

Simulation discrète du transfert électrique dans les milieux granulaires

K. Bourbatache^{a,b}, M. Guessasma^a, E. Bellenger^a, J. Fortin^a, A. Tekaya^{c,b}, V. Bourny^b,
R. Bouzerar^c

a. LTI, IUT de l'Aisne, 48 rue d'Ostende, 02100 St-Quentin

b. MIS, INSSET, 48 rue Raspail, 02100 St-Quentin

c. PSC, UFR des Sciences, 33 rue Saint Leu, 80039 AMIENS Cedex 1

Résumé :

Dans ce travail nous nous intéressons à la modélisation du transfert électrique dans les milieux granulaires métalliques par une approche discrète. Les travaux expérimentaux ont mis en évidence la complexité du comportement électrique de ces milieux sous chargement mécanique. Les propriétés électriques dépendent des interactions entre particules dans le cas d'un contact électrique parfait. Une modélisation numérique par éléments discrets permet d'étudier le transfert électrique dans un milieu granulaire, afin de mettre en évidence l'influence du couplage électromécanique sur les propriétés électriques macroscopiques.

Abstract :

In this work we focus on modeling the electrical transfer in granular metal by a discrete approach. The experimental work showed the complexity of the electrical behavior of these media under mechanical loading. The electrical properties depend on the contact forces in case of a perfect electrical contact. A discrete element numerical modeling allows to study the electromechanical behavior of granular media, in order to highlight the influence of electromechanical coupling on the electrical properties.

Mots clefs : Transfert électrique ; Milieux granulaire ; Méthode des éléments discrets.

1 Introduction

Dans ce travail, nous proposons d'étudier le transport électrique dans un milieu granulaire. Les résultats disponibles pour une chaîne 1D de billes métalliques oxydées, soumise à une charge statique, montrent une transition de l'échantillon d'un état isolant vers un état conducteur lorsque le courant appliqué augmente [2, 3]. Ce phénomène, qualifié d'effet Branly est une instabilité de la conductance électrique qui apparaît au niveau des contacts entre les billes. Ainsi, les caractéristiques tension-courant (U-I) mesurées entre deux billes électrodes sont non linéaires et hystérétiques.

L'objectif principal de cette étude est d'introduire dans un code Eléments Discrets (ED) [6] un modèle physique capable de reproduire le comportement électrique d'un milieu granulaire à faible courant. Nous nous limitons dans cette étude au contact électrique parfait, les effets de la couche d'oxyde ne sont pas pris en compte dans notre modèle.

Nous présenterons tout d'abord une modélisation physique du transfert électrique dans un milieu granulaire. Cette modélisation est basée principalement sur la loi de Kirchhoff et la loi d'Ohm. Un nouveau modèle de conductance électrique dans une particule appartenant à un système multi-contacts sera présenté. Nous proposerons ensuite, une modélisation dans le cas de deux billes en contact permettant de mettre en évidence l'influence du couplage électromécanique, ainsi que la pertinence du modèle de conductance proposé. Une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux sera effectuée pour deux billes en contact.

Enfin, nous étudierons le transfert électrique dans un milieu granulaire bidimensionnel sous chargement

mécanique par le biais du code de calcul par ED MULTICOR. Cette modélisation a pour objectif de mettre en évidence l'influence d'une part, du nombre de billes et d'autre part du chargement mécanique appliqué sur les propriétés électriques macroscopiques du milieu granulaire.

2 Modélisation électromécanique dans un système multi-contacts

2.1 Modélisation mécanique

L'originalité du code MULTICOR est l'utilisation d'un solveur de contact basé sur le concept du bipotentiel initié par de Saxcé [11]. De plus, il utilise une approche NSCD (Non-Smooth Contact Dynamics) développé par M. Jean et J.-J Moreau [7, 8], ce qui permet de modéliser les effets dynamiques mais aussi de travailler avec un pas de discrétisation très grand ($\Delta t \approx 10^{-3}s$) en comparaison avec les codes explicites ($\Delta t \approx 10^{-7}s$).

Dans le cas de notre étude, les particules sont sphériques non-déformables et non-pénétrables. En choisissant comme paramètres de configuration q , les coordonnées du centre de gravité des grains et les rotations d'Euler, les termes gyroscopiques et centrifuges sont nuls et la matrice de masse généralisée $\underline{\underline{M}}$ du système ne dépend pas de q et est diagonale par bloc. L'équation à modéliser s'écrit donc :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} = F_{ext}(q, \dot{q}, t) + R^{n_c}, \quad (1)$$

où F_{ext} représentent les efforts extérieurs explicitement connus et R^{n_c} ($R^{n_c} = \underline{\underline{n}}^T f$) sont les efforts intérieurs associés aux réactions de contact à priori inconnues exprimées dans le repère global, n_c est le nombre de contacts et $\underline{\underline{n}}^T$ est la matrice de passage transposée. A chaque paire de particules i, j candidates au contact, les réactions locales \underline{f} sont données par :

$$\underline{f} = \underline{f}_t + f_n \underline{n}, \quad (2)$$

où \underline{n} est la normale dirigée de j vers i , \underline{f}_t est la force de frottement et f_n est la force normale. Le cycle de calcul est un algorithme de type "pas à pas" qui requiert la répétition d'un schéma de résolution.

2.2 Modélisation électrique

Considérons un milieu granulaire Ω de frontière $\partial\Omega$ composé de n_p particules sphériques en contact avec n_c le nombre total de contacts. On suppose que chaque contact est un nœud et chaque paire de nœuds appartenant à la même particule forme une branche. Le réseau électrique globale est composé de n_c noeuds et de n_b branches (voir fig. 1(a)).

En appliquant la loi de Kirchhoff, garantissant la conservation de la charge électrique du milieu granulaire, on obtient :

$$\mathbb{A}I = I_0 \quad (3)$$

où \mathbb{A} ($\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_b}$) représente la matrice d'incidence, traduisant la connectivité du milieu granulaire, I et I_0 sont respectivement les vecteurs courant électrique et courant électrique imposé¹ aux frontières $\partial\Omega$. En appliquant la loi d'Ohm entre les noeuds i et j de la branche ij ($ij = 1, n_b$) on obtient l'équation matricielle suivante :

$$I = \mathbb{C}\mathbb{A}^T V \quad (4)$$

où V ($V \in \mathbb{R}^{n_c}$) est le vecteur potentiel électrique et \mathbb{C} ($\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$) est la matrice de conductance (matrice diagonale) des branches constituant le réseau électrique, dont les composantes sont déterminées par l'expression (6). En remplaçant le vecteur courant électrique dans l'équation (4), à partir de son expression donnée par (3), nous obtenons l'équation finale à résoudre :

$$\mathbb{G}V = I_0 \quad (5)$$

avec $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{A}^T$ la matrice de conductance globale qui dépend de la conductance de chaque branche et de la connectivité du milieu granulaire ($\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$). L'équation (5) permet tout d'abord de déterminer

1. Le vecteur I_0 contient toutes les sources de courant électrique dans le milieu granulaire.

le potentiel en chaque nœud (contact) pour ensuite calculer le courant électrique pour chaque branche à partir de l'équation (4). La modélisation ainsi effectuée est basée sur la méthode MNA (Modified Nodal Analysis).

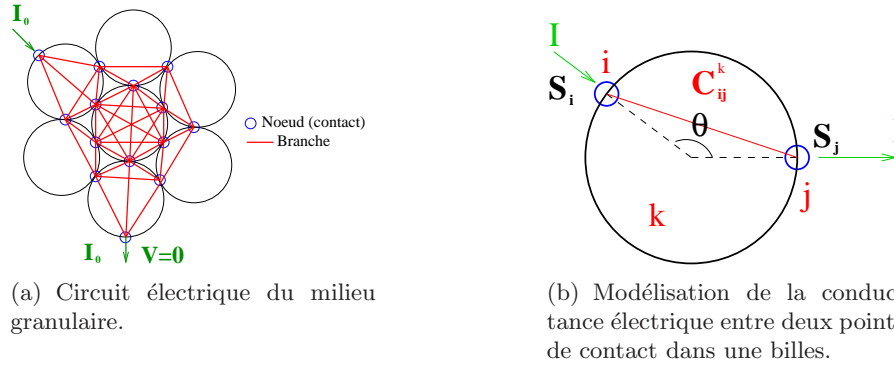


FIGURE 1 – Milieu granulaire Ω avec le réseau électrique correspondant.

L'originalité de ce travail réside dans le calcul de la conductance entre une paire de contact et l'existence d'un potentiel au niveau de chaque contact. Le potentiel électrique est calculé sur chaque nœud cela permet d'avoir plusieurs potentiels électriques au sein d'une particule selon le nombre de coordination de celle-ci. Le courant électrique dans une particule a plus de chemins possibles par rapport au modèle de Renouf et Fillot [10] dont le calcul de la conductance de contact est basé sur le modèle de Holm [5]. La résistance électrique linéaire (régime ohmique) d'un corps dépend à la fois de ses propriétés intrinsèques, de la forme du domaine matériel occupé par le corps, de la position relative des électrodes de mesure à la surface de ce corps ainsi que de l'interface se développant au niveau du contact corps/électrode. Si l'effet de l'interface électrode/corps peut être en général négligé (résistance de contact pratiquement nulle), les autres effets sont difficiles à estimer. Un modèle général permettant ce calcul a été élaboré par R. Bouzerar et A. Tekaya [1] et conduit à l'expression suivante de la conductance C_{ij}^k entre deux points de contacts i et j de la particule k :

$$C_{ij}^k = \frac{\gamma S_i S_j}{2V_k} (1 - \cos \theta) \quad (6)$$

où γ est la conductivité électrique du matériau, V_k est le volume de la particule k , θ est l'angle de l'arc de cercle formé par les points de contact i et j (voir fig 1(b)). S_i et S_j désignent les surfaces de contact respectivement données par $S_{i(j)} = \pi a_{i(j)}^2$, avec a_i et a_j les rayons de contact calculés par la théorie de Hertz :

$$a = \left(\frac{3f_n r_{eff}}{4E_{eff}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

où f_n est l'effort normal de contact, r_{eff} est le rayon effectif de la paire de contact et E_{eff} est le module de Young effectif donné par $\frac{1}{E_{eff}} = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$, E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

2.3 Couplage électromécanique

Dans cette partie nous nous intéressons à l'implémentation de la modélisation électrique présentée auparavant dans le code ED MULTICOR [4]. L'algorithme présenté à la figure 2 résume le couplage électromécanique implémenté dans MULTICOR.

Dans un premier temps, nous déterminons les points et les efforts de contact entre les particules à partir du calcul mécanique, afin de calculer les rayons et les aires de contact. Dans un second temps,

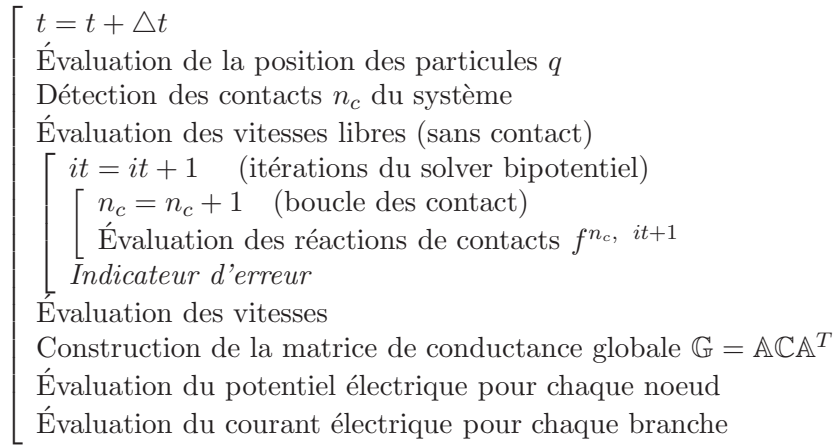


FIGURE 2 – Algorithme de couplage électromécanique.

l'équation (6) permet de calculer les conductances électriques et cela pour chaque branche. Enfin, nous résolvons le système (5) pour déterminer les potentiels électriques en chaque point de contact. Les courants électriques quant à eux sont déterminés d'après la loi d'Ohm (4).

3 Applications numériques

3.1 Système à deux particules

On considère, pour commencer, un milieu composé de deux billes en acier de diamètre $d = 4mm$ (figure 3(a)). On applique une force F et un courant électrique I_0 sur la paroi Γ_1 . Les parois Γ_2 et Γ_4 sont électriquement isolantes. Un potentiel nul est imposé sur la paroi Γ_3 . Par conséquent, seules les conductances C_{12} et C_{23} ne seront pas nulles. Cela revient à résoudre un système simple de deux conductances en série. Une étude paramétrique permet de mettre en évidence l'influence de la force appliquée F sur le comportement électrique du milieu considéré.

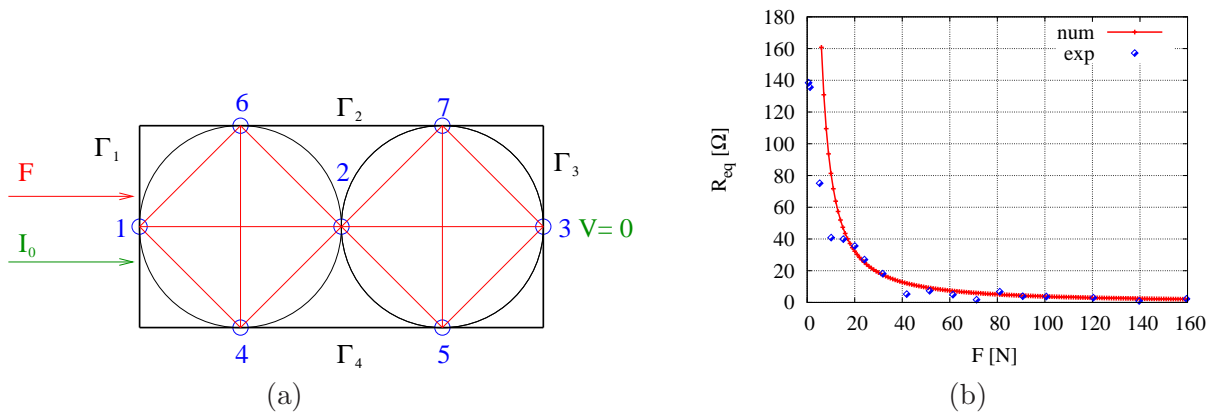


FIGURE 3 – (a) Modèle à deux billes en acier, (b) Variation de la résistance électrique en fonction de la force appliquée en échelle logarithmique.

Les surfaces de contact aux points (1, 2 et 3) sont identiques. On en déduit que les conductances C_{12} et C_{23} sont les mêmes :

$$C_{12} = C_{23} = C = \frac{\gamma S^2}{V}, \quad S = \pi \left(\frac{3Fr_{eff}}{4E_{eff}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad C_{eq} = \frac{2}{C}$$

où C_{eq} désigne la conductance équivalente du milieu. Les billes en acier ont les propriétés mécaniques et électriques suivantes : $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ et $\frac{1}{\gamma} = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega m$. La figure 3(b) représente la

variation de la résistance équivalente R_{eq} en fonction de la force appliquée F . Celle-ci diminue avec l'augmentation de la force appliquée. Cette chute est due à l'augmentation des efforts de contact inter-particule et par conséquent de la surface de contact. Les valeurs de R_{eq} calculées sont du même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux obtenus sur deux billes en acier de mêmes propriétés électriques et mécaniques. Ce résultat permet de valider notre modèle numérique dans le cas d'un faible courant électrique et pour une force de compression relativement importante, pour un contact électrique parfait. Dans le cas d'une faible force de compression il y a un écart entre les résultats numériques et expérimentaux dû à l'existence d'une couche d'oxyde sur la surface des billes.

3.2 Système multi-contacts bidimensionnel

Considérons un milieu granulaire bidimensionnel composé de 500 particules en acier² de diamètre $d = 2 \text{ mm}$. Un courant électrique $I_0 = 10^{-2} \text{ A}$ et une force de compression $F = 100 \text{ N}$ sont appliqués sur la paroi Γ_1 . Les points de contact appartenant aux particules qui sont en contact avec la paroi Γ_2 ont un potentiel électrique V nul. Les parois verticales Γ_3 et Γ_4 sont électriquement isolantes. Les résultats numériques obtenus sont présentés à la figure 4.

La figure 4(b) illustre les chaînes de force entre particules au sein du milieu granulaire considéré. La distribution des efforts conditionne d'une manière directe les chemins et les intensités du courant électrique (voir fig. 4(c)). La conductance électrique dépend de la surface de contact donc de l'effort de contact, ce qui explique l'analogie entre la distribution des efforts et celle du courant électrique. La figure 4(d) représente la distribution du potentiel électrique dans le milieu granulaire³.

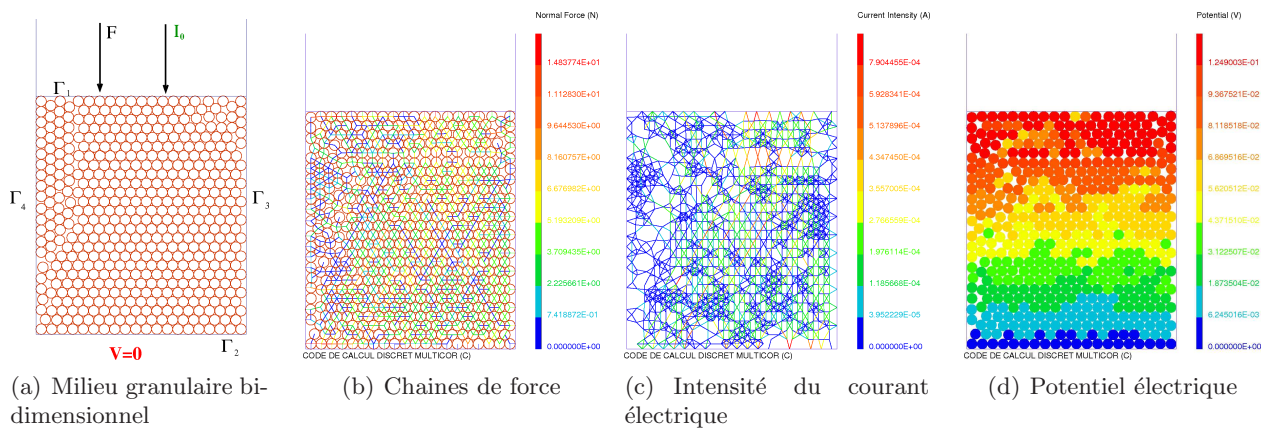


FIGURE 4 – Résultats numériques pour un milieu granulaire 2D avec $F = 100 \text{ N}$ et $I_0 = 10^{-2} \text{ A}$.

Nous nous sommes intéressés à l'influence de l'épaisseur du lit de particules sur la variation de la résistance équivalente. Nous avons donc fait varier le nombre de billes N_b ($N_b \in [100, 600]$). La force appliquée au lit de particules F varie de 10 à 180 N . Le courant électrique I_0 imposé sur la paroi supérieure est fixé à 10^{-2} A .

La figure 5 représente la variation de R_{eq} du milieu granulaire en fonction de la force appliquée en échelle logarithmique. On remarque la même variation de R_{eq} en fonction de la force que dans le cas de deux billes en contact. On remarque aussi que le nombre de billes N_b a une influence sur la résistance électrique équivalente. Celle-ci croît avec l'augmentation de l'épaisseur du lit de particules. Les courbes de la figure 5 présentent toutes une pente de $-4/3$ et cela quel que soit le nombre de billes. Cette valeur de pente s'explique par le fait que $C \propto F^{4/3}$ d'après les équations (6) et (7). Ce dernier résultat n'est valable que dans le cas d'un contact électrique parfait où aucun phénomène de surface n'est pris en compte au niveau du contact (couche d'oxyde, effet tunnel, micro-pont,...).

2. Les propriétés électriques et mécaniques sont identiques à celles utilisées dans la section (3.1).

3. La valeur affectée à chaque particule est la moyenne arithmétique des potentiels électriques calculés en chaque nœud (point de contact).

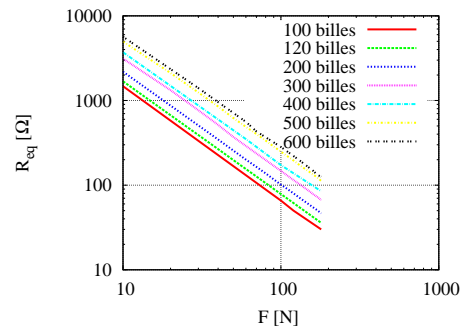


FIGURE 5 – Variation de R_{eq} en fonction de F en échelle logarithmique pour différents nombres de billes.

4 Conclusion

Cette étude a permis d'intégrer le transfert électrique dans le code de calcul par ED MULTICOR. Un nouveau modèle de conductance électrique a été présenté, ce dernier a été validé par des résultats expérimentaux dans le cas simple de deux billes en contact et cela pour des importantes forces de compression. La modélisation électrique développée permet de calculer le potentiel électrique entre deux points de contact. Les simulations numériques sur des milieux granulaires en 2D ont permis de mettre en évidence l'influence de la force de compression et de l'épaisseur du lit de particules sur les propriétés électriques équivalentes. La modélisation ainsi effectuée ne reste valable que dans le cas d'un contact électrique parfait à faible courant électrique et à forte force de compression. Cette démarche ouvre la voie à une modélisation numérique plus fine du transfert électrique dans les milieux granulaires, d'une part, en intégrant les effets de surface (couche d'oxyde, effet tunnel, création de micro-pont...), et d'autre part, en couplant les effets électriques et thermiques. Ces derniers seront pris en compte en utilisant le couplage thermo-mécanique déjà implémenté dans le code MULTICOR [9].

Références

- [1] Bouzerar, R., Tekaya, A., Bourny, V. Influence of mechanical compression on the resistive to conductive state transition of metallic beads assemblies. A soumettre dans *Applied Physics Letters (APL)*
- [2] Creyssels, M., Dorbolo, S., Merlen, A., Laroche, C., Castaing, B., Falcon, E. 2007 Some aspects of electrical conduction in granular system of various dimension. *The European Physical Journal E*. **23** 255-264
- [3] Falcon, E., Castaing, B., Ceysseles, M. 2004 Nonlinear electrical conductivity in a 1D granular medium. *The European Physical Journal B*. **38** 475-483
- [4] Fortin, J., de Saxcé, G. 1999 Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bi-potentiel. *C. R. Acad. Sci* **327** série IIB 721-724
- [5] Holm, R. 2000 Electric Contact : Theory and Application. *Springer Verlag*
- [6] Sanni, I., Bellenger, E., Fortin, J., Coorevits P., 2010 A reliable algorithm to solve 3D frictional multi-contact problems : application to granular media. *Journal of computational and applied mathematics*. **234** 1161-1171
- [7] Jean, M., 1999 The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **177** 235-257
- [8] Moreau, J.-J., 1994 Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*. **13** 93-114
- [9] Nguyen, V.D., Cogné, C., Fortin, J., Guessasma, M., Bellenger, E., 2009 Discrete modelling of granular flow with thermal transfer : application to the discharge of silos. *Applied Thermal Engineering*. **29** 1846-1853
- [10] Renouf, M., Fillot, N. 2008 Coupling Electrical and Mechanical Effects in Discrete Element Simulations. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. **74** 238-254
- [11] de Saxcé, G., Feng, Z.-Q., 1998 The bipotentiel method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Math. Comput. Modelling*. **28** 225-245