

# Analyse fiabiliste du taux de restitution d'énergie en milieux viscoélastiques orthotropes

R. MOUTOU PITTI<sup>a</sup>, A. CHATEAUNEUF<sup>a</sup>, C. CHAZAL<sup>b</sup>, E. FOURNELY<sup>a</sup>

a. Clermont Université, Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI), EA 3867, BP 206, 63000 CLERMONT FERRAND (France)

b. Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogènes (GEMH), Université de Limoges, Centre Universitaire Génie Civil, 19300 EGLÉTONS (France)

## Résumé :

*Un modèle mécano-fiabiliste est développé pour l'analyse de la fissuration dans un milieu viscoélastique orthotrope en mode mixte de chargement. La formulation analytique est introduite par l'intégrale M généralisée au comportement viscoélastique et résolue par une approche incrémentale issue du théorème des travaux virtuels. L'éprouvette CTS (Compact Tension Shear) est utilisée pour simuler le taux de mixité voulu. Les incertitudes sur les propriétés du matériau sont prises en compte par des variables aléatoires afin de calculer la probabilité de rupture grâce à la méthode de calcul fiabiliste FORM. L'application numérique présente un modèle éléments finis d'une plaque en bois fissurée soumise à une mixité de chargement.*

## Abstract :

*A model coupling reliability analysis and mixed mode fracture separation adapted to viscoelastic orthotropic material is proposed in this paper. The analytical formulation is introduced according to the path-independent integral M generalized to the viscoelastic behavior and solved by an incremental approach based on the virtual work principle. The Compact Tension Shear specimen is used in order to introduce the mixed mode configuration. The uncertainties on the material properties are taken into account by random variables in order to compute the failure probability with the reliability method FORM. The numerical application is performed on a finite element model of a cracked wood material submitted to mixed mode ratios.*

**Mots clefs :** rupture, fiabilité, modes mixtes, viscoélasticité, Intégrales invariantes.

## 1 Introduction

Le mode mixte conditionne souvent la durée de vie des ouvrages en service surtout lorsque les matériaux qui composent ces édifices ont un caractère hétérogène et orthotrope couplé au comportement viscoélastique [1]. Dans la majorité des cas, la négligence de ce type de sollicitation dans la conception des structures peut conduire à des erreurs significatives dans la prévision des dommages. Les critères de mixité sont ainsi d'une grande importance dans le dimensionnement des pièces de bois entaillées. Cependant, les modes mixtes de rupture, combinés au comportement dépendant du temps, sont des phénomènes affectés par des incertitudes élevées, d'où la prise en compte des méthodes fiabilistes dans la prévision de la vie des ouvrages.

L'objectif du présent travail est de coupler le modèle de fiabilité au comportement viscoélastique orthotrope afin d'estimer les incertitudes des paramètres utilisés en rupture. Dans l'approche viscoélastique, des intégrales indépendantes ont été employées afin d'étudier l'impact du mode mixte dans l'initiation de fissure [2]. Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de la fiabilité aux problèmes de mécanique de la rupture [3]. Ainsi, l'approche fiabiliste a été couplée au modèle d'éléments de frontière pour l'évaluation probabiliste de la résistance à la fatigue en mode de propagation mixte des fissures [4]. Récemment, la croissance aléatoire du mode mixte a été étudiée par la méthode stochastique de collocation [5]. Cependant, ces travaux ne prennent pas en considération les effets viscoélastiques.

Dans la première partie du présent papier, l'approche fiabiliste est rappelée, conduisant à la définition de la

fonction de défaillance et de la méthode FORM. Dans la deuxième partie, les lois de conservation d'énergie combinées aux champs mécaniques réels et virtuels [6], ainsi que l'intégrale responsable de l'initiation de fissure en mode mixte, sont rappelées. Les effets dépendant du temps sont introduits via le modèle de Kelvin Voigt généralisé résolu par une formulation viscoélastique [2]. L'éprouvette CTS (Compact Tension Shear) [7] est utilisée pour simuler le chargement mixte souhaité. L'algorithme du processus d'initiation et de fiabilité est basée sur un critère énergétique. Les paramètres aléatoires utilisés dans le modèle numérique sont fixés en fonction des valeurs critiques du taux de restitution d'énergie en mode d'ouverture et de cisaillement. L'analyse de fiabilité permet d'obtenir la probabilité de rupture et la sensibilité des paramètres de rupture dans le calcul des structures viscoélastiques fissurées.

## 2 Rappels de fiabilité

La fiabilité est définie comme la capacité d'une structure à garantir son bon fonctionnement pendant sa durée de vie [8,9]. La fiabilité est complémentaire de la probabilité de défaillance  $P_f$ . La principale étape dans l'analyse de fiabilité consiste à identifier l'ensemble des variables aléatoires  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , pour lesquelles des incertitudes doivent être considérées. Pour toutes ces variables, des distributions statistiques sont définies pour décrire les incertitudes ; une réalisation de cet ensemble de variables est notée  $x_i$ . Les distributions probabilistes peuvent être choisies par des observations physiques, des études statistiques, des analyses de laboratoire et des expertises. Cependant, il est important de souligner que la qualité de l'évaluation de la fiabilité dépend aussi bien de la qualité de l'information disponible (c.-à-d. données d'entrée) que de la qualité du modèle de fiabilité.

La deuxième étape consiste à définir les modes de défaillance potentiellement critiques. Pour chacun d'eux, une fonction d'état limite  $g(x_i)$  est définie pour séparer deux régions : le domaine sûreté, où  $g(x_i) > 0$ , et le domaine de défaillance où  $g(x_i) < 0$ . La frontière entre ces deux domaines, définie par  $g(x_i) = 0$ , est l'état limite. Dans notre cas, l'analyse est effectuée en prenant en compte les critères de rupture. En mécanique de la rupture en mode mixte, l'état limite peut être écrit sous la forme [10]:

$$g(x_i) = 1 - \left( \frac{{}^1G_v(x_i)}{{}^1G_c(x_i)} + \alpha \frac{{}^2G_v(x_i)}{{}^2G_c(x_i)} \right) \quad (1)$$

avec  ${}^1G_v$  et  ${}^2G_v$  les taux de restitution d'énergie en mode modes 1 et 2, respectivement.  ${}^1G_c$  et  ${}^2G_c$  les valeurs critiques du taux de restitution d'énergie respectivement en mode 1 et 2.  $\alpha$  désigne un facteur d'orthotropie, supposé unitaire dans notre étude. Pour cet état limite, la probabilité de rupture est évaluée en intégrant la fonction de densité au delà du domaine de défaillance [9] :

$$P_f = \Pr g[G(X_i)] \leq 0 = \int_{g(x_i) \leq 0} f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

où  $f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la fonction de densité des variables  $X_i$ . L'évaluation de l'intégrale ci-dessus n'est pas facile, en raison de la haute précision exigée et de l'indisponibilité de la fonction de densité. Pour ces raisons, on propose généralement deux approches pour la fiabilité mécanique [11] : les simulations aléatoires et les méthodes d'approximation. Les simulations aléatoires, connues sous le nom de méthodes de Monte Carlo [9], exigent un grand nombre d'évaluations de la fonction de performance, et par conséquent du modèle mécanique. Elles sont donc pratiques quand le modèle mécanique est analytique, impliquant des faibles temps de calcul. La précision des simulations de Monte Carlo peut être dictée en évaluant l'écart-type de l'estimation de la probabilité. Quand les modèles d'éléments finis sont utilisés, les méthodes d'approximation, telles que FORM [9], deviennent attrayantes car elles exigent un nombre relativement peu élevé de calculs mécaniques. Cependant, la précision de la méthode FORM dépend de la courbure de la fonction de performance dans l'espace gaussien normal, car cette méthode est basée sur l'approximation

locale par l'hyperplan au voisinage du point de défaillance le plus probable. Une expérience précédente en industrie mécanique prouve que la réponse mécanique est habituellement lisse et les courbures sont faibles, particulièrement dans l'analyse statique, ce qui nous permet d'utiliser les approximations de la méthode FORM.

Dans notre cas, le modèle d'éléments finis est employé pour l'analyse mécanique, par conséquent, le temps de calcul pour chaque évaluation de la fonction de performance devient significatif. Ainsi, l'utilisation des simulations de Monte Carlo, exigeant un très grand nombre d'analyses mécaniques, conduit à des temps de calculs astronomiques. Pour surmonter cette difficulté, nous avons appliqué les algorithmes FORM comme décrit en [9]. Cette procédure a été exécutée pour la fonction d'état limite définie dans l'équation (1) où les taux de restitution d'énergie sont calculés par une approche éléments finis décrite ci-dessous.

### 3 Intégrales invariantes et comportement viscoélastique

Afin de séparer les modes mixtes de rupture, l'intégrale M, caractérisée par l'indépendance du domaine d'intégration, a été développée [6]. Cette approche consiste à associer des champs mécaniques virtuels  $v$  et réels  $u$  définissant la forme bilinéaire de l'énergie libre suivante :

$$F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(u)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(v)} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{(v)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(u)} \quad (3)$$

où  $\sigma_{ij}^{(u)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(v)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(u)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(v)}$  sont les composantes de contrainte et de déformation induites par les formes réelles et virtuelles associées. En l'absence de pression sur les lèvres de la fissure, l'intégrale M devient :

$$M = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j d\Gamma \quad (4)$$

L'intégrale (4) est définie sur un contour curviligne. Pour des facilités d'implémentation éléments finis, on la définit sur un contour surfacique [12]. La généralisation au comportement viscoélastique est introduite par un modèle de Kelvin Voigt généralisé :

$$M\theta_v^{(p)}(u, v) = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_{ij}^{(p)}(u) \cdot u_i^{(p)} - \sigma_{ij,k}^{(p)}(v) \cdot v_{i,k}^{(p)}) \cdot \theta_{k,j} dV \quad \text{avec } p = (0, 1, \dots, M) \quad (5)$$

Afin d'évaluer les facteurs d'intensité de contrainte réels  ${}^u K_I^{(p)}$  et  ${}^u K_{II}^{(p)}$ , le découplage est obtenu en effectuant deux calculs différents de l'intégrale  $M\theta_v^{(p)}(u, v)$ . Ainsi, en choisissant des valeurs adéquates des facteurs d'intensité de contrainte virtuels  ${}^v K_I^{(p)}$  and  ${}^v K_{II}^{(p)}$ , on obtient :

$${}^u K_I^{(p)} = \frac{8 \cdot M\theta_v^{(p)}(u, v)({}^v K_I^{(p)} = 1, {}^v K_{II}^{(p)} = 0)}{C_1^{(p)}} \quad \text{et} \quad {}^u K_{II}^{(p)} = \frac{8 \cdot M\theta_v^{(p)}(u, v)({}^v K_I^{(p)} = 0, {}^v K_{II}^{(p)} = 1)}{C_2^{(p)}} \quad (6)$$

A partir de l'équation (6), on peut aisément évaluer le taux de restitution d'énergie pour chaque cellule de Kelvin Voigt.

$$G_v^{(p)} = {}^1 G_v^{(p)} + {}^2 G_v^{(p)} = C_1^{(p)} \cdot \frac{({}^u K_I^{(p)})^2}{8} + C_2^{(p)} \cdot \frac{({}^u K_{II}^{(p)})^2}{8} \quad (7)$$

$${}^1 G_v = \sum_k {}^1 G_v^{(p)} \quad \text{et} \quad {}^2 G_v = \sum_k {}^2 G_v^{(p)} \quad \text{avec } p \in \{0, 1, \dots, N\}$$

${}^1G_v^{(p)}$  et  ${}^2G_v^{(p)}$  représentent les taux de restitution d'énergie propre au  $p^{\text{ième}}$  ressort respectivement en modes 1 et 2 ;  $C_1^{(p)}$  et  $C_2^{(p)}$  sont les complaisances viscoélastiques associées.

La résolution de l'équation (7) se fait grâce à une formulation viscoélastique incrémentale introduite par la loi constitutive suivante

$$\Delta \varepsilon_{ij}(t_{n+1}) = \Psi_{ijkl} \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_{n+1}) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n) \quad (8)$$

$\Delta \varepsilon_{ij}(t_{n+1})$  et  $\Delta \sigma_{kl}(t_{n+1})$  désignent les incréments de déformation et de contrainte durant le laps de temps  $\Delta t_n$ .  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t)$  est l'influence globale de l'histoire passée du matériau.  $\Psi_{ijkl}$  traduit la matrice de complaisance viscoélastique.

#### 4 Eprouvette et algorithme de résolution

L'éprouvette CTS (compact Tension Shear), Figure 1, est utilisée pour simuler l'ensemble des modes mixtes de rupture. Cette éprouvette a été adaptée au matériau bois par Valentin et Caumes [7]. La longueur initiale de la fissure choisie est 20mm. Une charge externe unitaire symétrique est appliquée aux bras en acier rigide. Les points  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1..7\}$ , sont des trous où des forces sont appliquées suivant un angle fonction du taux de mixité.

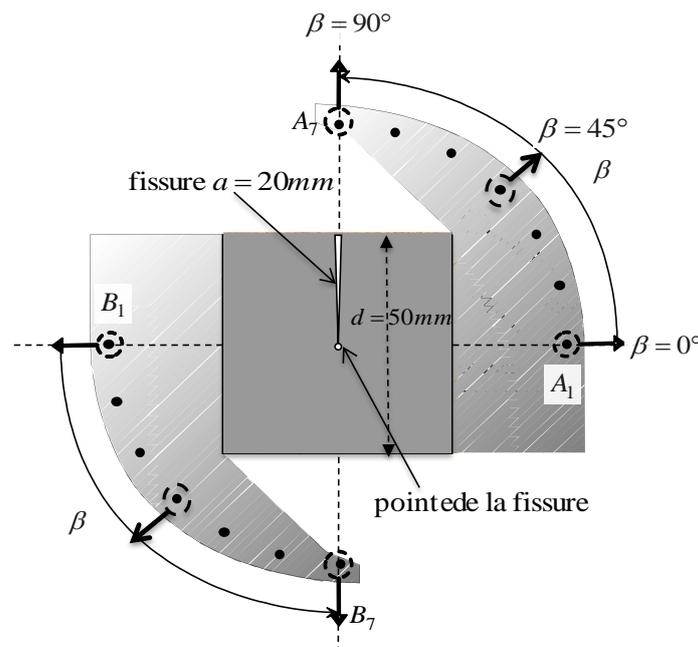


FIG. 1 – Eprouvette CTS [2]

Dans cette section, la procédure numérique implémentée dans le code de calcul aux éléments finis Castem, développé par le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique) est expliquée. Cet algorithme présente la relation entre le découplage des modes mixtes de rupture, le comportement viscoélastique et l'analyse de fiabilité. Nous ajoutons dans cet algorithme la procédure qui sert à évaluer les champs mécaniques virtuels. Ainsi, nous supposons que des champs mécaniques sont connus au temps  $t_n$  et l'incrément de temps  $\Delta t_n$  est fixé. Toutes les propriétés du matériau viscoélastique sont expérimentalement définies.

- Premièrement, l'intégrale  $M\theta$ , expression (5), est calculée.
- Grâce à la procédure du comportement viscoélastique expliquée en [2], le chargement viscoélastique supplémentaire et le vecteur de chargement externe sont évalués. Ainsi, le vecteur d'incrément des déplacements nodaux et le champ de déformation  $\{\varepsilon\}(t_{n+1})$ , équation (10), sont

calculés. Le tenseur de complaisance  $C_1^{(p)}$ , équation (6), est introduit afin de prendre en compte les propriétés du matériau. Ainsi, le tenseur de contrainte  $\{\sigma^p\}(t_n)$ , et les chargements nodaux sont déduits. Le déplacement  $\{u^p\}$ , propre à chaque cellule de Kelvin Voigt est obtenu en résolvant l'équation constitutive (8) issue du théorème des travaux virtuels.

- Afin d'évaluer les facteurs d'intensité de contrainte virtuel  ${}^v K_\alpha^p$ , équation (5), la procédure de calcul virtuel est utilisée en combinant les équations (6) et (7). Finalement, les taux de restitution d'énergie  ${}^\alpha G_v^p$ , et les facteurs d'intensité de contrainte réels  ${}^r K_\alpha^p$  sont obtenus. Une sommation de  ${}^\alpha G_v^p$  permet d'obtenir le taux de restitution d'énergie propres au mode correspondant  ${}^\alpha G_v$  et définie pour l'ensemble des cellules du modèle. Enfin, la procédure de calcul fiabiliste est appliquée sur toutes les étapes précédentes avec l'algorithme FORM.

## 5 Résultats numériques

L'analyse de fiabilité est maintenant appliquée à l'éprouvette de la figure 2, avec une fonction d'état limite définie par l'équation (1). Les variables aléatoires sont décrites dans le tableau 1, avec les deux taux de restitution d'énergie critiques entièrement corrélés. La force appliquée est définie en termes du paramètre p pour un angle de chargement de 45°.

Variables	Symbole	Distribution	Moyenne	Ecart type
Module d'élasticité longitudinal	$E_x$ (MPa)	lognormale	15000	1500
Module d'élasticité transversal	$E_y$ (MPa)	lognormale	600	90
G critique en mode 1	${}^1 G_c$ (N/m)	lognormale	170	17
G critique en mode 2	${}^2 G_c$ (N/m)	lognormale	420	42
Force appliquée	F (kN)	Normale	p	0,15p
Fissure initiale	a (mm)	Déterministe	20	1
Angle de sollicitation	$\beta$ (°)	Déterministe	45	
Dimension de l'éprouvette carrée	d	Déterministe	50	

TABEAU. 1 – Variables aléatoires prises en compte dans le model

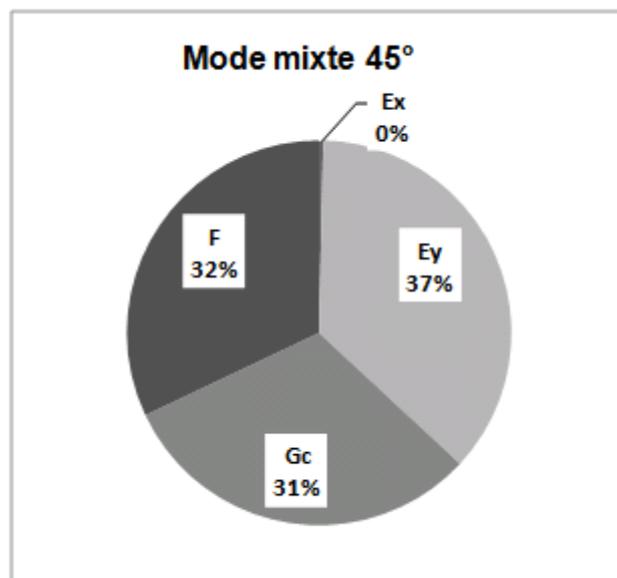


FIG. 2 – Importance des variables pour le mode mixte 45°

Pour un taux de mixité de 45°, la figure 2 montre l'importance des variables aléatoires sur la fiabilité de la structure dans le cas d'une initiation de fissures. La fiabilité matérielle est conjointement et

principalement dictée par la charge appliquée et par l'énergie critique. La probabilité de rupture observée est de  $2.19 \times 10^{-2}$ . La procédure de calcul FORM nous permet de déterminer la configuration de défaillance la plus probable définie par les paramètres suivants:  $E_x = 14688,9$  MPa,  $E_y = 502,5$  MPa,  ${}^1G_c = 150,9$  N/m,  ${}^2G_c = 372,8$  N/m, et  $F=1.19$  kN. Pour un tel niveau de fiabilité, les facteurs de sécurité partiels sont donnés par 1.02, 1.19, 1.13 et 1.19 respectivement pour  $E_x$ ,  $E_y$ ,  ${}^1G_c$ ,  ${}^2G_c$  et  $F$ .

## 6 Conclusion

Le couplage de l'analyse de fiabilité et de celle du mode mixte de rupture appliqué aux matériaux viscoélastiques et orthotropes a été étudié. La principale étape dans l'analyse de fiabilité consiste à identifier l'ensemble des variables aléatoires, définissant les modes de défaillance potentiellement critiques où la probabilité de rupture est calculée par la méthode FORM. Le comportement viscoélastique a été introduit via un modèle de Kelvin Voigt généralisé et résolu par une loi viscoélastique incrémentale. La séparation analytique des paramètres de rupture est opérée par l'intégrale indépendante  $M$ . Afin de représenter les différents modes mixtes, l'éprouvette CTS proposant un taux de mixité de  $45^\circ$  pendant l'initiation de la fissure a été utilisée. Un algorithme combinant l'initiation de la fissure, les approches viscoélastiques et la fiabilité a été écrit. L'importance des variables aléatoires sur la fiabilité de la structure a été déterminée. Dans les exemples numériques en modes mixtes proposés, il est prouvé que le module d'élasticité transversal joue un rôle prédominant dans la sécurité vis-à-vis de la rupture. Dans le prochain travail, ce modèle sera amélioré afin de prendre en considération le processus de propagation de la fissure.

## References

- [1] Jernkvist L.O., Fracture of wood under mixed mode loading II. Experimental investigation of Picea abies Lars Olof. Eng Fract Mech, 68(5), 565-576, 2001
- [2] Moutou Pitti R., Dubois F., Sauvat N., Petit C., Mixed mode fracture separation in viscoelastic orthotropic media: numerical and analytical approach by the  $M\theta v$ -integral, Int J Fract, 145(3), 181-193, 2007.
- [3] Leonel E.D., Chateauneuf A., Venturini W.S., Bressolette P., Coupled reliability and boundary element model for probabilistic fatigue life assessment in mixed mode crack propagation. Int J Fatigue, 32(11), 1823-1834, 2010.
- [4] Nicholson D.W, Ni P., Extreme value probabilistic theory for mixed mode brittle fracture, Eng Fract Mech, 58(1), 121-132, 1997.
- [5] Riahi H., Bressolette Ph., Chateauneuf A., Random fatigue crack growth in mixed mode by stochastic collocation method, Eng Fract Mech, 77(16), 3292-3309., 2010.
- [6] Chen F.H.K., Shield R.T., Conservation laws in elasticity of the J-integral type, J Appl Mech Physics, 28 (1), 1-22, 1977.
- [7] Valentin G., Caumes P., Crack propagation in mixed mode in wood: a new specimen, Wood Sci Technol, 23(1), 43-53, 1989.
- [8] Ditlevsen O., Madsen H., Structural Reliability Methods. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [9] Lemaire M., Chateauneuf A., Mitteau J.-C., Structural reliability, John Wiley & Sons, ISBN 978-1-84821-082-0, 2009.
- [10] Griffith A.A., The phenomena of rupture and flow in solids, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 221, 163-197, 1921.
- [11] Neves R.A, Chateauneuf A.M., Venturini W.S., Component and system reliability analysis of nonlinear reinforced concrete grids with multiple failure modes, Structural Safety, 30(3), 183-199, 2008.
- [12] Destuynder P.H., Djaoua M., Lescure S., Some remarks on elastic fracture mechanics, J Mec Theor Appl, 2 (1), 113-135, 1983.