

Etude de l'angle de propagation d'une fissure carrée dans un milieu tridimensionnel à comportement élastique non-local

M. SCHWARTZ^{a,b}, N.T. NIANE^b, R. KOUITAT NJIWA^a

a. Institut Jean Lamour, Ecole des Mines de Nancy, Parc de Saurupt, 54042 NANCY

b. PSA Peugeot Citroen, Centre Technique La Garenne Colombes, 18 rue des Fauvelles, 92250 LA GARENNE COLOMBES

Résumé :

On s'intéresse au cas d'une fissure dans un milieu tridimensionnel dont le comportement est décrit par un modèle élastique non-local tel que celui développé par Eringen. Pour ce type de comportement, les contraintes en pointe de fissure sont finies. Nous étudions la possibilité de prendre avantage de ce fait pour s'affranchir de l'utilisation des facteurs d'intensité de contrainte dans la prédiction de l'angle de propagation de la fissure.

Abstract :

We consider the case of a crack in a three-dimensional environment whose behavior is described by a non-local elastic model such as that developed by Eringen. For this type of behavior, stresses at the crack tip are finite. We study the possibility of taking advantage of this fact to avoid the use of stress intensity factors for the prediction of crack propagation angle.

Mots clés : Fissure tridimensionnelle, Elasticité non-locale, Eléments de frontière, Angle de propagation

1 Introduction

Dans le cadre de la théorie classique (locale) de l'élasticité, le champ de contraintes prédit sur le front d'une fissure est infini. Ce résultat est physiquement inacceptable et oblige d'avoir recours aux facteurs d'intensité de contrainte. Il traduit l'incapacité de cette description locale du comportement à traiter des problèmes élastiques en présence de singularités géométriques aiguës. Comme l'a souligné Eringen, cette incapacité est due aux limitations de la théorie classique.

L'utilisation d'une théorie non-locale, qui tient compte des interactions à plus longue distance, permet une description plus fine du comportement élastique au voisinage de la fissure. Dans le cas de la théorie non-locale forte (Kroner [5], Krumhansl [6], Kunin [7]), la contrainte en un point dépend de la déformation dans tout le domaine étudié. De nombreuses études ont montré qu'avec une telle description du comportement, les contraintes sont finies sur le front de fissure (Eringen [3], Gao J. [4], Zhao Minghao et Al [10]). Il convient alors de revisiter les critères classiques permettant de suivre l'évolution d'une fissure dans un milieu élastique.

Dans ce travail, nous adoptons l'approche non-locale de l'élasticité proposée par Eringen [3] et nous étudions la direction probable de propagation d'une fissure contenue dans un milieu infini. Nous montrons que le critère de contrainte tangentielle maximale introduit par Erdogan et Sih [2] conduit à des angles probables de propagation conformes aux observations expérimentales rencontrées dans la littérature.

2. Equations d'équilibre et relation de comportement

On considère un domaine Ω élastique homogène et isotrope contenant une fissure. Dans le cas statique et en l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre et de comportement de l'approche non-locale proposée par Eringen [3] s'écrivent :

$$\mathbf{t}_{ij,j} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (2)$$

Dans la relation (2) le tenseur $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ peut être assimilé au tenseur de contrainte local défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}_{k,l}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{l,k}(\mathbf{x}))/2 \quad (4)$$

Où \mathbf{t}_{ij} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}$ et \mathbf{u}_k représentent respectivement le tenseur de contrainte non-local, le tenseur des déformations et le champ de déplacement. \mathbf{C}_{ijkl} symbolise le tenseur d'élasticité isotrope.

La fonction d'atténuation $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est continue, positive, décroissante avec la distance euclidienne $\mathbf{r} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ et quasiment nulle pour $\mathbf{r} > \mathbf{R}$. \mathbf{R} définit alors le rayon du domaine d'influence Ω_{inf} de la fonction $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Dans ce travail, nous avons adopté l'expression ci-après (Eringen [3], Povstenko [8]) :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(\mathbf{l}\sqrt{\pi})^3} \exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 / \mathbf{l}^2) \quad (5)$$

L'expression de $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ fait intervenir un paramètre \mathbf{l} homogène à une longueur, appelé « longueur interne caractéristique ». Pour une valeur de \mathbf{l} donnée, le rayon \mathbf{R} du domaine d'influence est déterminé grâce à la condition de normalisation :

$$\int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \approx \int_{\Omega_{inf}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') = 1$$

Il convient de noter que lorsque la longueur interne tend vers zéro, on retrouve le modèle classique.

Enfin, dans le cas d'un milieu infini, la fonction $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ présente comme particularité supplémentaire d'être fonction de Green de l'équation différentielle de la chaleur :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} - \nabla^2 \right) \mathbf{g}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \boldsymbol{\delta}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \Leftrightarrow \mathbf{L} \mathbf{g}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \boldsymbol{\delta}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

Où le paramètre \mathbf{t} s'exprime en fonction de la longueur interne caractéristique : $\mathbf{t} = \mathbf{l}^2 / 4$. L'opérateur \mathbf{L} , appliqué aux équations (1) et (2), permet de relier le tenseur de contrainte non-local au tenseur de contrainte local, et de retrouver l'équation d'équilibre classique :

$$\mathbf{L} \mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \quad (6)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{t}_{ij,j}(\mathbf{x})) = \mathbf{L}(\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}))_{,j} = \boldsymbol{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad (7)$$

A partir de la solution de l'équation classique (7), les contraintes non-locales sont calculées en post-traitement.

Pour résoudre l'équation (7), nous avons adopté la méthode des éléments de frontière. Elle est bien adaptée à la résolution de problèmes de fissuration et sa formulation mathématique du problème peut être consultée dans de nombreux ouvrages (e.g. Bonnet, Brebbia, Aliabadi).

3 Résultats

Nous nous limitons au cas d'une fissure carrée, centrée dans un parallélépipède rectangle (assimilable à un milieu infini) et soumis à une contrainte de traction unidirectionnelle σ_0 . La fissure de côté $2c$ peut être inclinée par rapport à la direction y d'un angle β .

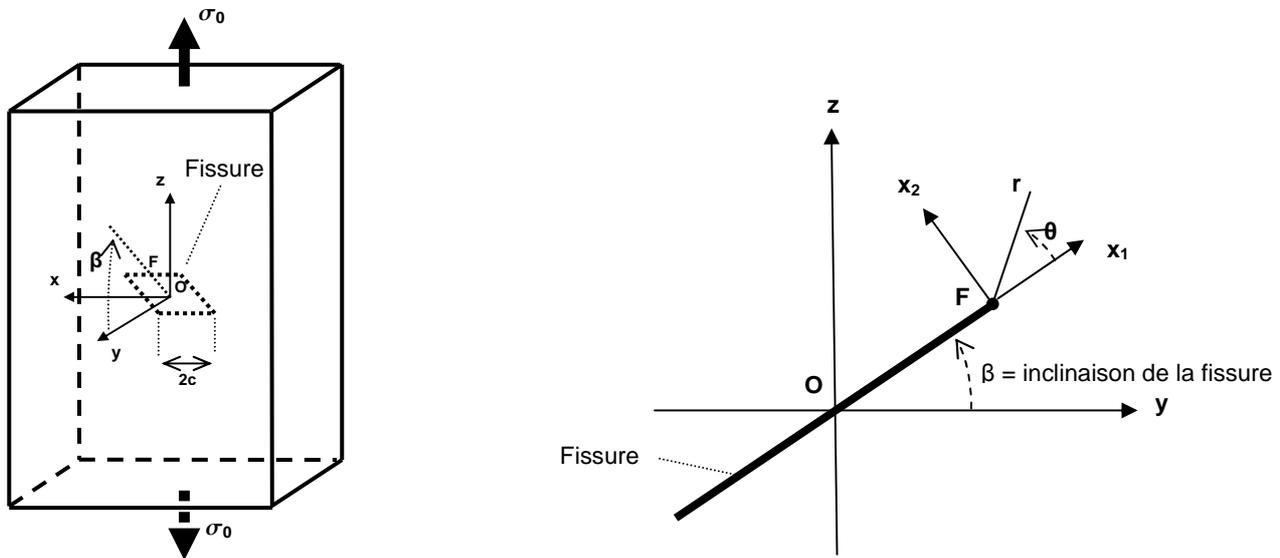


FIG. 1 – Représentation schématique de la fissure dans le domaine Ω et en 2D dans le plan Oyz

Le centre de la fissure est situé à l'origine O du repère global $Oxyz$. En chaque point F du front de fissure on peut définir un repère local $Fx_1x_2x_3$. Dans l'étude présentée ici, on se limite au cas où F est le point milieu du front supérieur de la fissure. Les vecteurs directeurs des axes Fx_1 et Fx_3 sont respectivement normal et tangent au front au point F . Le vecteur directeur de l'axe Fx_2 est normal au plan de la fissure au point F . Le repère $Fx_1x_2x_3$ est orthonormé direct. Enfin, on note r et θ les coordonnées polaires définies dans le plan Fx_1x_2 .

3.1 Profils de contrainte non-locale

On considère tout d'abord le cas d'une fissure non-inclinée ($\beta = 0$). L'évolution de la composante σ_{zz} du tenseur de contrainte classique est comparée à celle de t_{zz} le long de l'axe Fx_1 (Figure 2.a). La contrainte est normalisée par le chargement σ_0 et son évolution est représentée en fonction de r/l où r représente la distance au front de la fissure et l correspond à la longueur caractéristique.

Contrairement au cas classique, la contrainte est finie au niveau du front. Elle croit ensuite vers un maximum ($r/l \approx 0.67$) puis décroît pour retrouver l'évolution classique pour un rapport r/l de l'ordre de 5. Plus la taille de la fissure est importante comparée à la longueur caractéristique, plus le niveau de contrainte est important comme on peut le constater sur la Figure 2.b ($c/l = 150, 30, 15$ et 7.5).

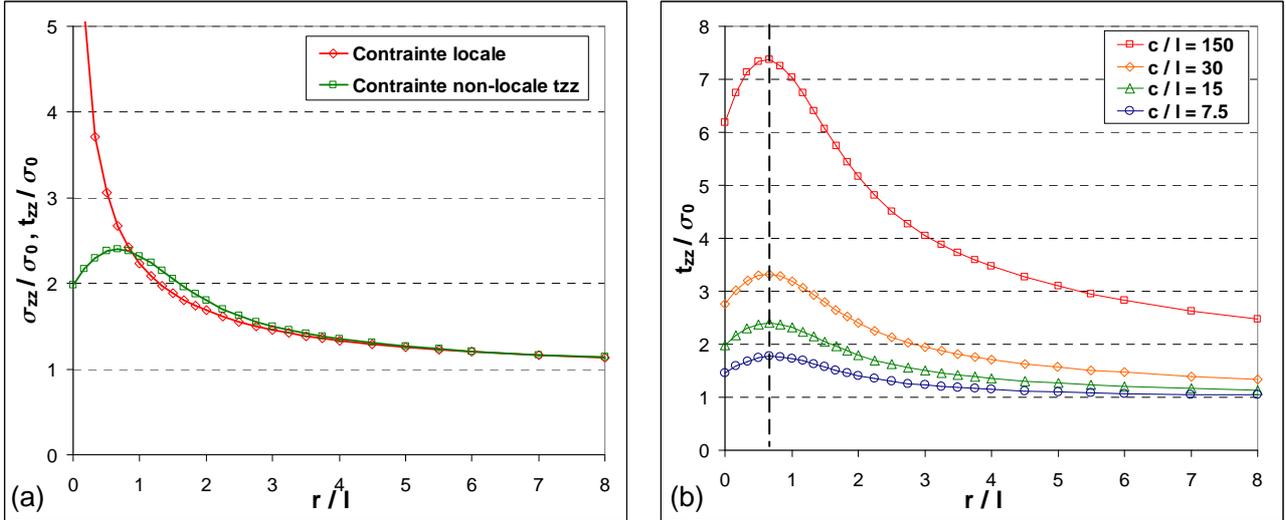


FIG. 2 – (a) Variation de σ_{zz} (contrainte classique) et t_{zz} (contrainte non-locale) en fonction de la distance au front de fissure ; (b) Influence de la longueur caractéristique l sur l'évolution de t_{zz}

De manière remarquable, la position du maximum de contrainte se situe invariablement autour de $r/l \approx 0.67$ et ne dépend pas de la taille de la fissure.

3.2 Angle de propagation

Penchons nous maintenant sur la direction probable de propagation d'une fissure. Nous considérons toujours le cas de la fissure carrée mais différentes valeurs de l'angle d'inclinaison β (voir Figure 1). La fissure est donc sollicitée en mode mixte. Le critère de bifurcation formulé par Erdogan et Sih [2] prédit la propagation de la fissure dans la direction où la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale.

La composante classique $\sigma_{\theta\theta}$ peut s'exprimer en fonction de l'angle polaire θ (voir Figure 1) et des composantes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} du tenseur de contrainte dans le repère $\mathbf{F}x_1x_2$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sin^2(\theta)\sigma_{11} - \sin(2\theta)\sigma_{12} + \cos^2(\theta)\sigma_{22} \quad (8)$$

De la même façon, on peut définir la contrainte non-locale $t_{\theta\theta}$ des composantes t_{11} , t_{22} , t_{12} :

$$t_{\theta\theta} = \sin^2(\theta)t_{11} - \sin(2\theta)t_{12} + \cos^2(\theta)t_{22} \quad (9)$$

Dans l'approche classique, les expressions asymptotiques des composantes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} sont singulières lorsque r tend vers 0 (sur la pointe de fissure). La relation (8) est généralement exprimée en terme des facteurs d'intensité de contraintes. Cette relation conduit à des résultats très proches de ceux prédits par le critère du minimum de densité d'énergie de Sih [9]. Rappelons que la densité d'énergie a pour expression

$$W_{el} = \frac{1}{2\mathbf{E}}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{\mathbf{E}}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \frac{1+\nu}{\mathbf{E}}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (10)$$

Les contours de la contrainte $t_{\theta\theta}$ sont représentées sur les figures 3 pour différentes valeurs d'angle d'inclinaison β (0° , 15° , 30° , 45°) et pour $c/l = 15$. La contrainte $t_{\theta\theta}$ est normalisée par σ_0 . Il apparaît clairement que quelque soit la valeur de β , cette contrainte est maximale dans une direction qui tend à ramener le plan de la fissure perpendiculaire à la direction de sollicitation. Nous avons désigné cette direction par θ_p .

Fort de ce constat, nous avons recherché l'influence du rapport c/l sur cette direction. Cette direction probable de propagation est à comparer à celles issues du traitement classique et basées sur les facteurs d'intensité de contraintes. Pour mémoire, ces derniers sont représentés sur la Figure 4.b en fonction de l'inclinaison de la fissure.

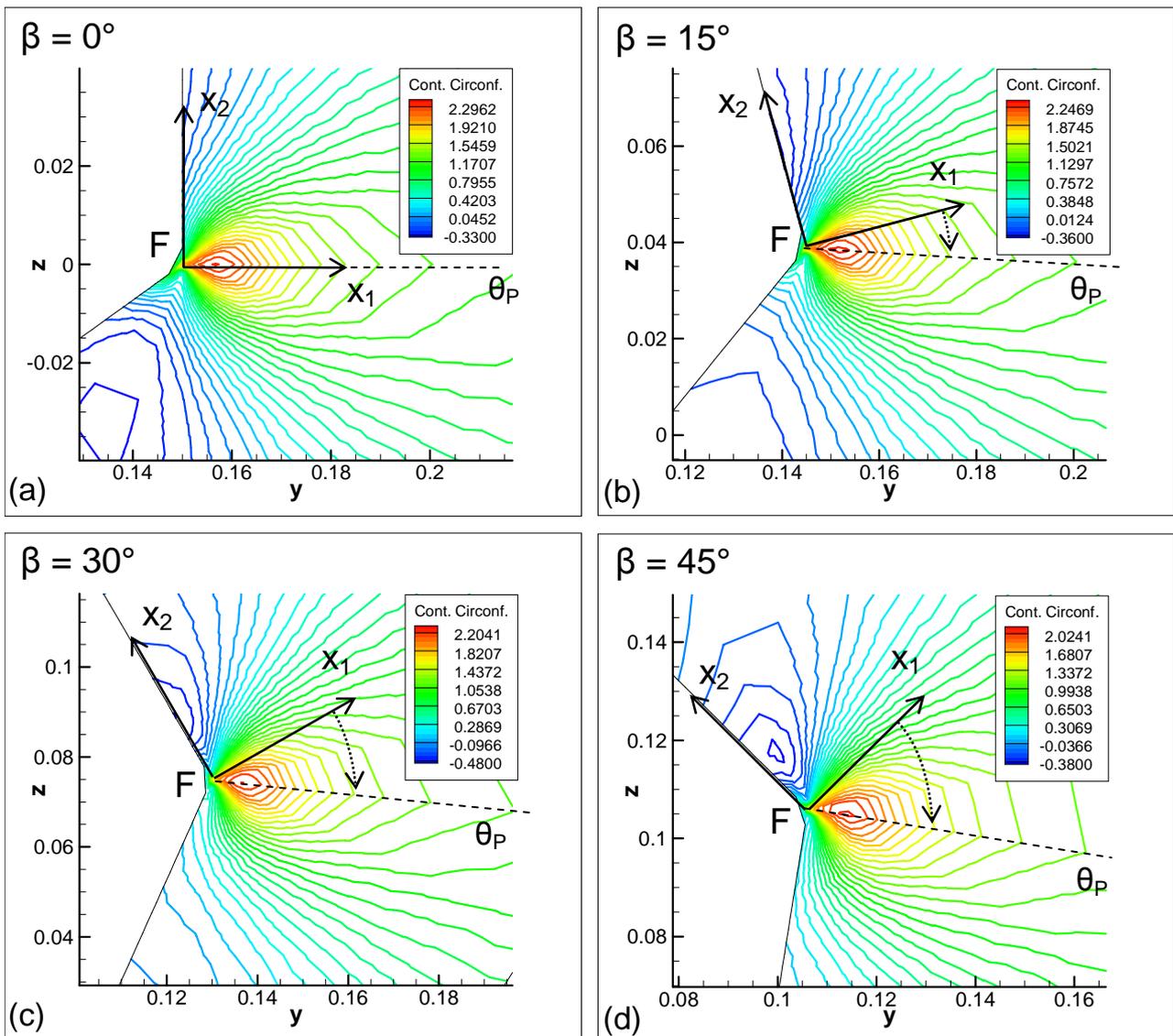


FIG. 3 – Variation de $t_{\theta\theta}$ dans le plan Fx_1x_2 pour une inclinaison β de : (a) 0° ; (b) 15° ; (c) 30° ; (d) 45°

L'évolution de l'angle θ_p en fonction de l'inclinaison β de la fissure et pour différentes valeurs du rapport c/l est représentée sur la Figure 4.a. Les angles prédits par le critère de Sih et Erdogan [2] et le critère Sih [9], sont fournis à titre de comparaison.

Quel que soit le cadre, classique ou non-local, l'angle de propagation prédit, initialement nul (pour $\beta = 0^\circ$), décroît lorsque β augmente. L'évolution de l'angle propagation en fonction de β est toutefois différente suivant l'approche employée. Pour les valeurs intermédiaires de β (entre 0 et 45°), la théorie non-locale fournit des angles de propagations sensiblement inférieurs à ceux prévus par la théorie classique, et très proches, en valeur absolue, de l'angle d'inclinaison β . Autrement dit, l'approche non-locale prévoit une propagation de la fissure dans la direction perpendiculaire à la direction d'application de l'effort de traction.

On note que pour les valeurs de c/l considérées, les angles de propagation prédits par la théorie non locale sont très proches les uns des autres. Ces résultats méritent d'être confirmés pour d'autres géométries de fissure et notamment elliptiques.

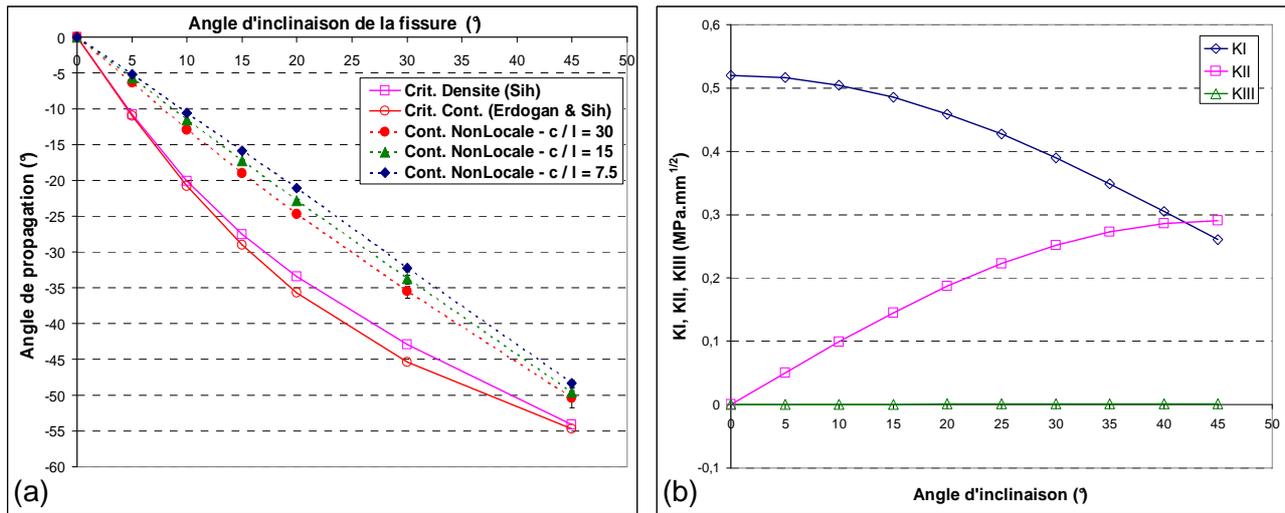


FIG. 4 – (a) Evolution de l'angle de propagation en fonction de l'angle d'inclinaison pour plusieurs valeurs de la longueur interne caractéristique ($l = 5, 10, 20$ microns) ; (b) Evolution des facteurs d'intensité de contrainte au point F en fonction de l'inclinaison

4. Conclusion

Dans ce travail, l'approche non-locale de Eringen est employée pour lever la singularité du champ de contrainte classique au voisinage du front d'une fissure carrée dans un milieu 3D élastique linéaire. Nous avons montré qu'avec une telle description du comportement du matériau, l'angle de propagation d'une fissure est relativement bien décrit par le critère de la contrainte tangentielle maximale. Ces résultats préliminaires sont en cours d'extension à d'autres géométries de fissure et aux milieux bornés.

References

- [1] Bonnet, Equations intégrales et éléments de frontière, 1995
- [2] Erdogan F., Sih G.C., On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, J Basic Engng, 1963
- [3] Eringen A.C., Nonlocal Continuum Field Theories, 2001
- [4] Gao J., On the study of a penny-shaped crack in non-local elasticity, Acta Mechanica Solida Sinica, 1989
- [5] Kroner E., Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces, International Journal of Solids and Structures, 3, 731-742, 1967
- [6] Krumhansl J.A., Generalized continuum field representation for lattice vibrations, In : Wallis, R.F., (Ed.), Lattice Dynamics, Proc. of Int. Conference, 1963
- [7] Kunin I.A., The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, In : Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, Proc. IUTAM Symposium, 1967
- [8] Povstenko Y.Z., Kubik I., Concentrated ring loading in a nonlocal elastic medium, Int J of Engng Science, 2005
- [9] Sih G.C., Some basic problems in fracture mechanics and new concepts, Engng Fract Mech, 1973
- [10] Zhao Minghao, Cheng Changjun, Liu Yuanjie, Liu Guoning, Zhang Shishuan, The method of analysis of crack problem in three-dimensional non-local elasticity, Applied Mathematics and Mechanics, 1999