

# Application de la méthode asymptotique numérique au cas des modèles de zone cohésive

L. DARIDON<sup>a,c</sup>, B. WATTRISSE<sup>a,c</sup>, A. CHRYSOCHOOS<sup>a,c</sup> ET M. POTIER-FERRY<sup>b</sup>

a. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, CNRS, Université Montpellier 2

b. Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, LEM3, UMR CNRS 7239, Université Paul Verlaine – Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France

c. Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures, IRSN, CNRS UMR 5508, Université Montpellier 2

## Résumé :

La présente communication montre l'intérêt d'associer la méthode asymptotique numérique (ANM) aux approches de type zone cohésive (CZM) pour modéliser la fissuration. Plus spécifiquement, nous proposons une application des techniques de perturbation et de régularisation à un modèle 1D cohésif. Le modèle d'interface étudié est le modèle « triangle » classique, souvent employé dans les codes d'éléments finis pour décrire la rupture des matériaux fragiles. Les premiers résultats montrent que l'ANM est efficace pour simuler numériquement ce comportement non régulier lors de cycles de charge-décharge. De plus, la communication montre comment le modèle d'interface choisi peut être intégré dans le formalisme des matériaux standard généralisés (GSM). Ceci est rendu possible en utilisant une variable d'état d'endommagement homogène à un déplacement à la place de la variable d'endommagement isotrope classiquement utilisée pour décrire la perte de rigidité du matériau. Un exemple simple d'endommagement d'une structure élastique est finalement présenté afin de montrer les potentialités de l'approche.

## Abstract :

The present work deals with the use of asymptotic numerical methods (ANM) to manage crack onset and crack growth in the framework of Continuum Damage Mechanics (CDM). More specifically, an application of regularization techniques to a 1D cohesive model is proposed. The standard "triangle" damageable elastic model, often used in finite element codes to describe fracture of brittle materials, was chosen. Results associated with load-unload cycles showed that ANM is convenient to take numerically this specific non regular behavior into account. Moreover, the present paper also shows that the chosen damageable interface model can be introduced in the generalized standard material (GSM) formalism which enabled us to define a complete energy balance associated with the damage process. In such a framework, the new damage state variable is a displacement. Finally, a 1D finite element application to a simple elastic damageable structure is shown to emphasize the potentialities of such an approach.

**Mots clés :** Modèle à zone cohésive, méthode numérique, fissuration,

## 1 Introduction

La simulation de la propagation des fissures est un enjeu scientifique important qui a été abordé sous différents angles. Nous nous proposons ici d'associer la méthode asymptotique numérique (ANM) à un modèle de zone cohésive (CZM) afin de simuler la fissuration au sein d'une structure. Dans le cas problèmes non-réguliers, comme celui de la fissuration, la méthode ANM, basée sur le calcul par étape de la solution par la détermination des termes d'une expansion en série de Taylor [1], ne peut pas être employée directement, mais seulement après une étape de régularisation. Par soucis de simplicité, nous avons limité ci-après notre analyse à une interface 1-D. Le modèle d'interface considéré ici est le modèle dit « triangle » (Fig. 1) [2-3]. Ce modèle relie la contrainte normale dans l'interface à la discontinuité normale du déplacement. Ce modèle classique est ici intégré dans le cadre des matériaux standard généralisés (GSM). L'intérêt de l'association ANM-CZM est illustré par la simulation d'une propagation 1D d'une fissure dans le cas d'un essai double poutre console (DCB) constitué d'un matériau élastique endommageable isotrope.

## 2 Régularisation de la loi cohésive présentée dans le cadre des matériaux standard généralisés.

Les modèles cohésifs sont largement utilisés pour décrire la dégradation progressive d'un matériau au cours du chargement [4,5]. La présence de mécanismes irréversibles liés à la progression de l'endommagement rend donc légitime l'utilisation d'un cadre thermodynamique. Dans le cas du comportement élastique endommageable d'une interface de type « triangle » (Fig. 1), nous supposons que la dissipation d'énergie est seulement due aux mécanismes d'endommagement. Les hypothèses simplificatrices suivantes ont été considérées :

- (i) L'énergie de déformation est soit dissipée par les mécanismes d'endommagement soit stockée élastiquement.
- (ii) Les couplages thermomécaniques ne sont pas pris en compte et seul des processus isothermes sont considérés.

### 2.1 Formalisme

De façon classique [6,7], les modèles thermomécaniques traitant de l'endommagement isotrope considèrent,  $d$  ( $0 \leq d \leq 1$ ), comme variable d'état. Ici, nous proposons de remplacer,  $d$ , qui caractérise la perte de rigidité du matériau, par,  $x_d$ , qui caractérise le saut de déplacement normal, noté  $x$ , induit par l'endommagement. Le couple des variables d'état choisi est donc,  $(x, x_d)$ . L'utilisation de la variable  $x_d$  ( $x_e \leq x_d \leq x_c$ ) permet de mettre en place un formalisme de type « loi d'écoulement associé » pour lequel la fonction d'écoulement, décrivant le domaine d'élasticité, est définie uniquement en fonction d'une seule des forces thermodynamiques du modèle, noté  $X_d$  associée à  $x_d$ . Dans ce formalisme la variable d'endommagement  $x_d$  varie donc entre  $x_e$  qui est l'ouverture normale à partir de laquelle débute l'endommagement et  $x_c$  qui est l'ouverture critique.

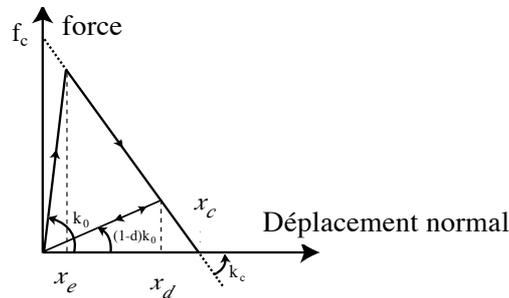


FIG. 1 – Loi cohésive utilisée de type « triangle »

En accord, avec les hypothèses faites relatives au choix des variables d'état et à la loi d'interface considérée, l'énergie libre s'écrit sous la forme suivante :

$$\psi(x, x_d) = \frac{k_c}{2} \langle x_c - x_d \rangle^+ \frac{x^2}{x_d}, \text{ où } k_c = \frac{f_c}{x_c}, \text{ et } f_c \text{ la force critique} \quad (1)$$

De la donnée du potentiel thermodynamique, on déduit classiquement les équations d'état :

$$\begin{cases} f_x^r = k_c \langle x_c - x_d \rangle^+ \frac{x}{x_d} & \text{(a)} \\ f_{x_d} = -\frac{k_c}{2} x_c \left( \frac{x}{x_d} \right)^2 H(x_c - x_d) & \text{(b)} \end{cases} \quad (2)$$

où  $f_x^f$ ,  $f_{x_d}$  sont respectivement les variables conjuguées de  $x$  et  $x_d$  et où  $H$  représente la fonction de Heaviside avec :

$$\begin{cases} H(A)=1 & \text{if } A \geq 0 \\ H(A)=0 & \text{if } A < 0 \end{cases} \text{ et } \langle . \rangle^+ \text{ est la partie positive définie par } \langle A \rangle^+ = \max(A, 0).$$

Les irréversibilités ne dépendant que de  $x_d$ , la dissipation due à la force thermodynamique  $f_x^{ir}$  associée à  $\dot{x}$  est nulle. Le cadre des matériaux standards [8,10] nous permet alors d'obtenir la loi d'évolution de  $x_d$  (Eq 3) en utilisant la règle de normalité une fois la fonction seuil  $G(X_d)=0$  définie où  $X_d$  est la variable thermodynamique associée à  $x_d$ . Dans le cas de la loi cohésive considérée, la fonction seuil est définie par :

$$G(X_d) = X_d - \frac{f_c}{2} \quad (3)$$

La loi d'évolution s'écrit en conséquence :

$$\dot{x}_d = \begin{cases} 0 & \text{if } G < 0 & (a) \\ \lambda \frac{\partial G}{\partial X_d} = \lambda, \lambda \geq 0 & \text{if } G(X_d) = 0 & (b) \end{cases} \quad (4)$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange qui est strictement positif quand l'endommagement augmente.

Aussi, nous pouvons réécrire la loi d'évolution en utilisant une fonction de Heaviside

$$\dot{x}_d = \langle \dot{x} \rangle^+ H(G(X_d)) \quad (5)$$

Il est alors clair que la vitesse d'endommagement  $\dot{x}_d$  doit être régularisée pour être développée en série entière. Comme dans le cas de la plasticité [11], nous allons utiliser un paramètre,  $\eta_0$ , sans dimension afin de régulariser  $H(\cdot)$  et  $\langle . \rangle^+$ . Une étude paramétrique [2] montre qu'une bonne valeur de  $\eta_0$  est de l'ordre de  $10^4$ . Les fonctions régularisées utilisées pour  $H(\cdot)$  et  $\langle . \rangle^+$  sont notées respectivement  $H_{\eta_0}(x)$  et

$P_{\eta_0}^+(x)$  définies par

$$\begin{cases} P_{\eta_0}^+(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{x^2 + \eta_0} + x \right) \\ H_{\eta_0}(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \eta_0}} \right) \end{cases} \quad (6)$$

## 2.2 Résultats

Dans les problèmes d'évolution, il est naturel d'utiliser comme paramètre de développement en série entière de l'inconnue notée  $U(t)$ , le temps,  $t$  [12] :

$$U(t) - U(t_0) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_d(t_0) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N (t - t_0)^n U_n \quad (7)$$

Tous les résultats présentés ici ont été obtenus à l'aide du code de calcul formel Maple<sup>®</sup>. Les courbes présentées sur la figure 2 ont été obtenues avec les paramètres matériaux suivant  $\{f_c = 1 \text{ N.mm}^{-1}, x_c = 1 \text{ mm}, k_0 = 1 \text{ N.mm}^{-2}\}$  et un chargement de type déplacement imposé défini par :  $x(t) = -at(t-1)\dot{x}_0$  avec  $\dot{x}_0 = 1 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $a = 3 \text{ s}^{-1}$ . Ces résultats ont été obtenus pour une série de 10

termes et un rayon de convergence de la série  $R = \left(10^{-4} \frac{\|U_1\|}{\|U_{10}\|}\right)^{\frac{1}{9}}$ .

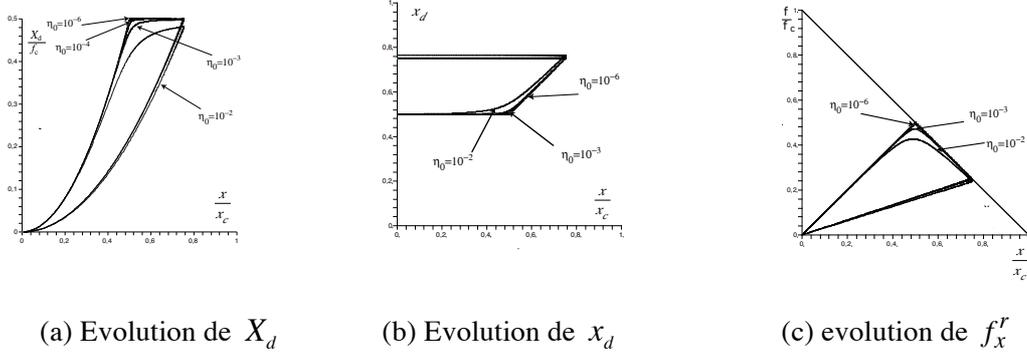


Fig2 Influence de  $\eta_0$  sur les courbes réponses

Sur les courbes présentées dans la figure 2, nous observons l'influence de paramètre  $\eta_0$  sur la variable thermodynamique  $X_d$  associée à  $x_d$ , la variable d'état  $x_d$  et  $f_x^r$ . Nous rappelons qu'avec ce choix de

variable thermodynamique le seuil d'endommagement est donné par  $\frac{X_d}{f_c} = \frac{1}{2}$ . Il est évident sur la figure 2a

que plus le paramètre  $\eta_0$  est petit plus les résultats numériques sont proches de la fonction seuil théorique.

On observe également figure 2b, que pour des grandes valeurs de  $\eta_0$ , typiquement  $10^{-2}$ ,  $x_d$  augmente avant que le seuil d'endommagement ne soit atteint (fig2(a)), ce qui est en accord avec la figure 2a. La figure 2 c,

montre que la fonction seuil de type endommagement parfait (eq 3) permet bien d'obtenir une loi cohésive de type "triangle".

### 3 Application aux EF : Fissuration dans le cas 1-D

Nous décrivons ici rapidement l'algorithme de la méthode asymptotique numérique dans le cas 1-D avec un chargement monotone croissant. La formulation faible est décrite par les équations (Eq. 8) dans lesquelles l'introduction des développements en série des inconnues conduit aux problèmes aux différents ordres (Eq.

8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L EI v''''(s) \delta v''(s) - k_c v(s) \delta v(s) ds + \int_0^L k_c ed(s) v(s) \delta v(s) ds = F(t) \delta v(L) \\ ed(s) = \frac{x_c}{x_d(s)} \\ wd(s) = \frac{v(s)}{x_d(s)} - 1 \\ td(s) = (wd(s))^2 \\ \dot{x}_d(s) = \dot{v}(s) \frac{\eta_0}{td(s) + \eta_0} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L EI v''''(s) \delta v''(s) - k_c v(s) \delta v(s) ds + \int_0^L k_c (ed_0(s) v_{i-1}(s) + ed_i(s) v_i(s)) \delta v(s) ds = F_i \delta v(L) + F_i^{MAX} \\ ed_i(s) = -\frac{x d_i(s) ed_0(s)}{x d_0(s)} - \sum_{i=1}^{i-1} \frac{x d_{i-1}(s) ed_i(s)}{x d_0(s)} \\ x d_i(s) = \frac{v_i(s) \eta_0}{td_0 + \eta_0} - \sum_{i=1}^{i-1} (k-i) \frac{x d_{i-1}(s) td_i(s)}{x d_0(s)} \\ wd_i(s) = \sum_{i=0}^i \frac{ed_i(s) v_{i-1}(s)}{x_c} \\ td_i(s) = \sum_{i=0}^i wd_i(s) wd_{i-1}(s) \\ F_i^{MAX} = \int_0^L k_c \left( \sum_{i=1}^{i-1} ed_i(s) v_{i-1}(s) \right) \delta v(s) ds \end{array} \right. \quad (8)$$

Nous présentons ici des premiers résultats sur de l'évolution de l'endommagement dans une fondation modélisée par une zone cohésive en utilisant la méthode ANM. Les paramètres géométriques de la poutre présentée sur la figure 3 sont : longueur  $L=0,3$  m, largeur  $b=0,01$  m et hauteur  $h=0,02$  m. Les caractéristiques élastiques du matériaux constituant cette poutre sont :  $E= 200.10^9$  Pa and  $\nu=0,3$ . L'interface élastique endommageable servant de fondation est de type « triangle » et les données matériaux sont  $k_0=200$  Pa,  $k_c=20$  Pa, and  $x_c=0,05$  m. Le chargement monotone à l'extrémité de la poutre,  $s=L$ , est défini  $F(t) = \dot{F}_0 t$  où  $\dot{F}_0 = 10$  Ns<sup>-1</sup>. La poutre est encadrée en  $x=0$ .

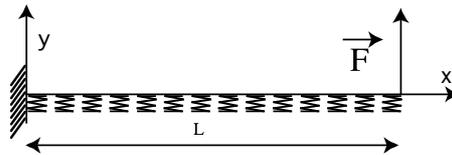


Fig3 Schéma de la poutre sur fondation inélastique

Les paramètres numériques de la méthode ANM utilisés dans ces simulations sont  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $\eta_0 = 5.10^{-3}$  et  $N = 15$ .

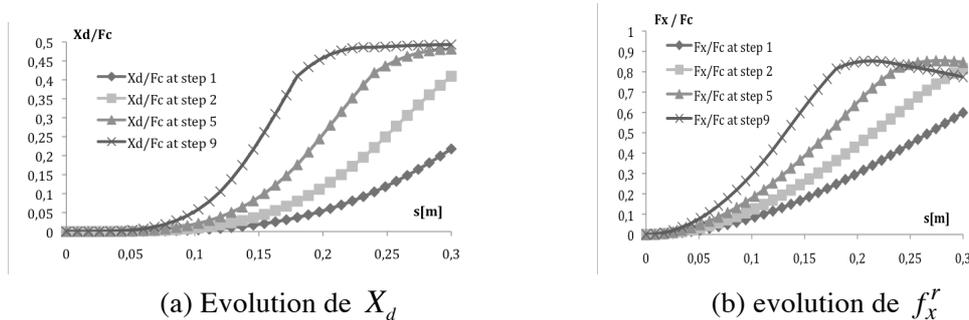


Fig4 Réponse de l'interface à différents pas de calcul.

Nous présentons, figure 4, l'évolution le long de la poutre à différents pas de calcul les forces thermodynamiques admimentionalisées  $X_d/f_c$  et  $f_x^r/f_c$  respectivement sur les figures (a) et (b). Sur la figure 5 nous comparons l'évolution de la variable d'endommagement  $x_d(s)$  et l'évolution de la flèche le long de la poutre, notée  $V(s)$  pour deux types de maillage. Ces courbes montrent une faible influence du maillage dans ce cas simple et que les courbes sont confondues dès que l'endommagement augmente. Ce résultat

corrobore ceux de la figure 4a qui montrent que le seuil d'endommagement est atteint pour  $s \geq 0,2$  et que la force thermodynamique  $f_x^f$  diminue également

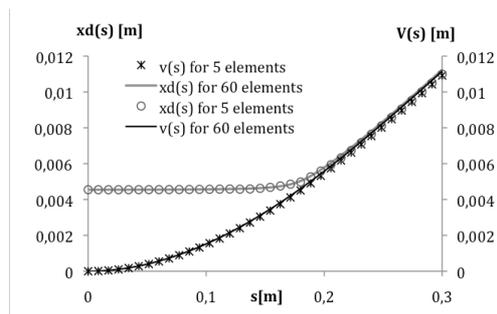


Fig5 Evolution de long de la poutre de  $V(s)$  et  $x_d(s)$  au pas 9

## 4 Conclusion

Nous avons présenté ici une première application de la méthode ANM dans le cas d'une interface élastique endommageable modélisée par une loi de type « triangle ». Cette loi a été également reformulée afin de l'inclure dans le cadre des matériaux standard généralisés. Le choix des variables d'état permet d'écrire une loi d'endommagement associée. Nous avons adapté et implémenté dans un code éléments-finis la méthode ANM à ce cas de figure non régulier. Les résultats numériques obtenus montrent que cette méthode est efficace pour résoudre ce type de problème.

## Références

- [1] Cochelin B., Damil N. et Potier-Ferry M., Méthode Asymptotique Numérique: une technique de résolution des équations non linéaires. Paris, London: Hermès Science Publishing, 2007.
- [2] Daridon L., Wattrisse B., Chrysochoos A. et Potier-Ferry M. Solving fracture problems using an asymptotic numerical method. Computers & Structures, 89, March 2011, pp 476-484(89).
- [3] Daridon L., zidani K. The stabilizing effects of fiber bridges on delamination cracks. Composites Science and Technology, 62(1), p. 83-90, 2002.
- [4] Corigliano A., Allix O., Some aspect of interlaminar dégradation in composites, International Journal of Solids and Structures. 38 (4), p. 547-576, 2001.
- [5] Perales F., Bourgeois S., Chrysochoos A., Monerie Y. Two field multibody method for periodic homogenization in fracture mechanics of nonlinear heterogeneous materials, 75(11), p.3378-3398, 2008.
- [6] Ladevèze P., A damage computational method for composite structures. Computers and Structures 44, p. 79-87 1992.
- [7] Le Maitre J., A course on damage Mechanics. Springer, Verlag, Berlin, 92
- [8] Halphen B., Nguyen Qs., On the generalized standard materials. Journal de mécanique. 14(1), p. 39-63 1975.
- [9] Germain P., Nguyen Qs., Suquet P. Continuum thermodynamics, Journal of applied mechanics-transaction of the ASME. 50 (4B):1010-1020, 1983.
- [10] Wattrisse B., Muracciole JM., Chrysochoos A., Thermomechanical effects accompanying the localized necking of semi-crystalline polymers, International Journal of Thermal Sciences. 41 (5) , p. 422-427, 2002.
- [11] Assidi M., Damil N., Potier-Ferry M. et Zahrouni H., Regularization and perturbation techniques to solve plasticity problems, International Journal of Material Forming, 2, p. 1-14, 2009
- [12] Zahrouni H., Potier-Ferry M., Elasmr H. et N. Damil, Asymptotic Numerical Method for nonlinear constitutive laws, Revue Européenne des éléments finis, 7, p. 841-869, 1998.