

# Modèle probabiliste de propagation de fissures de fatigue

M. TOUZET<sup>a</sup>, R. AZAIS<sup>b</sup>, A. GEGOUT-PETIT<sup>b</sup>, C. ELEGBEDE<sup>c</sup>, M. PUIGGALI<sup>a</sup>

a. Université Bordeaux, I2M, UMR 5295 CNRS, 351 cours de la Libération 33405 Talence cedex.

b. Université Bordeaux, IM, UMR 5152 INRIA CQFD, 351 cours de la Libération 33405 Talence cedex.

c. Astrium, IMB, Avenue du Gal Niox, BP 11 Saint Médard en Jalles.

---

## Résumé

*Le caractère aléatoire marqué de la propagation des fissures de fatigue conduit fréquemment à l'utilisation de modèles probabilistes. Nous proposons ici, en utilisant la loi de Paris et à partir des données de Virkler, de comparer deux modélisations stochastiques différentes des paramètres  $m$  et  $C$  de la loi déterministe de Paris : dans le premier modèle, le couple  $(m, C)$  est une variable aléatoire choisie initialement, alors que dans le second, ce couple évolue selon une chaîne de Markov. Cela conduit à voir la propagation de fissure comme un processus markovien déterministe par morceaux (PDMP) avec un seul saut. Nous avons proposé une méthode d'actualisation pour chacun des modèles. Les résultats montrent que globalement le modèle PDMP donne de meilleurs résultats car il traduit mieux le changement de régime de propagation des fissures en fin d'essai.*

## Abstract

*The random nature of fatigue crack propagation leads frequently to use probabilistic models. In this study, we propose to compare two models: a stochastic model of the parameters  $m$  and  $C$  comin from the deterministic Paris law and a Piecewise Deterministic Markov Processes (PDMP) with only one jump. In the PDMP model, the pair of Paris law parameters  $(m, C)$  is modified at a random time of the trajectory. Results show that PDMP model is well adapted because it predicts more accurately the change of crack propagation regime at the end of the test. Good results of the PDMP model are confirmed by the use of an actualization method.*

**Mots clefs :** Fatigue crack growth, Paris law, Piecewise Deterministic Markov Process, actualization methods.

## 1. Introduction

L'utilisation de modèles probabilistes de propagation de fissures n'est pas récente car elle traduit la dispersion des résultats des essais de fatigue [VIR79], [LAP96], [WU07]. A l'heure actuelle, il est communément admis que ces variabilités sont notamment liées aux inhomogénéités microstructurales des

matériaux étudiés. Les plus classiques de ces modèles probabilistes sont ceux qui utilisent la loi de Paris pour traduire la propagation des fissures de fatigue. Cette loi déterministe [PAR63] qui relie la vitesse d'avancée par cycle de la fissure et l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes s'écrit

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K(a))^m .$$

On rend aléatoire le couple de paramètres  $(m,C)$  de cette loi pour traduire la dispersion des résultats. Shen et ses coauteurs [SHE01] montrent que dans le régime de Paris, les coefficients  $m$  et  $\ln C$  peuvent être caractérisés par des distributions normales. Kotulski [KOT98] et Perrin [Per08] mettent en évidence une très forte corrélation entre les paramètres  $m$  et  $\ln C$ , ce qui pourrait laisser penser qu'il existe un paramètre unique permettant de décrire la variabilité des résultats d'un essai à l'autre. Lapetra et al [LAP96] montrent cependant que la loi de Paris ne permet pas de décrire correctement la propagation des fissures pour les valeurs extrêmes de  $\Delta K$ . Chiquet [CHI08] utilise un processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP) avec un espace d'états très riche pour rendre compte de la dispersion des comportements de fissures.

L'ensemble de ces études met en évidence tout l'intérêt des approches probabilistes pour caractériser la grande variabilité des résultats obtenus lors d'essais de fatigue. Pour compléter ces approches, nous proposons de comparer deux modèles : un modèle simple de propagation suivant la loi de Paris avec modélisation de la loi du couple  $(m,C)$  et un modèle où ce couple  $(m,C)$  change de manière aléatoire en un temps aléatoire ; la longueur de la fissure est alors un PDMP avec un seul saut. Cette seconde modélisation permet d'assouplir le premier modèle pour prendre en compte un éventuel changement de régime de la loi de Paris. Nous avons utilisé pour chacun de ces modèles une méthode d'actualisation [PER08]. Cela consiste à utiliser une information supplémentaire disponible afin d'affiner le modèle dans le but de prédire la propagation d'une fissure donnée. Ceci nous permet aussi de comparer les deux approches.

## 2. Modélisation

Les paramètres des modèles ont été estimés en utilisant les résultats expérimentaux de Virkler et al [VIR79]. Pour mettre en évidence la nature aléatoire de la propagation, ces auteurs ont réalisé une campagne importante d'essais de fatigue sur des éprouvettes pré-fissurées d'alliage d'aluminium 2024-T3. Ils ont donc fait 68 essais identiques de propagation sous amplitude de chargement constante  $\Delta\sigma = 48 \text{ MPa}$  et pour un rapport de charge  $R=0,2$ . Pour chaque essai, ils ont suivi l'évolution de la longueur de la fissure (dont la longueur initiale était de 9 mm) en fonction du nombre de cycles et ont obtenu 164 points de mesures par essai. Les essais ont été arrêtés quand la fissure a atteint une longueur de 49,8 mm, ce qui correspond à un nombre de cycles compris entre 223 000 et 321 000.

Dans le régime dit de « Paris », considérons la loi déterministe de Paris-Erdogan [Par63] qui permet de relier la vitesse d'avancée par cycle et l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes (FIC) c'est-à-dire :

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta\sigma \sqrt{\pi a} \times \cos\left(\frac{\pi a}{\omega}\right)^{-1/2} \right)^m$$

avec  $a$  la longueur de la fissure,  $N$  le nombre de cycles,  $\Delta\sigma$  l'amplitude du chargement,  $m$  et  $C$  les paramètres caractéristiques de la loi de Paris et  $\omega$  la largeur de l'éprouvette rectangulaire.

## 2.1 Modèle simple

Nous proposons ici de modéliser le couple  $(m, C)$  par deux variables aléatoires. L'ajustement sur les données de Virkler nous conduit à proposer un mélange de deux gaussiennes pour la loi de  $\ln C$  et une transformation linéaire bruitée de  $\ln C$  pour  $m$ . Notons que nous avons retrouvé la relation linéaire entre ces 2 paramètres citée par certains auteurs [LAP96], [PER08]. Les valeurs des paramètres sont les suivants, la loi de  $\ln C$  est donnée par le mélange de gaussiennes :  $\mathcal{N}(-24,41 ; 0,17)$  et  $\mathcal{N}(-26,3 ; 0,21)$  dans les proportions respectives 0,29 et 0,71. La relation linéaire est  $\ln C = -0,169 * m - 1,544 + \varepsilon$  avec l'erreur  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0 ; 1,4 \cdot 10^{-4})$ .

## 2.2 Modèle PDMP

Dans ce modèle, toujours basé sur la loi de Paris, le couple  $(m, C)$  est une chaîne de Markov à un saut. Ainsi la dynamique d'une fissure de ce modèle est la suivante : la vitesse de propagation suit la loi de Paris avec un couple  $(m, C)$  choisi aléatoirement à l'instant initial mais ce couple  $(m, C)$  est modifié à un instant aléatoire en cours de propagation suivant un noyau de Markov. Bien que le nombre de valeurs possibles de ce couple soient finies, ce modèle a beaucoup de souplesse apportée par le changement possible de ces valeurs en cours de propagation. Nous avons choisi un modèle à 20 états pour le couple  $(m, \ln C)$  avec les valeurs de  $m$  choisies entre 2,31 et 2,60 et les valeurs de  $\ln C$  liés par une relation linéaire (voir [AZA10]). La distribution initiale donne moins de poids aux valeurs extrêmes.

A titre d'exemple, la figure 1 présente les résultats des simulations du modèle. On voit très nettement que le faisceau des courbes simulées (à gauche) englobe bien celui des courbes expérimentales. Ce modèle à 1 saut permet de simuler les changements de régime qui sont très clairement visibles sur les simulations des fissures les plus lentes. Ici, par rapport à des travaux antérieurs réalisés sur ces mêmes données de Virkler, l'utilisation de modèle à un saut permet une description convenable sur toute la durée des essais alors que Perrin et al [PER08] s'arrêtaient à 200 000 cycles.

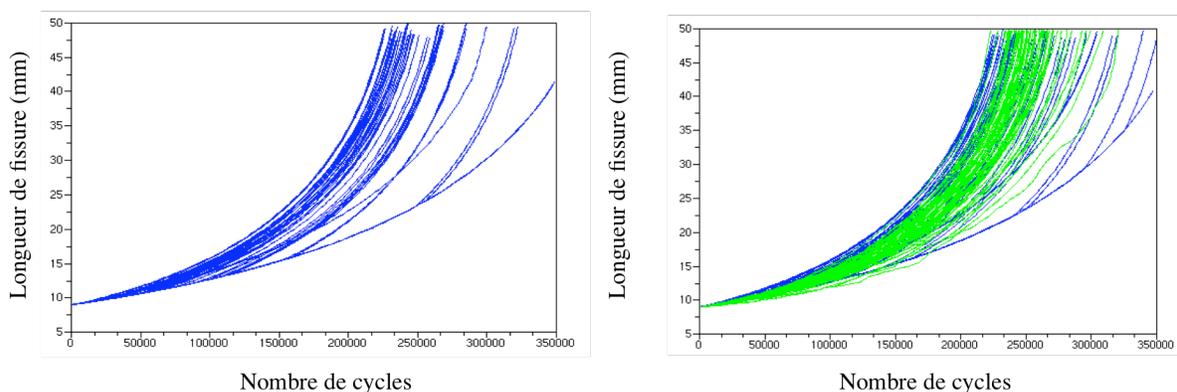


FIG. 1 – Résultat des simulations (bleu) du modèle PDMP à un saut. Les résultats expérimentaux de Virkler sont en vert.

Cependant, si l'objectif est la prédiction la plus précise possible de l'évolution de la taille d'une fissure donnée, on voit bien que la largeur du faisceau est trop grande et l'intervalle de longueur pour un temps

d'essai donné est beaucoup trop important. En effet, pour une durée de chargement de 200 000 cycles, la taille possible d'une fissure est comprise entre 17 et 35 mm. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons décidé d'utiliser une technique d'actualisation développée ci-dessous.

## 2.3 Actualisation

Pour chacun des deux modèles décrits ci-dessus, nous proposons une méthode d'actualisation qui consiste à affiner la modélisation grâce à la connaissance de quelques mesures de la longueur d'une fissure. L'actualisation permet de regarder si le modèle prédit correctement le comportement d'une fissure donnée à partir de l'utilisation de quelques mesures de la longueur de cette fissure, et nous avons utilisé cette capacité à prédire la propagation d'une fissure comme critère pour valider et comparer nos deux modèles.

Il est à noter que, du point de vue de l'ingénieur, si quelques inspections de la structure sont envisageables, cette méthode permet de proposer un modèle "centré" sur la fissure inspectée ce qui est évidemment beaucoup plus précis qu'un modèle global valable pour tous les types de fissures.

## 3. Validation et comparaison

Afin de valider et comparer les deux modèles, nous avons utilisé le principe du « leave one out ». Ce principe consiste, à partir des données de 67 fissures, à estimer les paramètres du modèle actualisé pour la 68<sup>ème</sup> fissure et à observer comment elle se comporte par rapport à la prédiction réalisée.

Nous avons dissocié le comportement des fissures (lentes, moyennes et rapides) en fonction du nombre de cycles nécessaires pour qu'elles atteignent une longueur de 49.8 mm qui est la dernière mesure. Nous avons choisi deux paramètres permettant de caractériser la qualité des résultats pour une fissure donnée  $k$ ,  $D_k$  la distance au faisceau normalisée par le nombre de cycles terminal et  $S_k$  la dispersion du faisceau (en nombre de cycles).

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des résultats obtenus. Si  $D_k=0$ , la fissure se trouve dans le faisceau de prédiction durant tout l'essai et  $D_k<1$ , elle sort à peine du faisceau en cours de propagation.

	modèle	Fissures rapides	Fissures moyennes	Fissures lentes
$D_k=0$	sans saut	0/11	1/50	0/7
	PDMP	8/11	18/50	0/7
$D_k<1$	sans saut	7/11	23/50	0/7
	PDMP	11/11	38/50	0/7
$S_k$ moyen	sans saut	9468	9130	8988
	PDMP	6191	7593	9863

FIG. 2 – Comparaison de  $D_k$  la distance normalisée au faisceau et  $S_k$  la dispersion du faisceau (en nombre de cycles) pour le modèle sans saut et le PDMP à un saut.

La propagation des fissures lentes n'est jamais bien modélisée quelle que soit l'approche choisie. Aucune des fissures ne reste dans le faisceau ou n'en est très proche durant tout l'essai. Ce résultat est dû au fait que les irrégularités locales (caractérisées par des arrêts des fissures) de l'évolution des longueurs de ces fissures ne peuvent être décrites correctement par aucun de ces deux modèles. En effet, ils ne permettent de décrire que les dispersions des courbes et la prise en compte de ces irrégularités nécessiterait une modification de la loi de Paris déjà proposée par d'autres auteurs [DIT86], [YAN96]. On notera par ailleurs que les modèles que nous avons utilisés surestiment systématiquement la propagation de ces fissures lentes ce qui signifie qu'elles sont toujours situées en dessous du faisceau résultant de la simulation.

En ce qui concerne les autres types de fissures, il est évident que le modèle PDMP à un saut est meilleur que le modèle sans saut. En effet, pour le PDMP, il y a un nombre beaucoup plus important de fissures contenues dans le faisceau de prédiction ou qui étant à l'extérieur du faisceau, sont à une distance relativement faible de celui-ci. La dispersion du faisceau en nombre de cycles est réduite de 35% pour les fissures rapides et de 18% pour les fissures moyennes avec l'utilisation du modèle PDMP.

Ces résultats montrent d'une part que l'utilisation des PDMP à un seul saut donne de bons résultats pour les fissures rapides et moyennes et d'autre part que l'utilisation de données obtenues lors d'inspection permet d'optimiser l'intervalle de prédiction.

## 4. Conclusion

L'objectif de cette étude était de montrer l'intérêt de l'utilisation d'un processus Markovien déterministe par morceaux à un seul saut pour étudier la propagation des fissures de fatigue. La souplesse, apportée par cette modélisation à un saut par rapport au modèle sans saut, permet de traduire le changement progressif de la propagation des fissures du régime stable « de Paris » vers la phase de propagation rapide de la fissure qui conduit à la rupture. Les fissures lentes ne sont cependant pas bien décrites car ce modèle ne prend pas en compte l'effet marqué de la microstructure qui peut conduire à des arrêts de ces fissures sur des durées assez longues. L'utilisation de données expérimentales permet d'une part de vérifier la qualité des modélisations proposées mais aussi de centrer l'analyse sur le comportement d'une fissure donnée ce qui correspond à des informations qui peuvent être obtenues lors de l'inspection des structures. Pour poursuivre dans cette voie, et compte tenu du fait que la loi phénoménologique de Paris ne permet pas d'intégrer des données intrinsèques aux matériaux utilisés (ténacité, amplitude de contrainte seuil...) et des données propres aux chargements mécaniques utilisés (rapport de charge, variation d'amplitude...), il est indispensable d'utiliser des lois phénoménologiques qui dissocient mieux l'effet du chargement et les propriétés du matériau. Les paramètres à utiliser dans ces lois devront bien entendu être aléatoires eux aussi.

## References

[AZA10] Azais R., Gégout-Petit A., Touzet M., Elegbede C., Estimation, simulations et prévision de la propagation de fissures par des processus Markoviens déterministes par morceaux. Congrès lambda17, La Rochelle, octobre 2010.

[CHI08] Chiquet, J., and Limnios, N., 2010, Piecewise deterministic Markov processes applied to fatigue crack growth modelling. *Jl of Statistical Planning and Inference* 139, pp 1657–1667.

[DIT86] Ditlevsen O., Olesen R., 1986, Statistical analysis of the Virkler data on fatigue crack growth, *Eng. Fract. Mech.*, 25, pp 177-195.

[KOT98] Kotulski Z. A., 1998, On efficiency of identification of a stochastic crack propagation model based on Virkler experimental data, *Arch Mech*, 50(5), pp 829-847.

[LAP96] C. Lapetra, J. Mayo, J. 1996, Dominguez, The randomness of fatigue crack growth under constant-amplitude loads, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 19(5) , pp 589-600.

[PAR63] PC. Paris, F. Erdogan, 1963, A critical analysis of crack propagation laws. *J Basic Eng* 85, pp 528-534.

[PER08] Perrin, F., 2008, Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures, Thèse, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II.

[SHE01] Shen, W., Soboyejo, A.B.O. , Soboyejo, W.O., 2001, Probabilistic modeling of fatigue crack growth in Ti-6Al-4V, *Int Jl of fatigue*, 23(10), pp 917-925.

[VIR79] D.A. Virkler, B.M. Hillberry and P.K. Goel, 1979, The statistical nature of fatigue crack propagation, *J. Eng. Mater. Tech.* , Trans. ASME, 101 , pp148-153.

[WU07] W.F. Wu and C.C. Ni, 2007, Statistical aspects of some fatigue crack growth data, *Eng. Fract. Mech.*, 74 , pp 2952-2963.

[YAN96] Yang J. and Manning S., 1996, A simple second order approximation for stochastic crack growth analysis, *Eng. Fract. Mech.*, 53(5) , pp 677-686.