

# Dynamique non linéaire d'un oscillateur à mémoire de forme

M. Ould Moussa, O. Doaré, C. Touzé, A. Sbarra et Z. Moumni

Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech,  
Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex, France

## Résumé :

*Nous étudions les réponses forcées d'un oscillateur reproduisant le comportement pseudo-élastique d'un alliage à mémoire de forme. Le modèle est issu d'une loi de comportement tridimensionnelle prenant en compte les couplages entre la thermique, la mécanique et les changements de phase solide-solide du matériau. Les réponses forcées montrent un comportement assouplissant dès que la transformation martensitique est activée, ainsi que l'existence de zones chaotiques. Des résultats expérimentaux sur un pendule de torsion permettent d'étendre ces résultats à un système continu.*

## Abstract :

*Forced oscillations of a shape memory device displaying pseudo-elastic behaviour are studied. The model is derived from a three-dimensional behaviour law taking into account thermomechanical coupling and solid-solid phase changes. Frequency responses show a nonlinear softening behaviour as soon as the martensitic transform is activated, as well as chaotic behaviour. Experimental results on a torsional pendulum assess the observed phenomena for a continuous structure.*

## 1 Introduction

Les matériaux à mémoire de forme (MMF) sont le siège d'un changement de phase solide-solide (la transformation martensitique) qui peut donner lieu à une phénoménologie complexe et variée : effet mémoire simple sens ou double sens, effet superthermique, effet caoutchoutique, ... L'effet pseudo-élastique est quant à lui recherché pour l'augmentation de dissipation importante observée, par rapport à un matériau standard, due à la présence d'une boucle d'hystérésis lors d'un cycle chargement-déchargement. Cette dissipation intrinsèque importante fait de ces matériaux des candidats idéaux pour la mise au point d'amortisseurs vibratoires efficaces [1]. Cependant, alors que les MMF ont fait l'objet de nombreuses études en statique, les régime dynamiques sont encore peu explorés. Bernardini *et al.* ont effectué une série d'études théoriques sur un modèle dérivant de celui d'Ivshin et Pence, cf. par exemple [2]. Des études expérimentales ont par ailleurs été réalisées sur des barres en traction/compression à très haute fréquence [3] ou sur des poutres en flexion, en basses fréquences [4].

Dans cette contribution, nous étudions les comportements dynamiques d'un oscillateur dont la raideur varie non linéairement en suivant un comportement pseudo-élastique. La raideur non linéaire est calculée en simplifiant un modèle complet tridimensionnel à un comportement unidimensionnel. Le modèle complet couple les comportements thermomécaniques et la transformation martensitique [5]. L'oscillateur à mémoire de forme considéré reproduit donc tous ces phénomènes. Dans cette étude nous nous limiterons à un cas isotherme. Les réponses temporelles du modèle sont calculées par une méthode de Newmark adaptée au cas du traitement des fonctions critères. Les courbes de réponses en fréquences sont calculées et montrent un comportement non linéaire assouplissant ainsi que l'existence de zones chaotiques. Enfin nous présentons des résultats expérimentaux sur le cas d'un fil en torsion en alliage NiTi.

## 2 Modèle

Le modèle utilisé est pleinement tridimensionnel, thermodynamiquement admissible, et a été développé dans le cadre des matériaux standards généralisés. Il se caractérise par la définition de la déformation de transformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{tr}$  comme le produit de la fraction volumique  $z$  avec la déformation due à la réorientation des plaquettes de martensite  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{ori}$ , soit :  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{tr} = z \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{ori}$ . Son intérêt fondamental et son originalité réside dans le fait que cette modélisation est en mesure de proposer une unification des différentes propriétés observées des MMF [5].

Afin de se ramener à un cas d'un oscillateur à mémoire de forme et d'en étudier les comportements dynamiques, le modèle est réduit à une dimension d'espace en considérant un fil de longueur  $L$ , de diamètre  $D$  tel que  $D \ll L$ , en traction-compression selon  $x$ . La contrainte  $\sigma_{xx}$  s'exprime alors via le rapport  $F/S$ , où  $S$  est la surface de la section, et les déformations s'expriment via les allongements relatifs, soit :  $\varepsilon_{xx} = X/L$ ,  $\varepsilon_{tr} = X_{tr}/L$  et  $\varepsilon_{ori} = X_{ori}/L$ . Les grandeurs sont adimensionnées par l'échelle de longueur  $X_{M_s}$  qui représente l'allongement pour lequel la transformation martensitique est initiée, *i.e.*  $X = x \cdot X_{M_s}$ . L'échelle de temps utilisée est l'inverse  $f_{adim}$  de la fréquence propre correspondant aux oscillations purement austénitiques, soit  $f_{adim} = 1/2\pi\sqrt{K_a/M}$ , où  $K_a = E_a S/L$  est la raideur de la phase austénitique ( $E_a$  son module d'Young), et  $M = \rho SL$  la masse du fil. On considère enfin un forçage harmonique de pulsation adimensionnée  $\Omega$  et d'amplitude adimensionnée  $\gamma = A/F_{M_s}$ . La dynamique se réduit alors à :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + f(x, z, x_{ori}) = \gamma \cos \Omega t, \quad (1)$$

où  $t$  est le temps adimensionné, et  $f$  la force interne sans dimension, provenant de  $F = S\sigma_{xx}$ . Pour simplifier les expressions nous supposons ici que les modules d'Young des phases austénite et martensite sont les mêmes,  $E_a = E_m$ , ce qui permet d'avoir une expression de  $f$  ne dépendant pas d'un paramètre sans dimension impliquant le rapport  $E_a/E_m$  :  $f = x - zx_{ori}$ .

La dynamique de la fraction volumique  $z$  s'exprime via sa variable duale  $\mathcal{A}_z$  et les conditions de Kuhn-Tucker pour la fonction critère  $\phi^{crit} = |\mathcal{A}_z| - (a(1-z) + bz)$  :

$$\dot{z} \cdot \phi^{crit} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{z} \cdot \dot{\phi}^{crit} = 0. \quad (2)$$

L'expression (dimensionnée) de  $\mathcal{A}_z$  est :

$$\mathcal{A}_z = \frac{-1}{2E_a} \left(\frac{F}{S}\right)^2 + \frac{1}{2E_m} \left(\frac{F}{S}\right)^2 + \frac{1}{SL} F \cdot X_{ori} - C(T) - Gz - \left((\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{X_{ori}}{L}\right)^2. \quad (3)$$

La dynamique du déplacement de réorientation  $x_{ori}$  s'exprime à partir de la relation suivante, héritée de la règle de normalité  $\dot{x}_{ori} = \dot{\eta} \text{sgn}(f)$ , où l'évolution de  $\eta$  vérifie les conditions de Kuhn-Tucker pour la fonction critère  $\Phi^{crit} = |\mathcal{A}_{ori}| - Yz$  :

$$\dot{\eta} \cdot \Phi^{crit} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\eta} \cdot \dot{\Phi}^{crit} = 0. \quad (4)$$

L'expression de  $\mathcal{A}_{ori}$  est :

$$\mathcal{A}_{ori} = z \frac{f}{S} - z(\alpha z + (1-z)\beta) \frac{x_{ori}}{L} - \mu \frac{\text{sgn}(x_{ori})}{L}. \quad (5)$$

Ces deux forces thermodynamiques en dualité respectivement avec  $z$  et  $x_{ori}$  sont dérivées d'un lagrangien du système qui s'écrit en une dimension :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(1-z)E_a \left(\frac{x_a}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}zE_m \left(\frac{x_m - x_{ori}}{L}\right)^2 + zC(T) + \left[ z[\alpha z + (1-z)\beta] \times \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{x_{ori}}{L}\right)^2 \right] \right] \\ & - \lambda_1 z - \lambda_2(1-z) - \frac{f}{SL} [(1-z)x_a + zx_m - x] - \mu \left( \frac{|x_{ori}|}{L} - \frac{x_0}{L} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Dans ces définitions, données dans leur formulation dimensionnée, sont apparues un certain nombre de constantes propres au modèle :  $a, b, G, \alpha, \beta$  et  $Y$  sont des paramètres matériau.  $a$  et  $b$  contrôlent entre autres les pentes des plateaux dans la transformation de phase,  $G$  exprime les interactions au sein de la phase martensitique et  $Y$  représente le seuil de début de la réorientation. La fonction  $C(T)$  représente la densité de la chaleur latente et s'exprime via :  $C(T) = \xi_l(T - T_0) + \kappa$ , où  $\xi_l$  est la chaleur latente,  $T_0$  une température d'équilibre entre les deux phases et  $\kappa$  la densité de chaleur latente initiale. En ce qui concerne la réorientation des plaquettes, on fait l'hypothèse qu'elle est achevée dès le début du chargement, soit, en une dimension :  $x_{ori} = x_0 \text{sgn}(f)$ . Notons dans ce cas que le deuxième critère de réorientation n'est plus à traiter.

La dernière équation du modèle est donnée par l'évolution temporelle de la température adimensionnée  $\theta$  (échelle de température  $T_{ref}$ ) :

$$\dot{\theta} - \frac{A_z}{\rho C_p} \dot{z} - \frac{\xi_l}{\rho C_p} \theta \dot{z} = h(\theta_{ext} - \theta), \quad (7)$$

où  $C_p$  est la capacité thermique et  $h$  un coefficient d'échange adimensionné. La température a été supposée uniforme dans l'échantillon afin de s'affranchir de la dépendance spatiale. Bien que le modèle puisse potentiellement traiter le cas d'évolution non isotherme, les résultats présentés dans cet article se limitent volontairement au cas isotherme en posant  $\theta = \text{constante}$ .

L'ensemble des équations gouvernant la dynamique du système sont ensuite intégrées numériquement en utilisant un schéma de Newmark pour la partie oscillante (1), dont les itérations de Newton sont mises à profit afin de vérifier les conditions fournies par les fonctions critères (2).

### 3 Résultats de simulations

Les 13 paramètres du modèle ont été fixés à des valeurs permettant de simuler le cas étudié par Lacarbonara *et al* [6] en vue de procéder à des comparaisons. Une procédure d'identification a été mise en œuvre afin d'ajuster les valeurs de nos paramètres à ceux de leur modélisation [6]. Pour les simulations présentées dans cette section, on a :  $a=17,9\text{MPa}$ ,  $b=17,9\text{MPa}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,11$ ,  $\alpha = 1,47\text{GPa}$ ,  $\beta = 1,47\text{GPa}$ ,  $G = 26,8\text{MPa}$ ,  $\kappa = 8,68\text{MPa}$ ,  $\xi_l = 0,53\text{MPa}/^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 233\text{K}$ ,  $A_f = 238\text{K}$ ,  $Y = 164\text{MPa}$ ,  $E_a = 50\text{GPa}$  et  $E_m = 50\text{GPa}$ . L'amortissement visqueux a quant à lui été fixé à  $\xi=0,05$

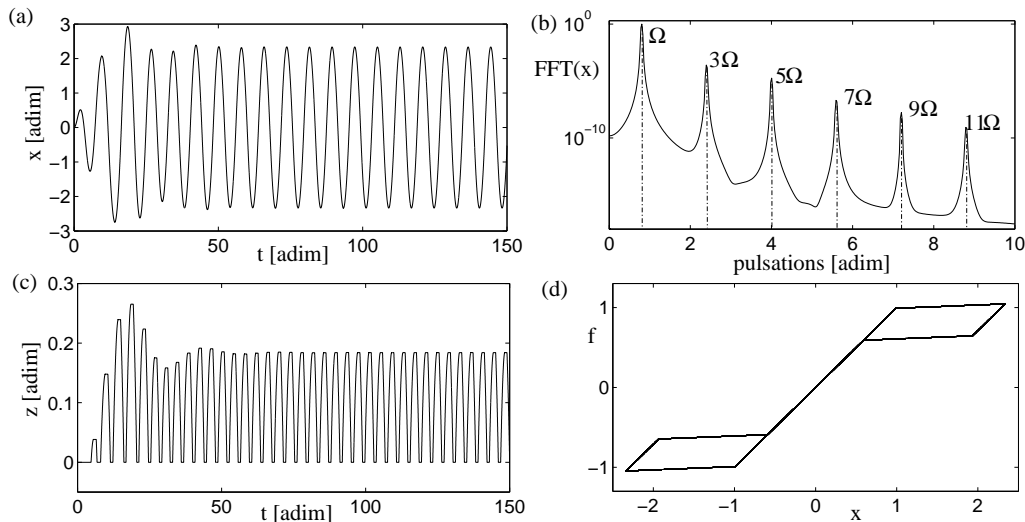


Figure 1: Simulation en régime forcé avec  $\gamma=0,5$  et  $\Omega=0,8$ , avec pour condition initiale au repos. (a)-(c) : déplacement  $x$  et fraction volumique  $z$  en fonction du temps. (b) : transformée de Fourier discrète de  $x$  en régime stationnaire. (d) : diagramme force/déplacement montrant le comportement en régime stationnaire.

La figure 1 montre le résultat d'une simulation temporelle obtenue pour une pulsation d'excitation  $\Omega=0,8$ , et une amplitude de forçage  $\gamma=0,5$ . Les valeurs étant adimensionnée, cela signifie qu'on se place un peu avant la résonance linéaire austénitique (en  $\Omega = 1$ ), et pour une amplitude du forçage telle qu'en

régime statique on soit à la moitié de la force nécessaire pour commencer la transformation. Partant d'une condition initiale au repos ( $x = \dot{x} = 0$ ), on observe que le régime transitoire est très bref, ce qui s'explique par la dissipation apportée par le comportement non linéaire. Le régime stationnaire montre que l'on effectue la transformation à chaque cycle du forçage, l'effet de résonance faisant que le système répond à des amplitudes grandes alors que l'amplitude du forçage reste petite. On constate de plus que la fraction volumique  $z$  évolue à une fréquence double de celle du forçage (1(c)), puisqu'en un cycle de forçage, on a quatre transformations (deux directes et deux inverses). Le système étant non linéaire et symétrique, la transformée de Fourier du déplacement  $x$  montre logiquement des harmoniques impairs d'amplitudes décroissantes, fig. 1(b).

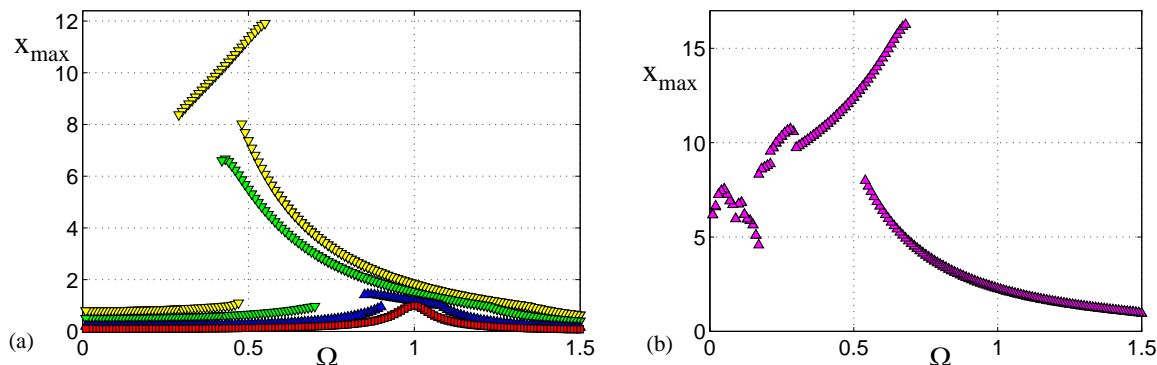


Figure 2: Réponse en fréquence : maximum de l'amplitude en régime stationnaire en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$ . (a) : amplitudes de forçage croissantes :  $\gamma = 0,1$  (carrés rouges, réponse linéaire),  $\gamma = 0,2$  (triangles bleus),  $\gamma = 0,5$  (triangles verts),  $\gamma = 0,8$  (triangles jaunes). (b) :  $\gamma = 1,2$ .

Le résultat présenté fig. 1 est reproduit de manière systématique pour calculer la réponse en fréquence du système pour  $\Omega \in [0,1,5]$ . Les courbes présentées fig. 2 sont obtenues numériquement en calculant, pour chaque valeur de  $\Omega$ , l'amplitude de la réponse en régime stationnaire, ce que l'on obtient en prenant la valeur maximale de  $x(t)$  passé un transitoire choisi suffisamment long. La courbe est calculée de proche en proche en prenant comme condition initiale d'une nouvelle simulation en temps les conditions finales obtenues au point précédent, afin de converger plus rapidement vers l'état stationnaire.

La figure 2(a) montre les courbes de réponse en fréquences obtenues pour quatre amplitudes de forçage croissantes :  $\gamma = 0,1$ ,  $0,2$ ,  $0,5$  et  $0,8$ . Pour  $\gamma = 0,1$ , l'amplitude de la réponse, même à la résonance, ne dépasse jamais 1, si bien que l'on reste en régime linéaire. Pour  $\gamma = 0,2$ , on commence à transformer pour une petite gamme de fréquence autour de la résonance. On observe alors clairement que les branches de solutions non linéaires s'incurvent vers les basses fréquences : c'est un comportement assouplissant (perte de rigidité) attendu puisque la raideur effective du système diminue dès lors que l'on commence à transformer. Cet effet est confirmé pour  $\gamma = 0,5$ . Enfin pour  $\gamma = 0,8$ , on voit apparaître une troisième branche de solutions aux grandes amplitudes, correspondant aux mouvements pour lesquels la transformation a été complète. Dans ce cas-là la raideur effective du système augmente et les branches de solution s'incurvent vers les hautes fréquences (comportement raidissant). Ces solutions ont été comparées avec celles obtenues par Lacarbonara *et al* [6] montrant un excellent accord. la seule différence notable étant le fait que leur modèle prévoit, pour  $\gamma = 0,8$ , que l'amplitude de la réponse  $x$  dépasse 1 au voisinage de  $1/3$  (résonance super-harmonique). Notre modèle ne prévoit pas ce comportement pour cette valeur, par contre la résonance super-harmonique est bien excitée pour des amplitudes de forçage plus grande.

La figure 2(b) montre la réponse en fréquence obtenue pour  $\gamma = 1,2$ , valeur à laquelle la transformation est initiée pour tout le régime quasistatique  $\Omega \in [0,1]$ . On remarque la présence de la résonance secondaire autour de  $\Omega = 1/3$ , ainsi qu'un ensemble de points désordonnés aux basses fréquences, signes que des comportements plus complexes que périodiques sont sans doute calculés sur cette bande de fréquence. Afin d'obtenir une vue plus complète de la dynamique à cet endroit, il faut alors effectuer une section de Poincaré (stroboscopie à la pulsation du forçage  $\Omega$ ). Cette opération (figure non montrée) révèle l'existence de comportements chaotiques dont un exemple est montré fig. 3, pour

$\Omega=0,23$ . On observe en particulier sur le spectre de  $x$  l'existence des harmoniques pairs, signe que la transition vers le chaos s'est effectuée via une bifurcation brisant la symétrie (symmetry-breaking).

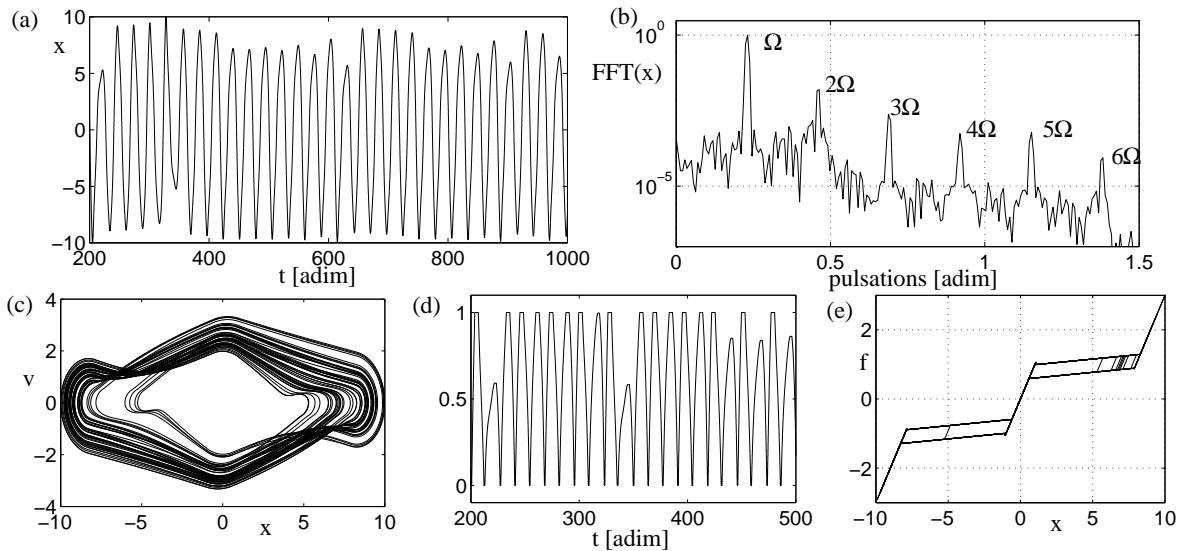


Figure 3: Régime chaotique pour  $\gamma=1,2$  et  $\Omega=0,23$ . (a) : déplacement  $x$ . (b) : Transformée de Fourier de  $x$ . (c) : plan de phase déplacement  $x$  - vitesse  $v = \dot{x}$ . (d) : fraction volumique  $z$ . (e) : comportement.

## 4 Pendule de torsion

Dans cette section, nous étudions un pendule de torsion composé d'un fil en NiTi. Le but est d'étendre les résultats précédents à un système continu dont la dynamique peut être réduite à un seul mode (ici le premier mode de torsion). Le schéma du montage expérimental est représenté Fig. 4(a). Un moteur situé en haut du fil permet de lui imposer une contrainte en torsion via un angle imposé. Une masse est suspendue en bas du fil afin de pouvoir contrôler la première fréquence propre. Enfin, la masse du bas peut être soit bloquée, ce qui permet de mesurer le couple de torsion et donc de trouver le comportement quasistatique du matériau, soit être libre d'osciller, ce qui permet alors d'étudier les oscillations forcées du pendule.

La Figure 4(c) montre le comportement mesuré (couple de torsion en fonction de l'angle imposé) pour le specimen retenu (fil de diamètre 2 mm et de longueur utile 85 mm, NiTi 56,1% Ni). Pour un angle imposé de 100 degrés, le comportement reste linéaire et le matériau ne subit pas de changement de phase. A 350 et 450 degrés la transformation martensitique est activée et la boucle d'hystéresis apparaît. On peut noter que le comportement est symétrique pour la torsion.

La courbe de réponse en fréquence expérimentale est montrée fig. 4(b). Elle est obtenue de la même manière que les simulations : la pulsation d'excitation est augmentée pas à pas et on relève la valeur maximale de la réponse pour chaque  $\Omega$ . Pour chaque amplitude du déplacement imposé par le moteur, on effectue un balayage par fréquences croissantes et un par fréquences décroissantes, afin d'obtenir toutes les branches de solution. Le comportement assouplissant est très nettement mesuré au voisinage de la fréquence propre

## 5 Conclusion et perspectives

La dynamique d'un oscillateur dont la raideur a un comportement pseudo-élastique, a été étudiée numériquement. Le modèle utilisé provient d'une modélisation générale des matériaux à mémoire de forme couplant thermomécanique et changements de phase dans un cadre unifié. Le modèle complet, pleinement tridimensionnel, a été adapté et réduit au cas unidimensionnel. Les courbes de réponses en fréquence montrent un comportement assouplissant et l'existence de régimes chaotiques pour des grandes amplitudes de vibrations. Une étude expérimentale sur un pendule de torsion, dont la dynamique peut être réduite à un seul oscillateur en tronquant au premier mode de torsion, met aussi clairement en évidence le comportement non linéaire assouplissant.

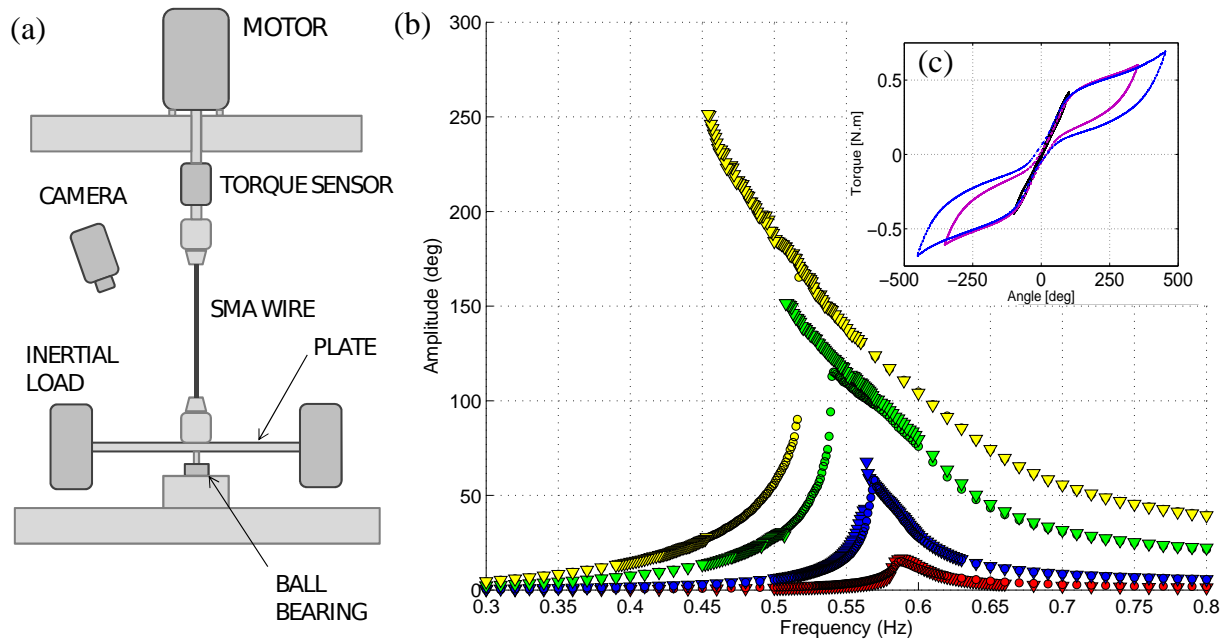


Figure 4: (a) : Représentation schématique du montage expérimental pour le pendule de torsion. (c) : Mesure quasi-statique à 0,01 Hz pour trois valeurs d'angle imposé : 100 degrés (comportement austénitique), 250 et 450 degrés (apparition de la transformation martensitique). (b) : Réponse en fréquence (maximum de l'amplitude vibration) pour des fréquences croissantes (rond  $\circ$ ) et décroissantes (triangle  $\nabla$ ) et plusieurs valeurs d'angle imposé : 0.5 degré (rouge, réponse linéaire), 2 degrés (bleu), 8 degrés (vert) et 15 degrés (jaune).

Cette étude est étendue au cas non isotherme en levant l'hypothèse de température constante, ce qui rajoute une équation à la dynamique du système. Ensuite, le modèle tridimensionnel sera réduit à un oscillateur en faisant les hypothèses ad-hoc sur le comportement en torsion, afin de pouvoir comparer les résultats expérimentaux obtenus sur le pendule de torsion au modèle.

## References

- [1] S. Saadat, J. Salichs, M. Noori, H. Davoodi, I. Bar-on, Y. Suzuki, and A. Masuda. An overview of vibration isolation and seismic applications of NiTi shape memory alloy. *Smart materials and Structures*, 11(2):211–218, 2002.
- [2] D. Bernardini and F. Vestroni. Non-isothermal oscillations of pseudo-elastic devices. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 38:1297–1313, 2003.
- [3] D.Z. Li and Z.C. Feng. Dynamic properties of pseudoelastic shape memory alloys. *Proc. SPIE*, 3041:715–725, 1997.
- [4] M. Collet, E. Foltête, and C. LExcellent. Analysis of the behavior of a shape memory alloy beam under dynamical loading. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 20:615–630, 2001.
- [5] Z. Moumni and W. Zaki. A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape-memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(11):2455–2490, 2007.
- [6] W. Lacarbonara, D. Bernardini, and F. Vestroni. Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5-6):1209–1234, 2004.