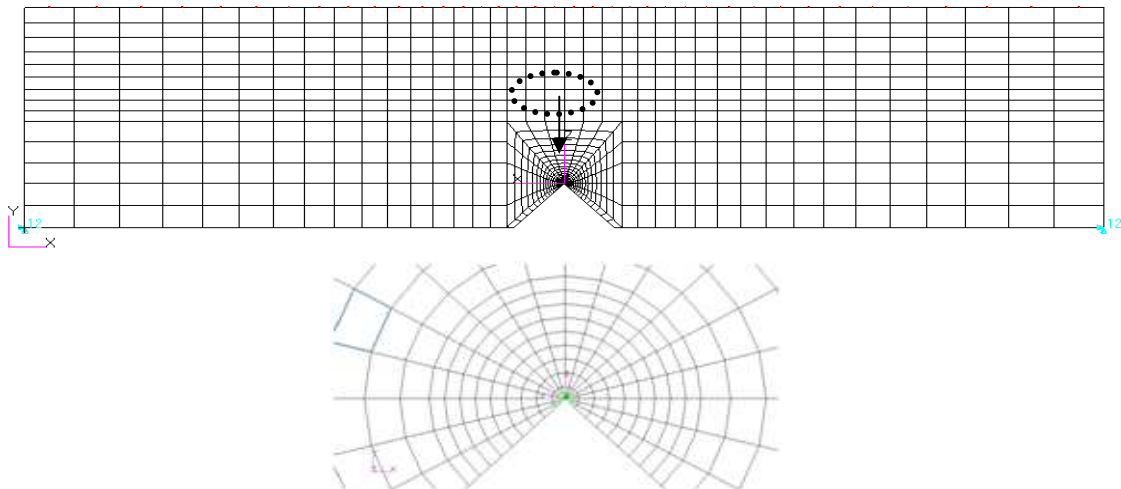


Figure 4 : Exemple de maillage de la structure étudiée dans le cas $\theta=90^\circ$ avec zoom autour du point singulier

Nous avons présenté dans le Tableau 1 les résultats que nous avons obtenus pour le facteur d'intensité de contrainte par la méthode de déplacement, que nous avons regroupé avec ceux obtenus par la méthode de contrainte dans le Tableau 2 :

Angle (ω) En degré	Valeur de $g(\theta)$	Constante C ($m^{1-\lambda}$)	Valeur de K_I (MPa. $m^{1-\lambda}$)
60	0,001200463	0.000770059	0.641468977
90	0,00132739	0.001088683	0.820167999
120	0.001134457	0.001134457	1.087948153

Tableau 2: Valeur de K_I par la méthode de déplacement

		Valeur de K_I (MPa.m ^{1-λ})		
Angle (ω) en degré	exposant λ (littérature)	Analyse en déplacement	Analyse en contrainte	Littérature [14]
60	0.5122	0.641	0.567	0.573
90	0.5445	0.820	0.846	0.886
120	0.6157	1.088	1.903	1.908

Tableau 3: Comparaison de FIC selon notre étude et la littérature

A travers le tableau ci-dessus, nous pouvons constater la bonne concordance entre nos résultats et ceux de la littérature dans le cas où la détermination de facteur d'intensité de contrainte considère les contraintes. En revanche, pour les résultats en déplacement un écart de 40% entre notre méthode et la littérature a été constaté. Cet écart est dû à la détermination de la constante C qui dépend principalement de la précision des déplacements nodaux situés sur la ligne $\theta=\alpha$.

4. Conclusion

A travers cette étude, nous avons développé une approche numérique simple et précise nous permettant de déterminer les grandeurs asymptotiques qui caractérisent le comportement singulier d'une structure présentant une ouverture d'angle dont les lèvres sont libres de contraintes. Ces grandeurs, sont l'ordre de la singularité et le facteur d'intensité de contraintes.

Dans le cas d'une éprouvette comportant une entaille et soumise à la flexion trois points, les résultats obtenus pour ces deux grandeurs ont été comparés avec les travaux de D. Leguillon [12,13] pour l'ordre de la singularité, et avec les travaux de Dunn et al. [14] pour le facteur d'intensité des contraintes. Un bon accord a été constaté pour l'analyse en contrainte. En revanche avec une analyse en déplacement, un grand écart a été constaté surtout pour les grands angles d'entaille.

REFERENCES

- [1] R. S. Barsoum, 1986. Int. J. Fracture, Vol. 32, p. 59-67.
- [2] Naman Recho, 1995. Rupture par fissuration Ed. Hermes, Paris.
- [3] Williams. M. L. 1952. J. appl. Mech. 74. 526
- [4] D.B. Bogy, 1971. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, p. 377
- [5] Dempsey. J. P. and Sinclair. G. B., 1981 J. Elasticity. 11. 317
- [6] Hills, D. A., 1992. as quoted by Barber, J. R., in Elasticity. Kluwer Académie. Dordrecht. p. 132
- [7] William C. Carpenter 1984 A collocation procedure for determining fracture mechanics parameter at a corner, International Journal of Fracture, 24, p. 267-278.
- [8] J P. Slahle, C.E. Shih, (1992) Crack in thin films and substrates, Mal. Res. Soc. Symp. Proc. 239, 567-572

- [9] R.S Barsoum, C.E. Freese, (1984) An iterative approach for the evaluation of delamination stresses in laminated composites, *Int. J. Numer. Methods Engng.* 20, 1415-1431
- [10] R.S Barsoum, (1988) Application of the finite element iterative method to the eigenvalue problem of a crack between dissimilar media , *Inter.J. Numer. Methods Engng.* 26, 541-554
- [11] G. Loppin, A Rigolot “A numerical approximation for the analysis of angular singularities in plane classical elasticity” *Eur.J.Mech. A/Solids*, 11,(3),(1992), p.305-321.
- [12] D. Leguillon, Sanchez-Palencia E. (1987) *Computation of singular solution in elliptic problems and elasticity*, J. Wiley, New-York and Masson, Paris
- [13] D. Leguillon, Sanchez-Palencia E. (1992) *Fracture in heterogeneous materials, weak and strong singularities*, in *New advances in Computation Structural Mechanics*, P. Ladevze and O.C. Zienkiewicz eds., *Studies in applied mechanics* 32, Elsevier, Amsterdam, 423-434
- [14] Dunn, M. L., Suwito, W. and Cunningham, S. J. 1996 *Stress intensities at notch singularities. Engineering Fracture Mechanics.*
- [15] Gross.B and Mendelson. A 1991. *Plane elastoplastic analysis of V notched plates. International Journal of Fracture.* Vol .48, pp 79-83.