

Effet du choix d'un modèle thermomécanique 3D de comportement des alliages à mémoire de forme sur la prédiction de la rupture et de la délamination

C. LExcellent, R.M. Laydi

Département DMA, FEMTO-ST (UMR CNRS 6174), Université de Franche-Comté,
24 rue de l'Épithaphe, 25000 Besançon, France

Résumé

Le but de ce travail est d'examiner l'effet du choix d'un modèle 3D de comportement des alliages à mémoire de forme (AMF) sur la forme géométrique des surfaces de transformation de phase. Ces modèles choisis comme « inspirés de la plasticité » sont soit de type Huber-Von Mises soit J_2 , soit prenant en compte la dissymétrie entre la traction et la compression c'est-à-dire J_2, J_3 . Deux cas sont étudiés

- (i) Un chargement classique en mode I sur une éprouvette fissurée. L'effet de la dissymétrie est plus perceptible en contrainte plane qu'en déformation plane.
- (ii) Un problème de délamination entre un AMF et un solide élastique isotrope, révèle que prendre en compte, dans ce cas, la dissymétrie, a un impact négligeable sur la taille et la forme des surfaces de transformation de phase générées sur les AMF.

Abstract

The aim of this paper is to examine the impact of the choice of σ -plasticity theory-inspired SMA models in the prediction of the shape of phase transformation domains. In this field a comparison is made between Huber-Von Mises based model J_2 and another integrating the asymmetry between tension and compression (J_2, J_3). Two situations are observed

- (i) A classical mode I loading on a plate with a crack. The effect of the asymmetry intensity is important for plane stress conditions, not for plane strain ones.
- (ii) A problem of delamination between a SMA (shape memory alloy) and an elastic solid, reveals that taking into account the asymmetry has negligible impact on the size and the shape of the phase transformation surface generated in SMAs.

Mots clefs : Alliages à mémoire de forme ; pseudoélasticité ; mécanique de la rupture ; surface frontière

1. Introduction

L'étude est focalisée sur quelques modèles AMF inspirés de la plasticité (voir par exemple Auricchio et al [1], Zaki et Moumni [2] et particulièrement les investigations de Raniecki et LExcellent [3]).

Concernant d'autres approches, une revue a été effectuée sur le comportement thermomécanique des monocristaux (Patoor et al [4]) et des polycristaux (Lagoudas et al [5]). Comme en plasticité, un ingrédient important est la détermination des surfaces frontières de transformation de phase.

La dissymétrie entre la traction et la compression a été mise en évidence expérimentalement par Vacher et LExcellent [6] sur des AMF à base de cuivre et Orgeas et Favier [7] sur des Ni-Ti. Le modèle 3D doit être de nature J_2, J_3 (voir par exemple Bouvet et al [8]).

Mais vient une question : quel est l'impact du choix d'un modèle 3D intégrant ou non la dissymétrie traction-compression sur la forme des surfaces frontières de transformation de phase pour quelques problèmes de

mécanique ? (i) sur une plaque fissurée sollicitée en mode I (II ou III) (ii) pour une fissure à l'interface entre un matériau AMF et un milieu élastique isotrope.

2. Détermination de la surface de transformation de phase au voisinage de la pointe de la fissure

Dans ce travail, seulement le mode I est investi (les calculs pour les modes II et III sont structurellement les mêmes). Sous l'hypothèse de la petite taille de la zone de transformation ce qui est vérifié expérimentalement par les tests de Daly et al [9] sur des feuilles de NiTi, la théorie élastique linéaire de la mécanique de la rupture permet de connaître le champ de contrainte aux alentours de la pointe de la fissure.

$$\underline{\sigma}_M(r, \theta) = \chi_1(r) \underline{q}_1(\theta) \quad (1)$$

où (r, θ) constituent les coordonnées polaires du point M avec la pointe de la fissure comme origine. Ainsi

$$\chi_1(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} > 0, \quad \underline{q}_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) & 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta \end{pmatrix} \quad (2), (3)$$

L'équation (3) peut être trouvée dans la littérature concernant le mode I pour la théorie classique linéaire de la mécanique de la rupture

$$\text{et } \beta = (1 : \text{CP contrainte plane} ; 1 - 2\nu : \text{DP deformation plane}) \quad (4)$$

Ainsi, le tenseur déviateur des contraintes peut être défini par

$$\underline{S}_\sigma = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma} \underline{1} \quad ; \quad \underline{S}_\sigma = \chi_1(r) S_{q_1}(\theta) \quad (5), (6)$$

$S_{q_1}(\theta)$ représente le déviateur de $\underline{q}_1(\theta)$. L'indice $\underline{\sigma}$ représente la contrainte totale et l'indice q la composante dépendante de θ .

Classiquement, la contrainte équivalente de Huber-Von Mises est identifiée par

$$\bar{\sigma} = \kappa |\underline{S}_\sigma| \quad ; \quad \kappa = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad ; \quad |\underline{S}_\sigma| = |\underline{S}_\sigma : \underline{S}_\sigma|^{1/2} \quad (7)$$

L'équation de la surface frontière de début de transformation de phase (austenite A → martensite M) s'écrit

$$F(\underline{\sigma}) = \bar{\sigma} f(y_\sigma) = b(T - M_s) = \sigma_c \quad (8)$$

où $f > 0$, est une fonction régulière (sa dérivée seconde est continue). En fait, f est introduite afin de prendre en compte la dissymétrie entre la traction et la compression appelée « effet différentiel de la contrainte » par Raniecki and Mroz [10].

σ_c constitue la contrainte critère pour l'initiation de la transformation de phase

M_s : la température de début de transformation de phase à l'état libre de contrainte

b : la pente de σ_c avec la température $T \left(\frac{d\sigma_c}{dT} \right)$

Bouvet et al [8] choisissent f comme fonction de l'invariant de Lode y

$$f(y_\sigma) = \cos \left[\frac{\cos^{-1}(1 - a(1 - y_\sigma))}{3} \right], \quad y_\sigma = 6\kappa \frac{\det(\underline{S}_\sigma)}{|\underline{S}_\sigma|^3} \quad (9), (10)$$

Et, dans ce cas, y est indépendant de la variable r.

Ainsi, on obtient le rayon frontière r(θ) avec θ variant de (-π) à (+π)

$$r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma} \right)^2 \kappa^2 |S_{q1}(\theta)|^2 \quad (11)$$

Si l'on introduit dans la fonction critère (eq.8) un rayon adimensionnel r_L(θ) défini par

$$r_L(\theta) = \frac{r(\theta)}{L_{AMF}} = R(\theta) f^2(y_\sigma) ; R(\theta) = 3 |S_{q1}(\theta)|^2 ; L_{AMF} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 \quad (14), (15)$$

les calculs de R(θ) et de y peuvent être effectués

$$R(\theta) = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{3}{2} (1 - \cos(\theta)) \right) + \beta^2 ; y_\sigma(\theta) = 2\kappa\beta \frac{1 - \cos(\theta) - \frac{2}{9}\beta^2}{\left(1 - \cos(\theta) + \frac{2}{3}\beta^2 \right)^{3/2}} \quad (16)$$

Enfin, le rayon adimensionnel r_L(θ) peut être obtenu à partir de l'équation (14) en utilisant la fonction de correction f(y) définie dans l'équation (9).

La figure 1 montre l'évolution de r_L avec θ en CP pour plusieurs valeurs du paramètre a (a ∈ [0,1]). La forme de la courbe frontière est fortement dépendante de la valeur de a, c'est-à-dire de l'intensité de la dissymétrie entre la traction et la compression.

Ce n'est pas vraiment le cas en DP (voir figure 2) où la dissymétrie a une influence négligeable sur la forme et la taille de la courbe limite.

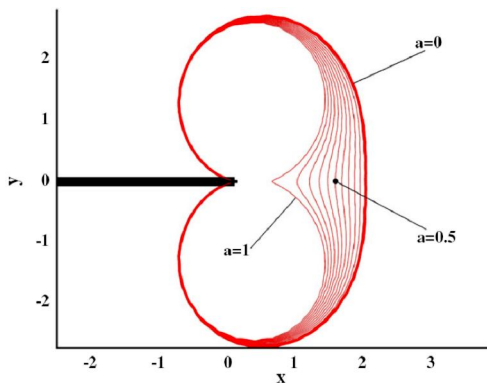


Fig. 1 : Zone de transformation de phase normalisée r_L(θ) en CP pour plusieurs valeurs de a : a ∈ [0,1]

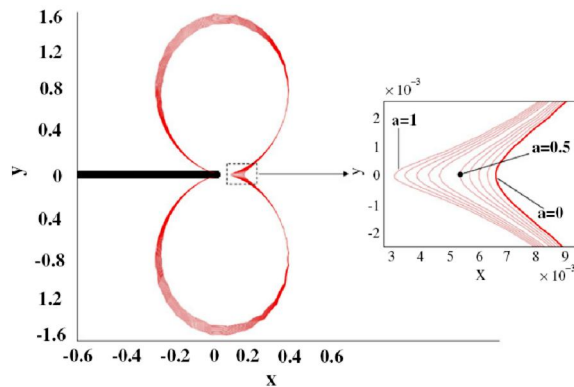


Fig. 2 : Zone de transformation de phase normalisée r_L(θ) en DP pour plusieurs valeurs de a : a ∈ [0,1]

Sous l'hypothèse que la transformation de phase puisse être totale, on peut prédire la surface frontière en remplaçant M_S par M_F (M_F : température de fin d'apparition de la martensite à l'état libre de contrainte) dans l'équation (8).

3 Un problème de délamination entre un AMF et un solide élastique isotrope

En référence au travail de Rice et al. [11], nous étudions la théorie de la rupture élasto-fragile pour des fissures situées entre deux solides différents : la couche supérieure est un AMF (Matériau 1) et la couche inférieure un matériau élastique isotrope (Matériau 2) comme le montre la figure 3.

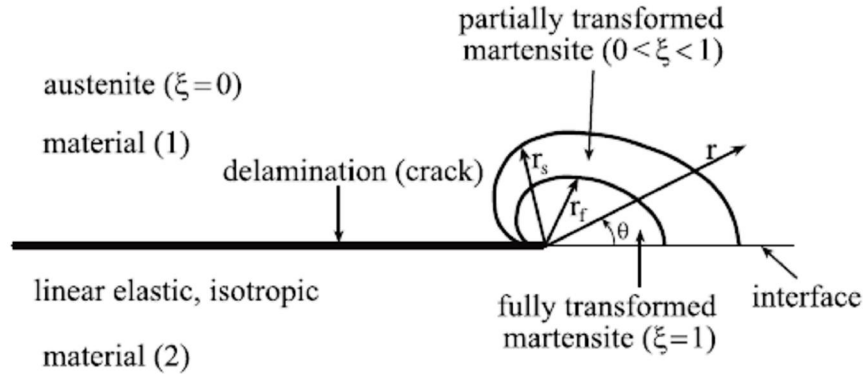


FIG. 3 Un interface typique entre un AMF et un milieu élastique isotrope

De facture classique, les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure sont en $1/\sqrt{r}$, ce qui signifie qu'elles n'ont pas de limite quand $r \rightarrow 0$. En guise de conséquence, une contrainte induite par la transformation de phase (ou une réorientation des variantes de martensite) apparaît au voisinage de la pointe de la fissure dès le chargement mécanique. Ainsi une perturbation est observée dans cette région.

Le premier travail consiste à prédire les surfaces de début (ou de fin) de transformation de phase autour de la pointe de la fissure (voir la figure 3).

Sous l'hypothèse d'un comportement symétrique entre la traction et la compression pour le comportement pseudoélastique des AMF, Freed et al [12] ont construit ces surfaces. Dans notre investigation, la dissymétrie entre la traction et la compression est intégrée.

Le champ de contraintes est donné par Rice et al [1] pour deux matériaux élastiques collés

$$\underline{\sigma}(r, \theta, \varepsilon, \bar{\nu}) = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi r}} \underline{\Sigma}(\underline{\psi}, \theta, \varepsilon, \bar{\nu}) \quad , \quad \underline{\psi}(\underline{r} = r(\theta = 0), \varepsilon) = \psi + \varepsilon \text{Log}\left(\frac{\underline{r}}{L}\right) \quad (17)$$

est appelé le paramètre d'oscillation dont la valeur intègre le ratio entre les constantes élastiques (E_i, ν_i) des deux matériaux.

θ est une donnée angulaire.

$\bar{\nu}$ permet de faire la distinction entre la contrainte plane (CP) et la déformation plane (DP).

Des calculs identiques que dans la partie 2, délivrent le rayon critère $r(\theta)$ sous la forme simple

$$r = L \rho^2 |F(\underline{\Sigma})|^2 \quad , \quad L = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{|K|}{C_M(T - M_f)} \right)^2 \quad (18)$$

avec

$$\rho = \begin{cases} \rho_s = (T - M_f)/(T - M_s) > 1 \text{ pour "M début"}; \\ \rho_f = 1 \text{ pour "M fin"} \end{cases} \quad (19)$$

La valeur de $\underline{\psi}$ est obtenue par la résolution d'un système non linéaire

$$\dot{\bar{\sigma}} = L \rho^2 \left| F \left(\underline{\underline{\dot{\psi}}} = \psi + \varepsilon \text{Log} \left(\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{L}} \right) \right) \right| ; \quad \underline{\underline{\dot{\psi}}}(\dot{\bar{\sigma}}) = \underline{\underline{\dot{\psi}}}(\dot{\bar{\sigma}}, \theta = 0, \varepsilon, \bar{\nu}) \tag{20}$$

Données matérielles

$\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$; Mat. 1 : $A E_1 = E_A = 70 \text{ GPa}$, $M : E_1 = E_M = 30 \text{ GPa}$; Mat. 2 : $E_2 = 30 \text{ GPa}$
 $\rho_s = 2$, $\bar{L} = 5.10^{-3} \text{ m}$, $L = 4.10^{-2} \text{ m}$ (les mêmes valeurs que celles données par Fred et al [12].

La figure 4 (resp. 5) représente la zone de transformation pour les conditions de contraintes planes (resp. déformation planes) avec $\psi_f = \psi_s = 45^\circ$ ($a = 0$, symétrie $a = 1$ dissymétrie maximale).

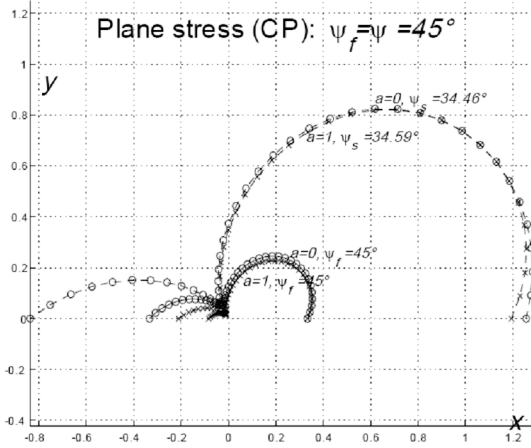


Fig. 4 : Zones de transformation en contraintes planes

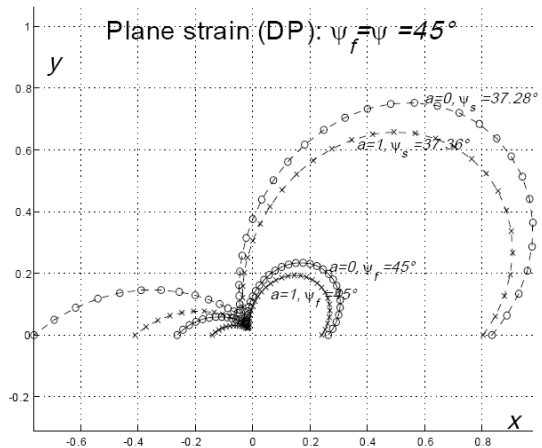


Fig.5 : Zones de transformation en déformations planes

L'observation des différentes courbes montrent que la taille et la forme des surfaces frontières sont sensiblement les mêmes pour la symétrie et la dissymétrie maximale. De plus, nous avons effectué beaucoup de simulations avec différentes valeurs de E_A et E_M versus E_2 et aussi différents ν sans changements notables.

La preuve de l'existence de l'angle de Rice $\dot{\psi}$ peut être trouvée dans une publication délivrée par Laydi et L'excellent [13].

4 Conclusion

Si l'on examine pour le mode I, les surfaces frontières prédites, l'effet de la dissymétrie est évident en CP, moins sensible en DP [14].

Enfin, pour un problème de délamination entre une couche supérieure en AMF et une couche inférieure constituée d'un matériau élastique isotrope, l'impact de la dissymétrie dans la prédiction est négligeable. Une sérieuse expertise du tenseur des contraintes délivré par Rice et al [11] peut expliquer cette constatation.

References

- [1] Auricchio F., Reali A., Stefanelli U., A three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent elasticity, *Int. J. of Plasticity*, 24(4), 207-226, 2007.
- [2] Zaki N., Moumni Z., A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys, *J. Mech. Phys. Solids*, 55, 2455-2490, 2005.
- [3] Raniecki B., Lexcellent C., Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys, *Eur. J. Mech. A Solids*, 17, 185-205, 1998.
- [4] Patoor E., Lagoudas D.C., Entchev P.L., Brinson L.C., Gao X., Shape memory alloys ó Part I : General properties and modeling of single crystals, *Mech. of Mat.*, 38(5-6), 391-429, 2006.
- [5] Lagoudas D.C., Entchev P.B., Popov P., Patoor E., Brinson L.C., Gao X., Shape memory alloys ó Part II : Modeling of polycrystals, *Mech. of Mat.*, 38(5-6), 430-462, 2006.
- [6] Vacher P., Lexcellent C., Study of pseudoelastic behavior of polycrystalline SMA by resistivity measurements and acoustic emission, In: Pergamon Press Editors Jono M. and Inoue T., *Proc. of ICM 6*, 231-236, 1991.
- [7] Orgeas L., Favier D., Stress-induced martensitic transformation of a Ni-Ti alloy in isothermal shear, tension and compression, *Acta Materialia*, 46(15), 5579-5591, 1998.
- [8] Bouvet C., Calloch S., Lexcellent C., Mechanical behavior of a Cu-Al-Be shape memory alloy under multiaxial proportional and non-proportional loadings, *Journal of Engineering Material and Technology*, 124, 112-124, 2002.
- [9] Daly S., Miller A., Ravichandran G., Bhattacharya K., An experimental investigation of crack initiation in thin sheets of nitinol, *Acta Mater.*, 55(18), 6322-6330, 2007.
- [10] Raniecki B., Mroz S., Yield or martensitic phase transformation conditions and dissipation functions for isotropic, pressure-insensitive alloys exhibiting SD effect, *Acta Mech.*, 195(1-4), 81-102, 2008.
- [11] Rice J.R., Suo Z., Wang J.S., Mechanics and thermodynamics of brittle interfacial failure in bimaterial systems, In: Ruhle M., Evans A.C., Ashby M.F., Hirth J.P. (eds) *Metal Ceramic Interfaces*, Pergamon Press, New York, 269-294, 1990.
- [12] Freed L., Banks-Sill L., Aboudi J., On the transformation toughening of a crack along an interface between a shape memory alloy and an isotropic medium, *J. Mech. Phys. Solids*, 56, 3003-3020, 2008.
- [13] Laydi R.M., Lexcellent C., Yield criteria for shape memory materials : convexity and surface transport, *Math. Mech. Solids*, 15, 165-208, 2010.
- [14] Lexcellent C., Thiebaud F., Determination of the phase transformation zone at a crack tip in a shape memory alloy exhibiting asymmetry between tension and compression, *Scripta Mater.*, 59, 321-323, 2008.