

# Formulation micromorphique d'un modèle élastoplastique non-local en gradient d'endommagement

H. MOHAMED, K. SAANOUNI

ICD-LASMIS. University of Technology of Troyes. STMR UMR-CNRS 6279

12, Rue Marie Curie – BP2060- 10000 Troyes cedex, France

[Mohamed.hamed@utt.fr](mailto:Mohamed.hamed@utt.fr), [khemais.saanouni@utt.fr](mailto:khemais.saanouni@utt.fr)

## Résumé :

*Il est communément admis que l'utilisation des équations constitutives inélastiques avec adoucissement (mécanique ou thermique) pour résoudre le problème de valeur initiale et aux limites (PVIL) conduit à une dépendance pathologique de la solution au maillage. Pour résoudre ce problème nous proposons dans ce travail une formulation thermodynamique dans le cadre de la mécanique des milieux continus généralisés, en introduisant le premier gradient de l'endommagement micromorphique. Dans cette formulation, la variable d'endommagement est fortement couplée avec l'écroutissage mixte non linéaire isotrope et cinématique et avec la variable d'endommagement micromorphique. Une formulation thermodynamiquement consistante est utilisée pour introduire la variable d'endommagement micromorphique comme un degré de liberté supplémentaire (ddl) et son premier gradient est ajouté à la liste des variables d'état dans le potentiel d'état. Une équation différentielle partielle (EDP) additionnelle avec ses conditions aux limites découlent du principe des puissances virtuelles. Ajoutée aux équations d'équilibre elles permettent de formuler un PVIL à deux fonctionnels faibles avec le vecteur déplacement et l'endommagement micromorphique comme ddl. Un nouvel élément fini avec un ddl supplémentaire ainsi que le modèle de comportement non local sont implémentés dans le code calcul ABAQUS/EXPLICIT en utilisant les sous-programmes utilisateurs VUEL et VUMAT. L'application de cette modélisation à un essai de traction montre l'obtention d'une solution indépendante de la finesse du maillage.*

## Abstract

*It is well known that the use of inelastic constitutive equations with induced softening to solve Initial and Boundary Value Problem (IBVP) leads to pathological mesh dependency. To solve this problem a thermodynamically-consistent formulation incorporating first micromorphic damage gradient in the framework of the generalized micromorphic continuum is proposed. In this formulation the damage field is strongly coupled with a mixed isotropic and kinematic non linear hardening together with micromorphic damage variables. A thermodynamically consistent formulation is used to introduce the micromorphic scalar damage field as a degree of freedom (dof) and its first gradient as a state variable in the state potential. By using the principle of virtual power in the framework of the micromorphic continuum, additional PDE together with appropriate boundary conditions are obtained. Together with the classical equilibrium equations these EDPs allows the formulation of the IBVP with two weak forms having the displacement and the micromorphic damage as nodal unknowns. A new finite element with one additional dof is developed and implemented together with the nonlocal constitutive equations into ABAQUS/EXPLICIT using the user's subroutines VUEL and VUMAT. The application to the tension test leads to a numerical solution independent from the mesh size.*

**Mots clefs :** MEF, formulation non locale, gradient d'endommagement micromorphique

## 1 Introduction

Les PVIL basés sur des modèles de comportement à adoucissement induit par des phénomènes comme l'endommagement ou la température conduisent à des solutions numériques fortement dépendantes de la discrétisation spatiale. C'est pour cela que plusieurs travaux se sont intéressés à la régularisation de ces problèmes par diverses méthodes s'appuyant essentiellement sur la mécanique locale des milieux matériellement simples soit en introduisant un gradient de variable d'état dans les potentiels d'état et autres fonctions de charge en y ajoutant une EDP supplémentaire pour gouverner la variable non locale [1] et [2], soit en modifiant le principe des puissances virtuelles pour aboutir à une EDP supplémentaire gouvernant la variable non locale [6]. D'autres formulations, plus rigoureuses, se basent sur une théorie des milieux continus généralisés pour introduire une longueur interne assurant au PVIL une solution indépendante de la discrétisation spatiale [3], [4], [5] et [7]. Dans ce travail nous suivons la démarche générale des milieux micromorphiques décrite dans [3], [4] et [5] pour développer une modélisation micromorphique thermodynamiquement admissible pour modéliser le comportement de solides élastoplastiques endommageable.

## 2 Elastoplasticité en gradient d'endommagement micromorphique

Parce que le couplage fort comportement endommagement induit un adoucissement qui se trouve être à l'origine de la dépendance vis-à-vis de la discrétisation spatiale du PVIL, nous décidons que le seul phénomène micromorphique à modéliser est l'endommagement ductile auquel nous attachons la variable  $\bar{D}$  comme un ddl (ou variable nodale) à utiliser dans le principe des puissances virtuelles. De même les deux couples de variables d'état  $(\bar{D}, \bar{Y})$  et  $(\bar{\nabla}\bar{D}, \bar{Y})$  seront introduits comme nouvelles variables d'état dans le potentiel d'état.

### 2.1 Principe des puissances virtuelles pour les solides micromorphiques

Nous utilisons  $\{\bar{u}, \bar{D}\}$  comme ddl dans le principe des puissances virtuelles qui s'écrit :

$$P^{(i)}(\delta\bar{u}, \delta\bar{D}) + P^{(e)}(\delta\bar{u}, \delta\bar{D}) - P^{(a)}(\delta\bar{u}, \delta\bar{D}) = 0 \quad \forall \delta\bar{u} \text{ et } \delta\bar{D}, C.A. \quad (1)$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit alors sous la forme :

$$P^{(i)} = - \int_{\Omega} \left( \underline{\underline{\sigma}} : \bar{\nabla} \delta\bar{u} + \bar{Y} \delta\bar{D} + \bar{Y} \cdot \bar{\nabla} \delta\bar{D} \right) d\Omega \quad (2)$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs est elle donnée par :

$$P^{(e)} = \int_{\Omega} \left( \vec{f} \cdot \delta\bar{u} + f^D \delta\bar{D} + \bar{B}^D \cdot \bar{\nabla} \delta\bar{D} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_F} \vec{F} \cdot \delta\bar{u} ds + \int_{\Gamma_F^D} \left( F^D \delta\bar{D} \right) ds \quad (3)$$

où  $\vec{f}$  est le vecteur des forces de volume classiques et  $f^D, \bar{B}^D$  sont les forces de volume associées respectivement à l'endommagement micromorphique et son gradient,  $\vec{F}$  est le vecteur des forces imposées sur la frontière  $\Gamma_F$  et  $F^D$  est une force micromorphique appliquée sur  $\Gamma_F^D$ . Enfin La puissance virtuelle des efforts d'inertie s'écrit sous la forme:

$$P^{(a)} = \int_{\Omega} \rho \ddot{\bar{u}} \cdot \delta\bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} l_D^2 \rho \ddot{\bar{D}} \delta\bar{D} d\Omega \quad (4)$$

où  $\ddot{\bar{D}}$  est l'accélération de l'endommagement micromorphique et  $(l_D^2 \rho)$  défini la densité micromorphique associée. L'application du principe des puissances virtuelles (1) conduit, après quelques manipulations algébriques, aux équations d'équilibre classique et à de nouvelles équations de bilan micromorphiques avec leurs conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F} \\ \vec{u} = \vec{u}_i \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_F \quad \text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{\check{Y}} - \vec{B}^D) - \check{Y} + f^D = \rho l_D^2 \ddot{D} \quad \text{dans } \Omega \\ (\vec{\check{Y}} - \vec{B}^D) \cdot \vec{n} = F^D \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_F^D \quad \text{(b)} \quad (5)$$

## 2.2 Thermodynamique des milieux micromorphiques

Considérons un solide élastoplastique  $(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{\underline{\sigma}})$  à écrouissage isotrope  $(r, R)$ , et cinématique  $(\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{X}})$ , à endommagement local ductile isotrope  $(D, Y)$  avec effets micromorphiques représentés par les couples  $(\check{D}, \check{Y})$  et  $(\check{\nabla} \check{D}, \check{Y})$ . En se limitant au cas isotherme par souci de concision, si l'on considère que le potentiel d'état dans l'espace des déformations (énergie libre de Helmholtz) est une fonction convexe de ses arguments  $\rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, r, \underline{\underline{\alpha}}, D, \check{D}, \check{\nabla} \check{D})$ , alors l'expression différentielle de l'inégalité de Clausius-Duhem se met sous la forme en assumant:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \check{Y} \dot{\check{D}} + \check{\nabla} \check{Y} \dot{\check{D}} - \rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, r, \underline{\underline{\alpha}}, D, \check{D}, \check{\nabla} \check{D}) \geq 0 \quad (6)$$

Si l'on suppose que seule la déformation totale est décomposable en parties élastique et plastiques  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p$  (mais pas les variables micromorphiques), une démarche classique permet de décomposer cette inégalité en plusieurs relations d'état définissant les variables forces :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \underline{\underline{X}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \quad Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad \check{Y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \check{D}} \quad \check{\nabla} \check{Y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \check{\nabla} \check{D}} \quad (7)$$

et d'une inégalité résiduelle définissant la dissipation intrinsèque :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - R \dot{r} - \underline{\underline{X}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}} + Y \dot{D} - \frac{\check{q}}{T} \cdot \check{\nabla} T \geq 0 \quad (8)$$

L'équation (8) indique clairement que la dissipation est purement locale conformément à notre hypothèse adoptée ci-dessus. Si on choisit le potentiel d'état sous la forme suivante :

$$\rho \psi = \frac{1}{2} (1-D) \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{1}{2} (1-D) Q r^2 + \frac{1}{3} (1-D) C \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + \frac{1}{2} \check{H} (D - \check{D})^2 + \frac{1}{2} \check{H}_g \check{\nabla} \check{D} \cdot \check{\nabla} \check{D} \quad (9)$$

où  $\underline{\underline{\Lambda}}$  est le tenseur des propriétés d'élasticité,  $Q$  est le module d'écrouissage isotrope,  $C$  est le module d'écrouissage cinématique,  $\check{H}$  est le module de l'endommagement micromorphique et  $\check{H}_g$  est celui de son premier gradient. Les relations d'état (7) conduisent aisément à :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-D) \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \text{(a)} \quad R = (1-D) Q r \quad \text{(b)} \quad \underline{\underline{X}} = \frac{2}{3} (1-D) C : \underline{\underline{\alpha}} \quad \text{(c)} \quad (10)$$

$$Y = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{1}{2} Q r^2 + \frac{1}{3} C \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + \check{Y} \quad \text{(a)} \quad \check{Y} = -\check{H} (D - \check{D}) \quad \text{(b)} \quad \check{\nabla} \check{Y} = \check{H}_g \check{\nabla} \check{D} \quad \text{(c)} \quad (11)$$

S'agissant d'une dissipation parfaitement locale, nous choisissons une fonction de charge de type Von Mises et un potentiel plastique comme dans [8] qui conduisent aux relations de comportement, parfaitement classiques, suivantes:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} = \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{N}}}{\sqrt{1-D}} \quad \text{(a)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{N}} = \frac{3(\underline{\underline{\sigma}}^{dev} - \underline{\underline{X}})}{2 \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}\|} \quad \text{(b)} \quad (12)$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{(1-D)}} - br \right) \quad (a) \quad \underline{\dot{\alpha}} = (\underline{\dot{\epsilon}}^p - a\dot{\lambda}\underline{\alpha}) \quad (b) \quad (13)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)^\beta} \left( \frac{\langle Y - Y_0 \rangle}{S} \right)^s = \dot{\lambda} Y^* \quad (14)$$

où  $(b, Q)$  et  $(a, C)$  sont respectivement les paramètres de l'érouissage isotrope et cinématique,  $(S, s, \beta, Y_0)$  sont des paramètres caractéristiques de l'endommagement local,  $\underline{N}$  est la normale à la surface de charge dans l'espace des contraintes effectives. Remarquons que si l'on remplace les expressions des forces micromorphiques  $\tilde{Y}$  (11b) et  $\tilde{Y}$  (11c) dans l'équation d'équilibre micromorphique (5b) dans le cas particulier où les forces volumiques micromorphiques sont négligées (i.e.  $f^D = 0$  et  $\vec{B}^D = \vec{0}$ ), nous obtenons:

$$\begin{cases} \tilde{H}_g \Delta \tilde{D} + \tilde{H} (D - \tilde{D}) = \rho l_D^2 \ddot{\tilde{D}} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{V} \tilde{D} \cdot \vec{n} = F^{\tilde{D}} & \text{sur } \Gamma_F^{\tilde{D}} \end{cases} \quad (15)$$

Expressions largement exploitées dans la littérature pour régulariser le PVIL avec adoucissement [9]. Dans ce qui suit, c'est cette équation qui sera à l'origine de la formulation variationnelle associée à ce problème.

### 3 Résolution numérique du PVIL

En introduisant les fonctions test  $\delta \tilde{u}$  et  $\delta \tilde{D}$ , les formes faibles associées aux formes fortes (5a) pour l'équilibre et (15) pour l'endommagement micromorphique dans laquelle les forces de contact micromorphiques sont négligées ( $F^{\tilde{D}} = 0$ ), s'écrivent :

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \delta \underline{\dot{\epsilon}}^e d\Omega + \int_{\Omega_v} \vec{f} \cdot \delta \dot{\vec{u}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \vec{F} \cdot \delta \dot{\vec{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \dot{\vec{u}} d\Omega = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \text{ C.A} & (a) \\ - \int_{\Omega} \tilde{H}_g \tilde{V} \tilde{D} \delta \tilde{D} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{H} (D - \tilde{D}) \delta \tilde{D} d\Omega - \int_{\Omega} \rho l_D^2 \ddot{\tilde{D}} \delta \tilde{D} d\Omega = 0 \quad \forall \delta \tilde{D} \text{ C.A} & (b) \end{cases} \quad (16)$$

Le domaine de résolution  $\Omega$  étant discrétisé en  $N^e$  éléments finis chacun ayant un volume élémentaire  $\Omega^e$ , en utilisant la méthode classique de Galerkin, nous arrivons aux formes faibles discrétisées sur un élément typique sous la forme (notation matricielle) :

$$\begin{cases} \mathbf{I}^{(e)} = \langle \delta \dot{\vec{u}}^e \rangle \left( [\mathbf{M}^e] \{ \dot{\vec{u}}^e \} + \{ F_{\text{int}}^e \} - \{ F_{\text{ext}}^e \} \right) & (a) \\ \mathbf{I}^{(e)} = \langle \delta \dot{\tilde{D}}^e \rangle \left( [\tilde{\mathbf{M}}^e] \{ \dot{\tilde{D}}^e \} + \{ \tilde{F}_{\text{int}}^e \} \right) & (b) \end{cases} \quad (17)$$

Avec les matrices de masse élémentaires :

$$[\mathbf{M}^e] = \int_{\Omega^e} \rho [N_i^e]^T [N_i^e] d\Omega^e \quad (a) \quad \text{et} \quad [\tilde{\mathbf{M}}^e] = \int_{\Omega^e} \rho l_D^2 [\tilde{N}_i^e]^T [\tilde{N}_i^e] d\Omega^e \quad (b) \quad (18)$$

et les vecteurs forces élémentaires ;

$$\{ F_{\text{int}}^e \} = \int_{\Omega^e} [B^e]^T \{ \sigma^e \} d\Omega^e \quad (a) \quad \text{et} \quad [F_{\text{ext}}^e] = \int_{\Omega^e} [N^e]^T \{ f_v^e \} d\Omega^e + \int_{\partial\Omega_f^e} [N^e]^T \{ F \} d\partial\Omega \quad (b) \quad (19)$$

$$\{\tilde{F}_{int}^e\} = \int_{\Omega^e} \left( [\tilde{B}^e]^T \{\tilde{Y}^e\} + \bar{H} [\tilde{N}_i^e]^T [\tilde{N}_i^e] \{\tilde{D}\} - \bar{H} [\tilde{N}_i^e]^T D \right) d\Omega^e \quad (20)$$

Après assemblage sur tous les éléments de la structure et introduction des conditions aux limites de Dirichlet, nous aboutissons à chaque incrément de charge  $[t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t]$  au système global suivant :

$$\begin{cases} \left( \sum_{e=1}^{N_e} [M^e] \{\ddot{u}^e\} + \sum_{e=1}^{N_e} \{F_{int}^e\} - \sum_{e=1}^{N_e} \{F_{ext}^e\} \right)_{n+1} = \{0\} & (a) \\ \left( \sum_{e=1}^{N_e} [\tilde{M}^e] \{\ddot{D}^e\} + \sum_{e=1}^{N_e} \{\tilde{F}_{int}^e\} \right)_{n+1} = \{0\} & (b) \end{cases} \quad (21)$$

Le système (21) est résolu sur chaque intervalle  $[t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t]$  par un schéma dynamique explicite en utilisant les matrices de masse diagonales conformément à la procédure séquentielle préconisée dans ABAQUS/EXPLICIT. On commence par résoudre le problème mécanique (21a) à endommagement micromorphique constant égale à  $\tilde{D}_n$ . Aussitôt les inconnues mécaniques nodales déterminées (i.e.  $\tilde{u}_{n+1}$ ) on calcule par intégration locale les variables d'état en chaque point d'intégration : les contraintes  $(\underline{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}, \underline{X}_{n+1}, Y_{n+1})$  et les déformations  $\underline{\epsilon}_{n+1}, r_{n+1}, \underline{\alpha}_{n+1}, D_{n+1}$  comme discuté en détail dans [8]. Sur le même intervalle  $[t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t]$  on résout alors le deuxième problème (21b) pour calculer  $\tilde{D}_{n+1}$  en tous les nœuds. Ce modèle a été implémenté dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT en utilisant les sous-programmes VUMAT pour implémenter le modèle de comportement et VUEL pour implémenter les éléments finis à ddl additionnel.

### 3.1 Application à une éprouvette en traction :

Considérons une éprouvette 2D de dimension (50\*150) soumise à une traction uniaxiale en supposant l'hypothèse des déformations planes. Les paramètres du matériau choisis sont définis comme suit :  $E = 210000MPa$ ,  $\nu = 0.29$ ,  $\sigma_y = 400MPa$ ,  $Q = 1000MPa$ ,  $b = 50$ ,  $\beta = 1$ ,  $S = 1.2$ ,  $s = 1$ ,  $Y_0 = 0$  et  $\tilde{H} = \tilde{H}_g = 1000$ . La plaque est encadrée sur un coté et un déplacement est imposé sur l'autre coté. Trois maillages réguliers (au moins sur la partie centrale) de taille  $h=5mm$ ,  $h=2mm$  et  $h=1mm$  sont utilisés en utilisant des éléments quadrangulaires bilinéaires avec élimination de modes parasites (Hourglass control).

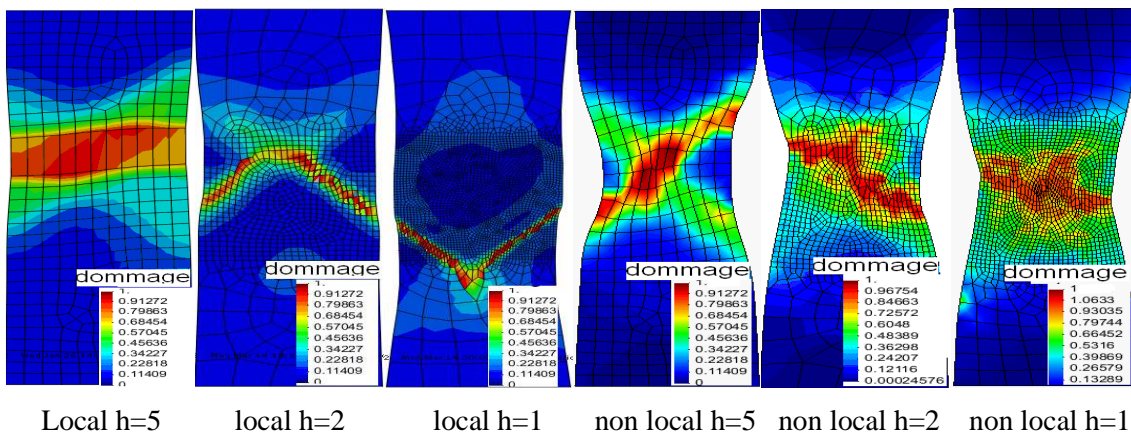


FIG. 1 – Distribution de l'endommagement pour les 3 maillages ( $h=5$ ,  $h=2$ ,  $h=1$  mm) en local et en non local avec  $\tilde{H} = \tilde{H}_g = 1000$

La figure 1 montre une comparaison entre les isovaleurs de l'endommagement obtenues avec le modèle purement local et le modèle non local pour les trois maillages considérés. On note bien que la solution locale est très sensible au maillage alors que la solution non locale l'est beaucoup moins. En effet, la zone totalement endommagée (lieu des points où  $D = 1$ ) ou fissure est répartie sur plusieurs rangées d'éléments pour la formulation non locale et possède la même orientation pour les deux maillages les plus fins (convergence). Alors que pour la formulation locale la zone totalement endommagée est toujours cantonnée à une seule rangée d'éléments et ce quelque soit la finesse du maillage et son orientation est extrêmement sensible à la taille du maillage comme attendu. A notre connaissance ce résultat est original car dans les autres modélisations non locales cette indépendance vis-à-vis du maillage n'apparaît que pour de faibles valeurs de l'endommagement bien plus faibles que l'endommagement critique  $D = 1$  [10]. Ce résultat d'indépendance de la solution du PVIL vis-à-vis de la taille du maillage est confirmée par les courbes force-déplacement présentées sur la figure 2.

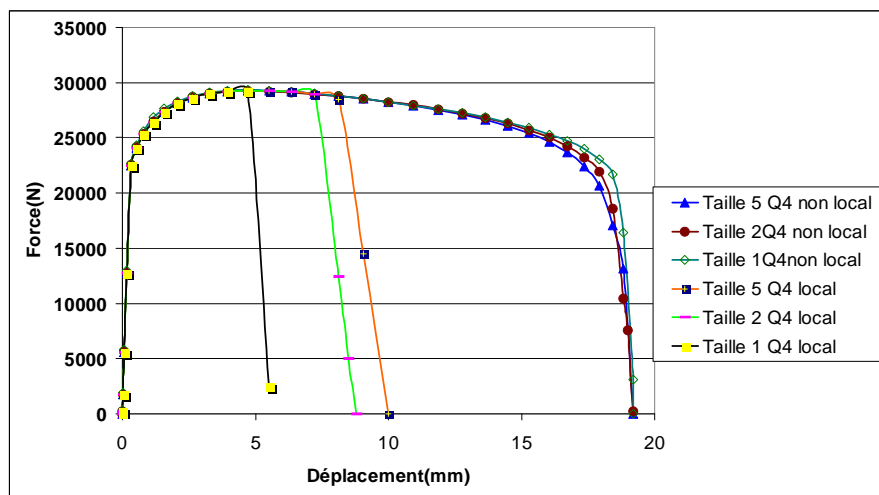


FIG. 2 – Courbes Force-déplacement pour les trois maillages avec les deux formulations locale et non locale

## References

- [1] Peerlings, R.H.J., Geers, M.G.D., de Borst, R., and Brekelmans, W.A.M.. Acritical comparison of non local and gradient enhanced softening continua, *European Journal of mechanics A/Solids*, 21, 175-189, 2001.
- [2] D. Sornin, K. Saanouni, About elastoplastic non-local formulations with damage gradients, *Int. J. of Damage Mechanics*, on line 12 October 2009, as doi:10.1177/1056789509343509
- [3] Forest S., and Sievert R. Non linear microstrain theories. *Int. J. Solids Struct.* 43 7224-7245, 2006.
- [4] Forest, S., Barbe, F., and Cailletaud, G. Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials. *Int. J. Solids Struct.*, 37, 7105-7126, 2000.
- [5] Forest, S., and Sievert, R., Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mech.*, 160, 71-111, 2003.
- [6] B. Nedjar., Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: Formulation and computational aspects. *Int. J. Solids Struct.* 38, 5421-5451, 2001.
- [7] Forest S., Micromorphic Approach for Gradient Elasticity, Viscoplasticity, and Damage, *J. Engrg. Mech.* 135, 117, 2009.
- [8] Saanouni, K., Chaboche, J.-L., Computational damage mechanics. Application to metal forming, chapter 7 vol. 3 321-376, 2003
- [9] M.G.D. Geers, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, R.H.J. Peerlings., Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 160 133-153, 1998
- [10] J.César-De-Sa, P. Areias, and al, Gradient damage models in metal forming problems using an implicit non-local gradient model. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195, 6646-6660, 2006.