

# Fissures de rétraction en forme d'étoiles: approches théorique par minimisation d'énergie et expérimentale par séchage de suspensions colloïdales

V. Lazarus<sup>a</sup>, C. Maurini<sup>b</sup>, G. Gauthier<sup>a</sup>

a. UPMC Univ Paris 6, Univ PSud, CNRS, Lab FAST, UMR 7608, Bat 502, Campus universitaire, F-91405 Orsay, France

b. UPMC Univ Paris 6, CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boite courrier 161-2, 4 Place Jussieu, F-75005, Paris, France

## Résumé :

*Les colonnes basaltiques, les polygones martiens, les réseaux de fractures dans les peintures, les septarias sont des "patterns" contenant des fissures en forme d'étoile, formés par la contraction frustrée du milieu due à un processus de séchage ou de refroidissement. Dans cet article, nous présentons des expériences de séchage de suspensions colloïdales permettant d'obtenir des fissures en forme d'étoile avec un nombre variable de branches. Nous montrons que ce nombre est régi par un principe de minimisation d'énergie issu de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Nous l'appliquons à la morphogenèse de fissures géologiques.*

## Abstract :

*Basalt columns, martian polygones, fracture networks in paints, septarias are patterns that contain contraction (drying or cooling) star-shaped cracks. In this article, we present some drying experiments of colloidal suspensions allowing to obtain star-shaped cracks with various number of radial branches. We show, that this number can be obtained by a minimization principle derived from the linear elastic fracture mechanics. We apply the results to the morphogenesis of some geological cracks.*

**Mots clefs :** rupture fragile, morphogenèse de fissures, minimisation énergétique.

## 1 Introduction

L'approche variationnelle énergétique de la mécanique de la rupture proposée par Francfort et Marigo [5, 2] est une prolongation du postulat de Griffith [8] selon lequel une fissure se propage si l'énergie élastique libérée par la propagation compense l'énergie requise pour créer la fente. Elle se base sur le principe que l'évolution quasistatique d'une fissure est obtenue en minimisant la somme de l'énergie élastique du corps fissuré et de l'énergie de fissuration. L'avantage de la méthode par rapport à l'approche classique de Griffith est qu'elle peut prévoir, sans ingrédients additionnels, l'initiation "macroscopique" et le chemin de propagation, même complexe, de fissures. Pour des simulations numériques, l'approche peut être régularisée par des modèles d'endommagement non locaux à gradient [3]. Ces dix dernières années, les efforts se sont principalement concentrés sur des développements théoriques et numériques. En conséquence, peu des simulations numériques présentées dans Bourdin et al. (2000, 2008) ont été comparées directement aux expériences. Récemment, l'approche théorique a été confrontée à des patterns de fissures apparaissant lors du séchage directionnel de suspensions colloïdales. La forme régularisée de l'approche [9] comme l'application directe du principe de minimisation d'énergie [7] prévoient avec succès le nombre de fissures émergeant d'une fissure en forme d'étoile. L'objet de cet article est de rappeler ces résultats expérimentaux (§2) et théoriques (§3), puis de les appliquer en guise d'illustration (§4) à des fissures d'origine géologique.

## 2 Expériences

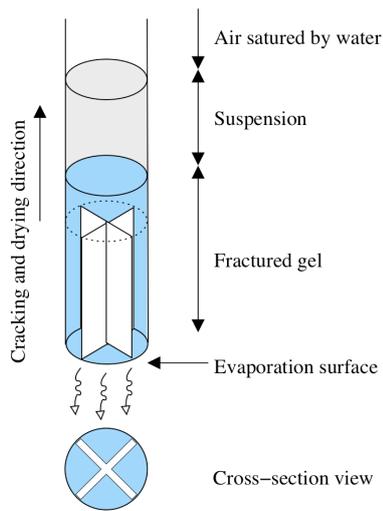


FIGURE 1 – Schéma du dispositif expérimental

Les expériences sont similaires à celles de Gauthier et al. [6, 7]. Des suspensions aqueuses mono-disperses de particules sphériques de silice (Ludox<sup>®</sup>SM30 of radius  $r \sim 3.5$  nm, ou Ludox<sup>®</sup>HS40 of radius  $r \sim 6$  nm) sont placées dans des pipettes capillaires circulaires en verre de rayon  $R = 0.05-0.75$  mm (fig. 1). Le haut du tube est bouché et l'évaporation se produit par l'extrémité inférieure dans une enceinte à atmosphère régulée. Lors de l'évaporation du solvant, les particules s'agglomèrent au niveau de la surface d'évaporation et forment un gel constitué d'une matrice poreuse solide drainée par le fluide. Le front de compaction (frontière entre la partie gélifiée et la partie liquide) croît au cours du temps. A cause de la taille nanométrique des particules, la pression capillaire dans les pores est à l'origine, avec l'adhésion à la paroi, de contraintes de tension élevées dans le gel. Ces contraintes sont à l'origine de la formation de fissures verticales qui se propagent en suivant le front de compaction. Ces fissures forment en coupe horizontale des patterns en forme d'étoile. Le nombre de branches radiales dépend de la taille des pipettes et de la vitesse de séchage (régulée par les conditions atmosphériques). L'objet de l'article est de montrer que le nombre de fissures radiales dépend d'un unique paramètre issu d'un principe de minimisation d'énergie de type Griffith.

## 3 Modèle

### 3.1 Problème d'élasticité

Le processus de séchage est suffisamment lent pour pouvoir découpler le processus de croissance du gel de celui de croissance des fissures et pouvoir supposer que les fissures se forment dans un gel à géométrie fixée en évolution quasistatique. Nous supposons de plus que le gel est élastique isotrope de module d'Young  $E$  et de Poisson  $\nu$ . Le chargement de rétraction est modélisé simplement par une précontrainte sphérique de tension  $\sigma_0 > 0$ . Comme le gel adhère à la paroi, le déplacement est nul sur la paroi. Les lèvres de la fissure étant sèches [4], elles sont supposées libres de contraintes. Pour une configuration de fissures donnée, ce problème correspond à un problème d'élasticité bien posé. Comme la géométrie des fissures est stationnaire dans un plan horizontal, nous nous contentons de considérer le problème 2D en déformation plane dans une section et de chercher le nombre de fissures radiales satisfaisant au problème de minimisation énergétique de Francfort and Marigo.

### 3.2 Problème de minimisation

Le problème consiste à chercher (i) le champ de déplacement satisfaisant les conditions limites et (ii) le pattern de fissures minimisant l'énergie totale, définie comme étant la somme de l'énergie élastique et de l'énergie de fissuration. On suppose cette dernière proportionnelle à la surface de rupture, la constante de proportionnalité étant l'énergie de rupture  $G_c$  du matériau. Pour des raisons dimensionnelles, on peut montrer que le pattern de fissures dépend alors d'un unique paramètre  $\mathcal{L} = L_c/R$  où  $R$  est le rayon du cylindre et  $L_c$  est la longueur de Griffith définie par :

$$L_c = \frac{EG_c}{\sigma_0^2} = (1 - \nu^2) \frac{K_c^2}{\sigma_0^2} \quad (1)$$

Nous avons aussi exprimé  $L_c$  en fonction de la ténacité  $K_c$  du matériau pour des besoins ultérieurs (§4).

Ce problème a été résolu, d'une part, de manière directe en supposant le pattern de fissure en forme d'étoile et en cherchant le nombre de fissures radiales minimisant l'énergie [7]. D'autre part, il a

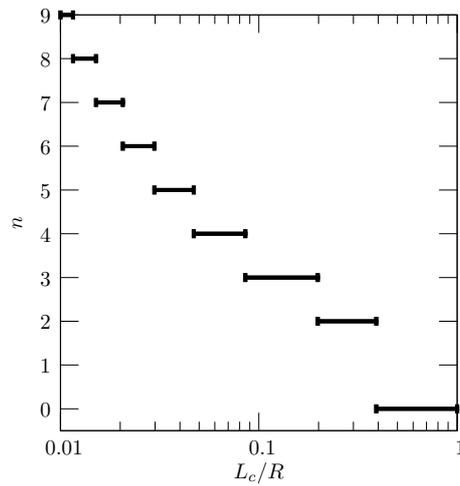


FIGURE 2 – Nombre de fissures radiales  $n$  prédit par la minimisation d'énergie ( $\nu = 0.3$ )

également été résolu sans a priori sur la forme des fissures [9] en utilisant une méthode de minimisation régularisée numérique issue des travaux de Bourdin et al. [3]. L'approche directe comme l'approche régularisée donnent le même résultat qui est donné sur la figure 2, par le nombre  $n$  de fissures radiales en fonction du paramètre  $\mathcal{L}$ . Ce paramètre sans dimension permet de quantifier le ratio entre l'énergie nécessaire pour fracturer ( $\propto G_c$ ) et l'énergie élastique ( $\propto \sigma_0^2/E$ ) : plus il est grand, plus il est coûteux de fissurer, moins il y a de fissures en accord avec la courbe décroissante de la figure 2. Il a été vérifié [9] que les résultats théoriques sont en accord avec les résultats expérimentaux. Pour l'illustrer, quelques exemples de fissures obtenues expérimentalement et numériquement en utilisant l'approche régularisée sont donnés dans la figure 3.

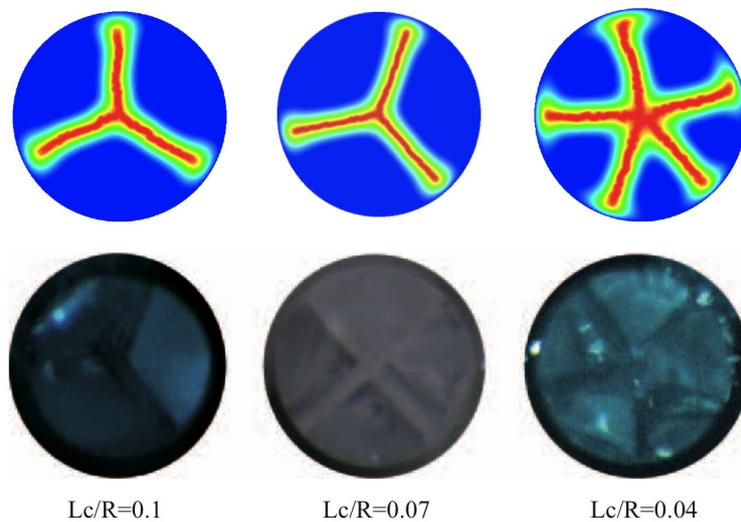


FIGURE 3 – Fissures en forme d'étoiles obtenues par minimisation numérique (en haut) et expérimentalement (en bas)

Nous venons de voir comment la minimisation d'énergie permet d'obtenir le nombre de fissures radiales si  $\mathcal{L}$  est connu. Inversement, si le nombre  $n$  de fissures radiales est connu, on peut en déduire  $\mathcal{L}$ . Nous allons appliquer cette méthode inverse en guise d'illustration aux septarias.



FIGURE 4 – Septaria. Loc : Midelt, Maroc. 5,2x5x1,7 cm / 5,5x5x1,8 cm.

## 4 Applications

Les septarias, comme celui de la figure 4, sont des petits nodules rocheux contenant des fissures de formes variées dont les conditions de formation semblent peu connues. D'après [1], "a current explanation for septarian cracks assumes an initial soft concretion interior, confined within a harder cemented shell, which subsequently deshydrates with the formation of shrinkage cracks". Les septarias pourraient donc être des fissures de rétraction. Quand elles ont la forme d'étoile on peut donc déduire à partir du nombre de branches, la valeur de  $\mathcal{L}$ . Si de plus,  $K_c$  est connu, on peut en déduire la valeur du chargement  $\sigma_0$ , responsable de la fissure. Par exemple pour le septaria de la figure 4, on peut écrire :

1. Comme visiblement  $n = 3$ , on obtient à partir de la figure 2,  $\mathcal{L} = \frac{L_c}{R} = 0.09 - 0.2$ .
2. On mesure  $R \sim 2.5$  cm, donc  $L_c \sim 0.2 - 0.5$  cm.
3. Avec  $K_c \sim 1$  MPa.m<sup>1/2</sup>, on obtient à partir de la définition (1) de  $L_c$  :

$$\sigma_0 \sim \frac{K_c}{\sqrt{L_c}} \sim 10 - 20 \text{ MPa.}$$

Ce qui est un chargement raisonnable. Nous projettons donc d'appliquer cette idée de façon plus approfondie en concertation avec des géologues afin d'avoir une meilleure connaissance des conditions de formation de ces nodules.

## 5 Conclusions

L'approche énergétique de la rupture de Francfort et Marigo [5] issue des idées fondatrices de Griffith [8] a été appliquée avec succès pour prédire les patterns de fissures apparaissant lors du séchage de suspensions colloïdales. Cette approche se généralise sans problème à toute fissuration résultant d'un processus de rétraction que soit par séchage ou par refroidissement thermique. Aussi nous envisageons d'étendre l'approche à des milieux non confinés latéralement avec comme application possible les colonnes basaltiques formées naturellement lors du refroidissement de lave (fig. 5).

## Références

- [1] T. R. Astin. Septarian crack formation in carbonate concretions from shales and mudstones. *Clay minerals*, 21 :617–631, 1986.
- [2] B. Bourdin, G. Francfort, and J.-J. Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of elasticity*, 91(1) :5 – 148, 2008.
- [3] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J. J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4) :797–826, 2000.



FIGURE 5 – Chaussée des géants, Irlande.

- [4] E. R. Dufresne, E. I. Corwin, N. A. Greenblatt, J. Ashmore, D. Y. Wang, A. D. Dinsmore, J. X. Cheng, X. S. Xie, J. W. Hutchinson, and D. A. Weitz. Flow and fracture in drying nanoparticle suspensions. *Physical Review Letters*, 91(22) :224501, 2003.
- [5] G. A. Francfort and J. J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :1319–1342, 1998.
- [6] G. Gauthier, V. Lazarus, and L. Pauchard. Alternating crack propagation during directional drying. *Langmuir*, 23(9) :4715–4718, 2007.
- [7] G. Gauthier, V. Lazarus, and L. Pauchard. Shrinkage star-shaped cracks : Explaining the transition from 90 degrees to 120 degrees. *EPL*, 89 :26002, 2010.
- [8] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221 :163–198, 1920.
- [9] V. Lazarus, C. Maurini, G. Gauthier, and B. Bourdin. Crack patterns in directional drying : experiments and results of numerical energy minimization. (In preparation), 2011.