

Un modèle de type Gurson pour les matériaux ductiles poreux contenant des cavités ellipsoïdales arbitraires

K. MADOU^a, J.B. LEBLOND^a

a. UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Tour 65-55, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

Résumé :

Le modèle de rupture ductile de Gurson (1977) est basé sur l'analyse limite d'une sphère creuse. Leblond et Gologanu (1993, 1994, 1997) ont ensuite développé des modèles pour des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties. On étend ici ces modèles à des cavités ellipsoïdales générales en s'appuyant sur la famille de champs de vitesse proposée récemment par Leblond et Gologanu (2008). Le modèle analytique qui en résulte est entièrement validé à l'aide de calculs par éléments finis sur cellules.

Abstract :

Gurson's model for porous ductile solids (1977) was derived from limit-analysis of a hollow sphere. It was later extended by Gologanu and Leblond (1993, 1994, 1997) to spheroidal (both prolate and oblate) voids. Our present aim is to further extend this model to general ellipsoidal voids by using the velocity fields recently proposed by Leblond and Gologanu (2008). The approximate analytical criterion is validated by finite element simulations of cells.

Mots clefs : milieux poreux ductiles, cavités ellipsoïdales, analyse limite

1 Introduction

La phase de croissance des cavités dans un matériau ductile poreux est bien décrite par le modèle de Gurson [1]. Ce modèle dérive de l'analyse limite d'une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation homogène aux bords. Cependant, les études numériques de Lee, Mear [11] et Hom, McMeeking [12] montrent une influence non négligeable de la forme des cavités sur leur croissance. De plus les cavités dans les matériaux réels sont souvent non sphériques. Gologanu et al [2, 3] ont développé récemment un modèle applicable à des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties. Ils ont étendu l'analyse limite de Gurson à des domaines sphéroïdaux contenant des cavités sphéroïdales confocales. Le champ de vitesse test utilisé satisfait à des conditions de taux de déformation homogène sur chaque sphéroïde confocal avec le vide et l'ellipsoïde extérieur. Plus tard, Gologanu et al [4] ont raffiné leur modèle en considérant des champs de vitesses tests plus sophistiqués et en utilisant les bornes pour les composites non linéaires développées par Ponte Castaneda [5], Willis [6] et Michel-Suquet [7].

Ici nous allons considérer des ellipsoïdes généraux en nous inspirant de l'approche de Gologanu et al. Dans la première partie nous allons exposer le champ de vitesse test incompressible proposé par Leblond et Gologanu [10] qui décrit l'expansion d'une cavité ellipsoïdale, puis l'utiliser dans une analyse limite d'un domaine ellipsoïdal contenant un vide ellipsoïdal confocal. Le critère approché qui en résulte contient des coefficients qui ne sont pas totalement explicités à ce stade.

Dans la seconde partie, des calculs par éléments finis et la borne non linéaire de Willis [6] nous permettent de déterminer ces coefficients.

La troisième partie consiste à valider le critère à l'aide de calculs par éléments finis sur diverses cellules.

2 Champ de vitesse test satisfaisant des conditions de taux de déformation homogène sur des ellipsoïdes confocaux

Le champ de vitesse décrivant l'expansion d'une cavité ellipsoïdale confocale avec l'ellipsoïde extérieur a récemment été proposé par Leblond et Gologanu [10]. Ce champ de vitesse est de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\lambda)\mathbf{r} \quad (1)$$

où $\mathbf{D}(\lambda)$ est un tenseur symétrique du second ordre dépendant de la première coordonnée ellipsoïdale λ [9]. Ce champ satisfait des conditions de taux de déformation homogène sur toute surface ellipsoïdale de constante λ . L'incompressibilité de ce champ permet de décomposer le tenseur $\mathbf{D}(\lambda)$ sous la forme

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathcal{A}\mathbf{D}^0(\lambda) + \mathbf{\Delta} \quad (2)$$

où \mathcal{A} est une constante arbitraire, $\mathbf{\Delta}$ un tenseur symétrique déviatorique du second ordre arbitraire et $\mathbf{D}^0(\lambda)$ le tenseur symétrique du second-ordre dépendant de λ défini par :

$$\begin{cases} D_{xx}^0(\lambda) &= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(a^2+\rho)v(\rho)} \\ D_{yy}^0(\lambda) &= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(b^2+\rho)v(\rho)} \\ D_{zz}^0(\lambda) &= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(c^2+\rho)v(\rho)} \\ D_{yz}^0(\lambda) &= D_{yz}^0(\lambda) = D_{zx}^0(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

où

$$v(\rho) = \sqrt{(a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho)} \quad (4)$$

désigne à un facteur $\frac{4\pi}{3}$ près le volume de l'ellipsoïde de constante ρ .

2.1 Analyse limite d'une cellule ellipsoïdale creuse

On considère maintenant un ellipsoïde arbitraire de demi-axes A, B, C , de volume $\frac{4\pi}{3}\Omega = \frac{4\pi}{3}ABC$, contenant un vide ellipsoïdal confocal de demi-axes a, b, c , de volume $\frac{4\pi}{3}\omega = \frac{4\pi}{3}abc$, et de fraction volumique $f = \frac{\omega}{\Omega}$. Le matériau constitutif est rigide parfaitement plastique et obéit au critère de Von Mises. On note σ_0 le seuil de plasticité en traction simple. Les coordonnées ellipsoïdales λ, μ, ν sont associées à a, b, c . La valeur de λ est égale à 0 et à Λ respectivement sur les ellipsoïdes intérieur et extérieur.

Cette cellule est soumise à un taux de déformation homogène \mathbf{D} sur le bord extérieur. On va faire une estimation par l'extérieur de la surface de charge macroscopique.

La dissipation plastique macroscopique $\Pi^+(\mathbf{D})$ est la moyenne sur le domaine ellipsoïdal de la dissipation plastique locale $\sigma_0 d_{eq}(\mathbf{r})$ où $d_{eq}(\mathbf{r})$ est la déformation équivalente. Elle est de la forme

$$\Pi^+(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{\frac{4\pi}{3}\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \langle d_{eq}(r) \rangle_{E(\lambda)} d\lambda \quad (5)$$

où $\langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{E}(\lambda)}$ désigne une moyenne pondérée convenable de $d_{eq}(\mathbf{r})$ sur la surface ellipsoïdale de constante λ qu'on note ici $E(\lambda)$. L'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et d'autres approximations permettent d'avoir une formule explicite de cette dissipation. Par suite, la différentiation de cette dissipation par rapport aux composantes du tenseur \mathbf{D} et l'élimination de ses composantes conduit à un critère approché de type Gurson de la cellule ellipsoïdale qui s'écrit :

$$\frac{Q(\Sigma)}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g)\cosh\left(\mathcal{K}\frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (6)$$

avec $\mathcal{K} = \frac{3}{2F}$, $g = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}{\Omega}$ et $\Sigma_h = H_x \Sigma_{xx} + H_y \Sigma_{yy} + H_z \Sigma_{zz}$.

3 Détermination des coefficients \bar{F} , H_x , H_y , H_z et de la forme quadratique $Q(\Sigma)$

Coefficient \bar{F}

La constante \bar{F} est liée à une fonction $F(\tilde{w})$ obtenue par des simulations numériques effectuées avec le code SYSTUS. Ces calculs par éléments finis sont effectués sur plusieurs cellules de formes différentes. Le paramètre de forme $k = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$ varie entre 0 et 1. En se basant sur l'allure des courbes de la figure 1a, on a d'abord cherché les expressions $F_{prolate}(\tilde{w})$ et $F_{oblate}(\tilde{w})$ dans les cas $k = 0$ et $k = 1$ respectivement et ensuite on a déduit l'expression de $F(\tilde{w})$ dans le cas d'un ellipsoïde arbitraire en faisant une interpolation linéaire à laquelle s'ajoute une fonction homographique. L'expression trouvée est :

$$F(\tilde{w}) = (1 - k)F_{prolate}(\tilde{w}) + kF_{oblate}(k^2\tilde{w}) + \frac{3}{5} \frac{(1 - k)^2 k^2}{(8/5 - k^2\tilde{w})} \quad (7)$$

où $F_{oblate}(\tilde{w}) = 1 + \frac{13}{10}\tilde{w} - \frac{3}{2}\tilde{w}^5$ et $F_{prolate}(\tilde{w}) = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)\frac{\tilde{w}}{\tilde{w} - 11/5}$.

L'écart observé sur la figure 1 entre l'approximation analytique et les points numériques est dû à l'influence de la porosité f qui n'est pas prise en compte dans notre formule.

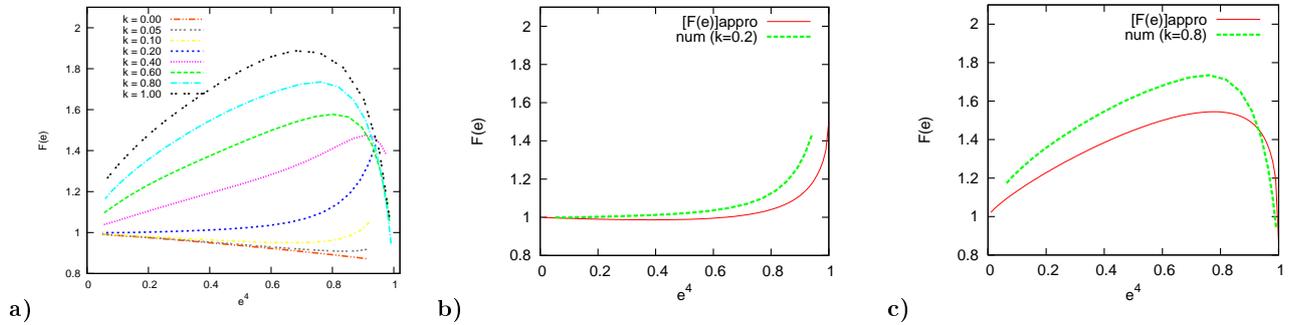


FIG. 1 – Fig (a) : Valeurs numériques de F pour $0 \leq k \leq 1$; Fig (b, c) : comparaison des résultats numériques de F pour $k = 0,2$ (b) et $0,8$ (c) en fonction de e^4 où e désigne l'excentricité dans le plan (O, x, z) des ellipsoïdes compris entre le vide et le bord extérieur : les points numériques (avec $f = 0.005$) sont en vert et la formule analytique en rouge

Finalement, à partir de la relation $\int_{\tilde{w}_\Lambda}^{\tilde{w}_0} \frac{\bar{F}}{\tilde{w}^2} d\tilde{w} = \int_{\tilde{w}_\Lambda}^{\tilde{w}_0} \frac{F(\tilde{w})}{\tilde{w}^2} d\tilde{w}$, il vient

$$\begin{aligned} \bar{F} = & 1 + [\ln(g_f/g_1)]^{-1} \left[(1 - k) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \ln \left(\frac{g_f/k^2 + 11/5}{g_1/k^2 + 11/5} \right) \right] \\ & + [\ln(g_f/g_1)]^{-1} \left[\frac{13k}{10}(g_f - g_1) - \frac{3k}{10}(g_f^5 - g_1^5) - \frac{3}{5}(1 - k)^2 \ln \left(\frac{8/5 - g_f}{8/5 - g_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

où $g_1 = \frac{g}{g+1}$ et $g_f = \frac{g}{g+f}$

Coefficients H_x , H_y , H_z

Les coefficients $H_x = \frac{D_{xx}^0}{tr(\mathbf{D}^0)}$, $H_y = \frac{D_{yy}^0}{tr(\mathbf{D}^0)}$, $H_z = \frac{D_{zz}^0}{tr(\mathbf{D}^0)}$ sont déterminés en imposant un chargement hydrostatique à la cellule. Les calculs par éléments finis sont faits sur plusieurs cellules en prenant une porosité $f = 0.02$ et $0 \leq k \leq 1$. A partir des résultats numériques (figure 2), on propose les approximations suivantes :

$$H_x = (1 - k^2)H_x^{pr} + k^2H_x^{obl}; \quad H_y = (1 - k)H_y^{pr} + kH_y^{obl} + \frac{\alpha E^{3/2}(\beta - E)}{\gamma^2 + (\beta - E)^2}; \quad H_z = 1 - H_x - H_y \quad (9)$$

où $H_y^{pr} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}E^2 - \frac{1}{6}E^4$; $H_y^{obl} = \frac{1}{3} \frac{1 - 7E^2/2 + 5E^4/2}{1 - 7E^2/2 + 5E^4}$; $H_x^{pr} = 1 - 2H_y^{pr}$; $H_x^{obl} = H_y^{obl}$;

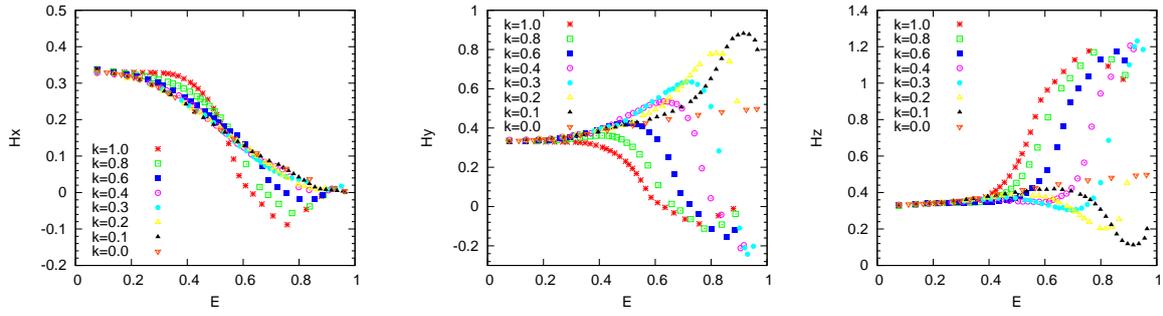


FIG. 2 – Valeurs numériques de H_x , H_y et H_z en fonction de l'excentricité E de l'ellipsoïde extérieur dans le plan (O, x, z) pour $f = 0.02$ et $k = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

$$\beta = \frac{1+5k^2}{1+9k^2}; \quad \gamma = \frac{3k^2}{1+30k^2}; \quad \alpha = \frac{1}{2}(1-k) \frac{\gamma^2 + (\beta-1)^2}{1-\beta}.$$

Il y a une bonne corrélation entre les calculs numériques et les approximations comme le montre la figure 3.

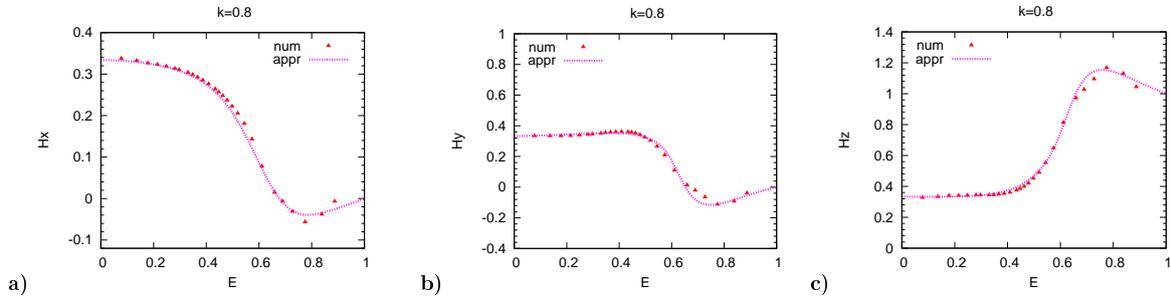


FIG. 3 – Les valeurs numériques de H_x (a), H_y (b) et H_z (c) en points discrets et les approximations en ligne continue

Forme quadratique $Q(\Sigma)$

Le critère est ajusté sur la borne non linéaire de Willis pour de faibles valeurs de Σ_h . La convexité de notre critère résulte alors de celle de la borne de Willis. La forme quadratique $Q(\Sigma)$ est définie par

$$Q(\Sigma) = Q^{Willis}(\Sigma) - (1+g)(f+g)\mathcal{K}^2\Sigma_h^2 \quad (10)$$

où Q^{Willis} correspond à la borne non linéaire de Willis [6].

4 Validation du critère

Le critère est validé grâce à des calculs numériques effectués sur des ellipsoïdes allongés, aplatis et arbitraires. Les surfaces de charge tracées sont les coupures de la surface à 5 dimensions par les plans $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}; \Sigma_{zz})$, $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{yy})$ et $(\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{xx})$.

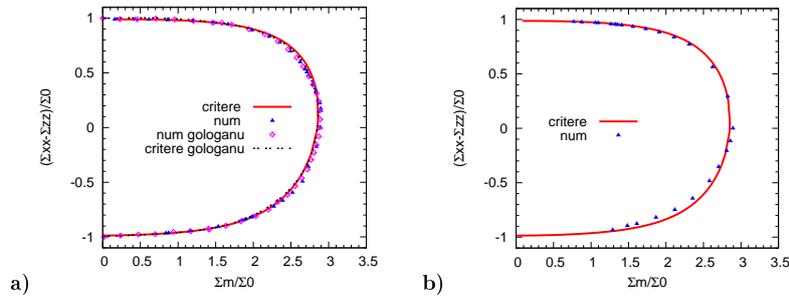


FIG. 4 – Surfaces de charge dans les plans $(\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{xx})$ (a) et $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}; \Sigma_{zz})$ (b) d'une cellule sphéroïdale allongée contenant une cavité de demi-axes $a = 5$; $b = 1$; $c = 1$, de porosité $f = 0.01$

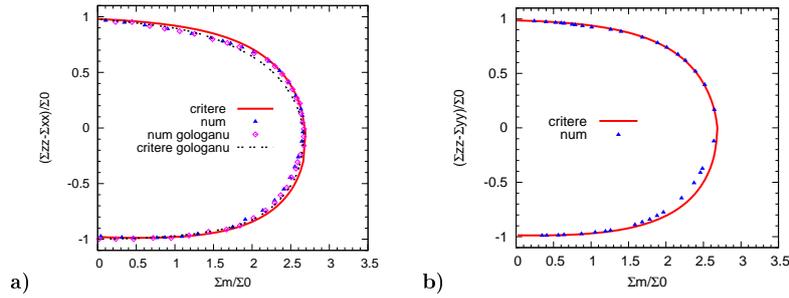


FIG. 5 – Surfaces de charge dans les plans $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}; \Sigma_{zz})$ (a) et $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{yy})$ (b) d'une cellule sphéroïdale aplatie contenant une cavité de demi-axes $a = 5$; $b = 5$; $c = 1$ et de porosité $f = 0.01$

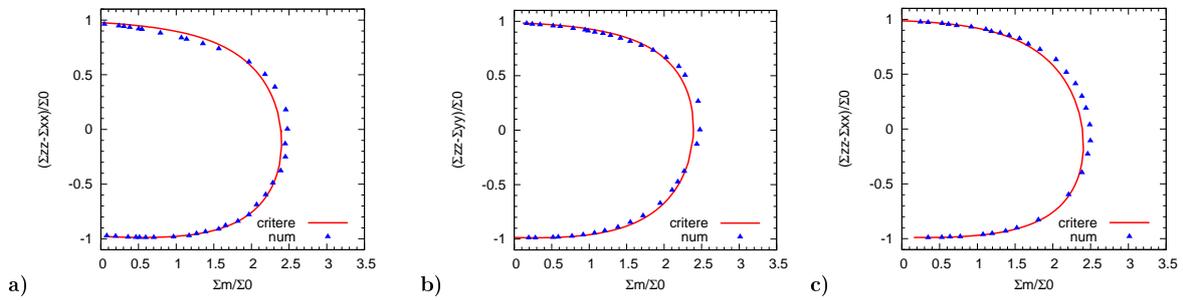


FIG. 6 – Surfaces de charge dans les plans $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}; \Sigma_{zz})$ (a), $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{yy})$ (b) et $(\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{xx})$ (c) d'une cellule ellipsoïdale contenant une cavité de demi-axes $a = 10$; $b = 5$; $c = 1$ et de porosité $f = 0.01$

Dans les cas des sphéroïdes allongé ou aplati (figures 4, 5), le critère analytique s'accorde bien avec les points numériques et le critère de Gologanu [2, 3]. Dans les cas des ellipsoïdes généraux, les figures 6, 7 indiquent de légers coins sur les surfaces numériques près du point hydrostatique. Notre critère ne capte pas ce phénomène à cause de la régularité de la fonction de charge.

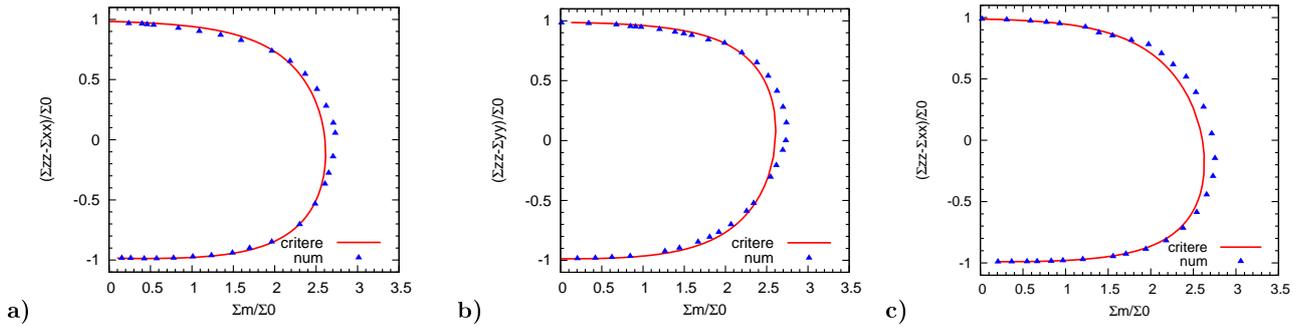


FIG. 7 – Surfaces de charge dans les plans $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}; \Sigma_{zz})$ (a), $(\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{yy})$ (b) et $(\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}; \Sigma_{xx})$ (c) d'une cellule ellipsoïdale contenant une cavité de demi-axes $a = 10$; $b = 2$; $c = 1$ et de porosité $f = 0.01$

5 Conclusion

Dans cette étude, on a fait usage du champ de vitesse proposé par Leblond et Gologanu [10] pour aboutir à un critère analytique approché pour les matériaux ductiles poreux contenant des cavités ellipsoïdales arbitraires. Les simulations numériques ont joué un rôle essentiel dans la détermination des coefficients et la validation du critère. A part les quatre cas présentés, cette validation est aussi effectuée sur des fissures circulaire et elliptique ainsi que sur des cylindres à base circulaire et elliptique.

Références

- [1] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME J. Engng. Materials Technol.* **99** 2-15, 1977.
- [2] M. Gologanu, J.B. Leblond, J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, **41** 1723-1754, 1993.
- [3] M. Gologanu, J.B. Leblond, J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - Case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *ASME J. Engng. Materials and Technol.*, **116** 290-297, 1994.
- [4] M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, J. Devaux. Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. In : P. Suquet, ed., *Continuum Micromechanics*, 61-130. Springer-Verlag, New-York, 1997.
- [5] P. Ponte Castaneda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **39** 45-71, 1991.
- [6] J. Willis. On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *J. Mech. Phys. Solids*, **39** : 73-86, 1991.
- [7] J.C. Michel, P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **40** 783-812, 1992.
- [8] K. Danas and P. Ponte-Castaneda. A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : I - Theory ; II - Applications. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **28** 387-401 and 402- 416, 2009.
- [9] P.M. Morse, H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Part I*. McGraw-Hill, New-York, 1953.
- [10] J.B. Leblond, M. Gologanu. External estimate of the yield surface of an arbitrary ellipsoid containing a confocal void. *Comptes-Rendus Mécanique*, **336** 813-819, 2008.
- [11] B.Lee, M.Mear, Axisymmetric Deformation of Power-Law Solids containing a Dilute Concentration of Aligned Spheroidal Voids, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **40**(1992), pp. 1805-1836
- [12] C. L. Hom, R. M. McMeeking, Void Growth in Elastic-Plastic Materials, *ASME J. Appl. Mech.*, **56**(1989), pp. 309-317