МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.926.4

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A HIGH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO DEGENERATING ELLIPTIC OPERATORS

А.В. Глушак
A.V. Glushak

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация
Устанавливается разрешимость задачи Дирихле для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами.

Abstract
Solvability of the Dirichlet problem for a linear differential equation of high order with two degenerate elliptic operators is established, which makes it possible to investigate the unique solvability of this problem.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения высокого порядка, задача Дирихле, однозначная разрешимость.
Keywords: degenerate differential equations of high order, the Dirichlet problem, unique solvability.

Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Отдельные виды таких уравнений, например, обыкновенные дифференциальные уравнения Эйлера, Бесселя и др., подробно и глубоко изучены. Обзор уравнений с неотрицательной характеристической формой, которые, в частности, включают вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных можно найти в [1]. По данной тематике отметим также работы [2 – 6], появившиеся в последнее время. Подробная библиография работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям высокого порядка содержится в [7]. Однако и до настоящего времени для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка определенные моменты разрешимости исследованы не полностью.

Из теории регулярных эллиптических задач известно, что эти задачи устойчивы по отношению к младшим членам входящих в формулировку задач операторов. Аналогичная ситуация возникает, если к вырождающемуся эллиптическому оператору порядка $2m$ прибавить вырождающийся эллиптический оператор порядка $2p<2m$ с не меньшей скоростью вырождения. Если же к такому оператору прибавить оператор порядка $2p$ с меньшим порядком вырождения, то полученный оператор уже не будет подчинённым по отношению к исходному, и доказательство разрешимости граничных задач для суммы операторов такого вида становится нетривиальной задачей.

В настоящей статье предложен метод доказательства однозначной разрешимости задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами.

Постановка задачи

В полосе $D=[0,d]\times R_n$ рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка, содержащего два вырождающихся эллиптических оператора также высокого порядка и с постоянными коэффициентами

$$L_{2m}(D_\alpha,D_y)U(x,y)+L_{2p}(D_\beta,D_y)U(x,y)=F(x,y), \tag{1}$$

$$U(d,y)=\partial_x U(d,y)=\cdots=\partial_x^{m-1}U(d,y)=0, \tag{2}$$

где $p<m$ – натуральные числа, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ – мультииндекс,

$$L_{2m}(D_\alpha,D_y)U(x,y)=\sum_{j+|\mu|\le 2m}a_{j\mu}D_\alpha^j D_y^\mu U(x,y),\quad L_{2p}(D_\beta,D_y)U(x,y)=\sum_{j+|\mu|\le 2p}b_{j\mu}D_\beta^j D_y^\mu U(x,y),$$

$$D_y^\mu U(x,y)=\partial_{y_1}^{\mu_1}\cdots\partial_{y_n}^{\mu_n}U(x,y),\quad D_\alpha U(x,y)=i\sqrt{\alpha(x)}\partial_x\left(\sqrt{\alpha(x)}U(x,y)\right),\quad \alpha(x)\in C^{2m}[0,d],\quad \alpha(0)=0,\quad \alpha(x)>0$$

при $x>0$. Аналогично D_α определяется оператор D_β.

Коэффициенты $a_{j\mu}$ $(j+|\mu|\le 2m)$, $b_{j\mu}$ $(j+|\mu|\le 2p)$ – действительные постоянные числа.

Условие 1. Многочлены $L_{2m}(\tau,\xi), L_{2p}(\tau,\xi)$ положительны при любых $(\tau,\xi)\in R_{n+1}$.

Условие 2. Пусть $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, $\alpha(x),\beta(x)\in C^{2m}[0,d]$, а функция $\omega(x)=\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ такова, что $\omega^{p/((m-p)}(x)\in C^{2p}[0,d]$.

Условие 3. Пусть $\partial_x\beta(0)=0$, функция $\delta(x)=\left(\dfrac{\alpha^m(x)}{\beta^p(x)}\right)^{1/(m-p)}$ принадлежит $C^{2p}[0,d]$ и $\partial_x\delta(0)=0$.

Введём необходимые для дальнейшего обозначения. Для $0\le j\le m-1$, $0\le k\le p$ положим

$$\varphi_{jk}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^j\,\Pi\widetilde{\rho}_k(t)\exp(-it\tau)\,dt\,d\tau}{b_{2p,0}+a_{2m,0}\tau^{2(m-p)}},$$

где Π – оператор продолжения функции из пространства Соболева $H^{2p}(0,\infty)$ в $H^{2p}(-\infty,\infty)$, а функции $\widetilde{\rho}_k(t)$ получаются из функций $\rho_k(x)=\dfrac{b_{2p,0}}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\delta(x)}{\beta(x)}}\displaystyle\int_{\gamma_0}\frac{\lambda^{k-1}\exp\left(i\lambda\int_x^d 1/\beta(s)\,ds\right)d\lambda}{\sum_{0\le j\le 2p}b_{j,0}\lambda^j+a_{0,0}}$ после замены $x=x_\delta(t)$, где $x=x_\delta(t)$ – функция обратная функции $t=\displaystyle\int_x^d\frac{ds}{\delta(s)}$, γ_0 – контур на комплексной плоскости, охватывающий корни многочлена $\sum_{0\le j\le 2p}b_{j0}\lambda^j+a_{00}$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для $0 \le j \le m-1$, $p+1 \le k \le m$ положим $\varphi_{jk} = \int_{\gamma_1} \frac{\lambda^{j+k-1}\, d\lambda}{a_{2m,0}(\lambda-\lambda_1^+)\cdots(\lambda-\lambda_{m-p}^+)}$, где $\lambda_1^+,\dots,\lambda_{m-p}^+$ – корни многочлена $a_{2m,0}\lambda^{2(m-p)} + b_{2p,0}$, лежащие в верхней полуплоскости, а γ_1 – контур на комплексной плоскости, охватывающий эти корни.

Условие 4. Определитель $\det\limits_{\substack{0\le j\le m-1\\ 1\le k\le m}} (\varphi_{jk})$ отличен от нуля.

Введём в рассмотрение функциональные пространства, в которых будет доказываться априорная оценка, а затем и разрешимость граничной задачи (1), (2).

Обозначим через $H^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$ пространство функций $U(x,y) \in L_2(D)$, для которых конечен квадрат нормы

$$\|U(x,y)\|^2_{2m,\alpha,2p,\beta} = \sum_{i=0}^{2m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-i} \left|D^i_\alpha u(x,\xi)\right|^2 dx d\xi + \sum_{j=0}^{2p} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j} \left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2 dx d\xi,$$

где $u(x,\xi) = F_{y\to\xi}[U(x,y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(x,y)\exp(-i\xi y)dy$ – преобразование Фурье функции $U(x,y) \in L_2(D)$ по переменной $y \in R_n$.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу

$$L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi) + L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi) = f(x,\xi), \tag{3}$$

$$u(d,\xi) = \partial_x u(d,\xi) = \cdots = \partial_x^{m-1} u(d,\xi) = 0, \tag{4}$$

полученную из задачи (1), (2) после применения преобразования Фурье $F_{y\to\xi}[\cdot]$ по переменной $y \in R_n$.

Через $FH^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$ мы будем обозначать пространство образов Фурье по переменной $y \in R_n$ функций из пространства $H^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$.

Априорная оценка

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2 и $F(x,y) \in L_2(D)$. Тогда для функций $u(x,\xi) \in FH^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$ и $U(x,y) \in H^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$, являющихся соответственно решениями задач (3), (4) и (1), (2), выполнены априорные оценки

$$\sum_{j=0}^{2m} \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left\|D^j_\alpha u(x,\xi)\right\|_0^2 + \sum_{j=0}^{2p} \left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j} \left\|D^j_\beta u(x,\xi)\right\|_0^2 \le c\|f(x,\xi)\|_0^2, \tag{5}$$

$$\|U(x,y)\|^2_{2m,\alpha,2p,\beta} \le c\iint\limits_D |F(x,y)|^2\, dxdy \tag{6}$$

с постоянной $c > 0$ не зависящей от $u(x,\xi)$, $f(x,\xi)$, $U(x,y)$, $F(x,y)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [8].

Представление оператора в виде суперпозиции

Определение. Будем говорить, что оператор $L_{2m}(D_\alpha,\xi) + L_{2p}(D_\beta,\xi)$ при $|\xi| \le \lambda_0$ принадлежит классу эквивалентности $M_{2p}(D_\beta,\xi) \circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$, порождённому композицией операторов $M_{2p}(D_\beta,\xi)$ и $M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$, если для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $d = d(\lambda_0)$, что при $0 < x < d(\lambda_0)$ имеет место представление

$$M_{2p}(D_\beta,\xi) \circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)u(t,\xi) - L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(t,\xi) - L_{2p}(D_\beta,\xi)u(t,\xi) = T(D_\alpha,D_\beta,x,\xi)u(t,\xi),$$

где для любых $u(x,\xi) \in FH^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$ и $|\xi| \le \lambda_0$ справедлива оценка

$$\|T(D_\alpha,D_\beta,x,\xi)u(x,\xi)\|_0^2 \le \varepsilon_0 \int_0^d \left(\sum_{j=0}^{2m} \left|D^j_\alpha u(x,\xi)\right|^2 + \sum_{j=0}^{2p} \left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2 \right) dx.$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1 – 3. Тогда существуют такие операторы $M_{2p}(D_\beta,\xi)$, $M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$ и число $\lambda_0>0$, что сумма $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)$ при $|\xi|\le\lambda_0$ принадлежит классу эквивалентности $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$, порождённому композицией этих операторов.

Доказательство. Операторы $M_{2p}(D_\beta,\xi)$ и $M_{2(m-p)}(D_\delta,\xi)$ будем разыскивать в виде

$$M_{2p}(D_\beta,\xi)=\sum_{k=0}^{2p}c_k(\xi)D_\beta^k,\qquad M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)=\sum_{k=0}^{2(m-p)}d_k(x,\xi)D_\delta^k,$$

где неизвестные коэффициенты $c_k(\xi)$, $0\le k\le 2p$ и $d_k(x,\xi)$, $0\le k\le 2(m-p)$ подлежат определению.

Рассмотрим композицию операторов

$$M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)=\sum_{k=0}^{2p}\sum_{j=0}^{2(m-p)}c_k(\xi)D_\beta^k\left(d_k(x,\xi)D_\delta^j\right)$$

и найдём неизвестные коэффициенты $c_k(\xi)$ и $d_k(x,\xi)$ из условия принадлежности оператора $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)$ классу эквивалентности $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$a_j^0(\xi)=\sum_{|\mu|\le 2m-j}a_{jm}\xi^\mu,\quad 0\le j\le 2m,\qquad b_j^0(\xi)=\sum_{|\mu|\le 2p-j}b_{jm}\xi^\mu,\quad 0\le j\le 2p,$$

$$D_\beta^kD_\delta^ju(x,\xi)=\sum_{\substack{0\le m\le k\\0\le n\le j}}\theta_{m,n}^{k,j}(x)\beta^m(x)\delta^n(x)\partial_x^{m+n}u(x,\xi),\ \text{где}\ \theta_{k,j}^{k,j}(x)\equiv 1,\ \theta_{m,n}^{k,j}(0)\equiv 0\ \text{при}\ m+n<k+j,$$

и очевидное равенство $\beta^k(x)\delta^j(x)=\alpha^{k+j}(x)\omega^{pj/(m-p)-k}(x)$ (обозначения см. в условиях 2 и 3).

Слагаемое с производной порядка $2m$ у оператора $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)u(x,\xi)$ имеет вид

$$c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\beta^{2p}(x)\delta^{2(m-p)}(x)\partial_x^{2m}u(x,\xi)=c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\alpha^{2m}(x)\partial_x^{2m}u(x,\xi)=$$
$$=c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\left(D_\alpha^{2m}u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2m-1}\widetilde{a}_{2m}^j(x)D_\alpha^ju(x,\xi)\right),\tag{7}$$

а у оператора $L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi)$ – $a_{2m}^0(\xi)D_\alpha^{2m}u(x,\xi)$, при этом $\widetilde{a}_{2m}^j(0)=0,\ 0\le j\le 2m-1$.

Как следует из (7), для того, Для того, чтобы оператор $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)$ принадлежал классу эквивалентности $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$, потребуем выполнения равенства

$$c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)=a_{2m}^0(\xi).$$

Далее, слагаемое с производной порядка $2m-1$ у оператора $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)u(x,\xi)$ имеет вид

$$\left(c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)-1}(x,\xi)+c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\theta_{2p,2(m-p)-1}^{2p,2(m-p)}(x)\right)\beta^{2p}(x)\delta^{2(m-p)-1}(x)\partial_x^{2m-1}u(x,\xi)+$$
$$\left(c_{2p-1}(\xi)d_{2(m-p)-1}(x,\xi)+c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\theta_{2p-1,2(m-p)}^{2p,2(m-p)}(x)\right)\beta^{2p-1}(x)\delta^{2(m-p)}(x)\partial_x^{2m-1}u(x,\xi)=$$
$$=\left(\left(c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)-1}(x,\xi)+c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\right)\omega^{p/(p-m)}(x)+\left(c_{2p-1}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)+c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\theta_{2p-1,2(m-p)}^{2p,2(m-p)}(x)\right)\omega(x)\right)\times$$
$$\times\left(D_\alpha^{2m-1}u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2m-2}\widetilde{a}_{2m-1}^j(x)D_\alpha^ju(x,\xi)\right),$$

а у оператора $L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi)$ – $a_{2m-1}^0(\xi)D_\alpha^{2m-1}u(x,\xi)$, при этом $\widetilde{a}_{2m-1}^j(0)=0,\ 0\le j\le 2m-2$.

Для того, чтобы оператор $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)$ принадлежал классу эквивалентности $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$, потребуем выполнения равенства

$$c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\theta_{2p,2(m-p)-1}^{2p,2(m-p)}(x)+c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)-1}(x,\xi)=a_{2m-1}^0(\xi)\omega^{p/(p-m)}(x).$$

Поступая аналогично с остальными производными, получим систему $2m+1$ уравнений с $2m+2$ неизвестными

$$
\left\{
\begin{array}{l}
c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)=a_{2m}^{0}(\xi),\\
c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)}(x,\xi)\theta_{2p,2(m-p)-1}^{2p,2(m-p)}(x)+c_{2p}(\xi)d_{2(m-p)-1}(x,\xi)=a_{2m-1}^{0}(\xi)\omega^{p/(m-p)}(x),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_{2p}\sum\limits_{j=2(m-p)-r_1}^{2(m-p)}d_j(x,\xi)\theta_{2p,2(m-p)-r_1}^{2p,j}(x)=a_{2m-r_1}^{0}(\xi)\omega^{r_1p/(m-p)}(x),\\
c_{2p-1}(\xi)d_{2(m-p)-r_1}(x,\xi)\omega^{(r_1+1)p/(m-p)}+c_{2p}\sum\limits_{j=2(m-p)-r_1-1}^{2(m-p)}d_j(x,\xi)\theta_{2p,2(m-p)-r_1-1}^{2p,j}=a_{2m-r_1}^{0}(\xi)\omega^{r_1p/(m-p)},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_{2p-1}\omega^{m/(m-p)}\sum\limits_{j=2(m-p)-r_2}^{2(m-p)-r_1}d_j(x,\xi)\theta_{2p-1,2(m-p)-r_2}^{2p-1,j}+c_{2p}\sum\limits_{j=2(m-p)-r_1-1}^{2(m-p)}d_j(x,\xi)\theta_{2p,2(m-p)-r_2-1}^{2p,j}=a_{2m-r_2-1}^{0}(\xi)\omega^{(r_2+1)p/(m-p)},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_1\omega^{(2p+r_{2p-1})p/(m-p)}(x)\sum\limits_{j=2p}^{2(m-p)-r_{2p-1}}d_j(x,\xi)\theta_{1,2p}^{1,j}(x)+\cdots+c_{2p-2}\omega^{2m/(m-p)}(x)\sum\limits_{j=3}^{2(m-p)-r_2}d_j(x,\xi)\theta_{2p-2,3}^{2p-2,j}(x)+\\
+c_{2p-1}\omega^{m/(m-p)}(x)\sum\limits_{j=2}^{2(m-p)-r_1}d_j(x,\xi)\theta_{2p-1,2}^{2p-2,j}(x)+c_{2p}\sum\limits_{j=1}^{2(m-p)}d_j(x,\xi)\theta_{2p,1}^{2p,j}(x)=a_{2p+1}^{0}(\xi)\omega^{(2m-2p-1)p/(m-p)}(x),\\
c_{2p}(\xi)d_0(x,\xi)=b_{2p}^{0}(\xi),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_1(\xi)d_0(x,\xi)=b_1^{0}(\xi),\\
c_1(\xi)d_0(x,\xi)=b_0^{0}(\xi)+a_0^{0}(\xi),
\end{array}
\right.
\tag{8}
$$

где $r_1=\left[\dfrac{m}{p}-1\right]$, $r_2=2r_1$, $r_{2p-1}=(2p-1)r_1$.

Поскольку число уравнений на одно меньше числа неизвестных, то, положив $c_{2p}=1$, определим $d_0=b_{2p}^0(\xi)=b_{2p,0}$, причём $b_{2p,0}\neq 0$ в силу условия 1, $c_{2p-1}(\xi)=\dfrac{b_{2p-1}^0(\xi)}{b_{2p,0}},\dots,$ $c_1(\xi)=\dfrac{b_1^0(\xi)}{b_{2p,0}}$, $c_0(\xi)=\dfrac{a_0^0(\xi)+b_0^0(\xi)}{b_{2p,0}}$.

Теперь нам осталось определить $d_j(x,\xi), 1\le j\le 2(m-p)$ из $2(m-p)$ уравнений, полученных из системы (8) путём отбрасывания последних $2p+1$ уравнений.

Так как матрица системы уравнений для нахождения $d_j(x,\xi), 1\le j\le 2(m-p)$ треугольная с определителем равным числу -1, то существуют функции $d_1(x,\xi),\dots,d_{2(m-p)}(x,\xi)$, принадлежащие $C^{2p}[0,d]$ и представляющие решение этой системы. Функции $d_j(x,\xi), 1\le j\le 2(m-p)$ легко определяются из рекуррентных соотношений, причём $d_j(0,\xi)=0, 1\le j\le 2(m-p)-1$ и $d_{2(m-p)}(0,\xi)=a_{2m}^0(\xi)=a_{2m,0}$.

Проведённые рассуждения доказывают, что оператор $M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,x,\xi)$ принадлежит классу эквивалентности $\{L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)\}$. А поскольку два класса эквивалентности, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают, то тем самым справедливость леммы установлена.

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда при достаточно малом $\lambda_0>0$ многочлены по η $M_{2p}(\eta,\xi)$ и $M_{2(m-p)}(\eta,x,\xi)$ отличны от нуля при любых $\eta\in R_1$, $\xi\in R_n:|\xi|\le\lambda_0$, $x\in[0,d]$, $d<\lambda_0$.

Доказательство. Из леммы 1 следуют представления для рассматриваемых многочленов

$$M_{2p}(\eta,\xi)=\sum_{k=0}^{2p}c_k(\xi)\eta^k=\frac{1}{b_{2p,0}}\left(\sum_{k=0}^{2p-1}b_k^0(\xi)\eta^k+b_{2p,0}\eta^{2p}+a_0^0(\xi)\right)=\frac{1}{b_{2p,0}}\left(L_{2p}(\eta,\xi)+a_0^0(\xi)\right),$$

$$M_{2(m-p)}(\eta,0,\xi)=\sum_{k=0}^{2(m-p)}d_k(0,\xi)\eta^k=b_{2p,0}+a_{2m,0}\eta^{2(m-p)},$$

из которых, учитывая условие 1, и вытекает требуемое утверждение.

Разрешимость задачи Дирихле

Как будет показано ниже, для разрешимости задачи (3), (4) достаточно установить разрешимость при $|\xi|\le\lambda_0$ следующей граничной задачи с постоянными коэффициентами

$$M_{2p}(D_\beta,\xi)\circ M_{2(m-p)}(D_\delta,0,\xi)u(x,\xi)=f(x,\xi),\qquad f(x,\xi)\in L_2(0,d), \tag{9}$$

$$u(d,\xi)=\partial_x u(d,\xi)=\dots=\partial_x^{m-1}u(d,\xi)=0. \tag{10}$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение $M_{2(m-p)}(D_\delta,0,\xi)u(x,\xi)=v(x,\xi)$, и тогда уравнение (9) можно записать в виде системы

$$M_{2p}(D_\beta,\xi)v(x,\xi)=f(x,\xi), \tag{11}$$

$$M_{2(m-p)}(D_\delta,0,\xi)u(x,\xi)\equiv b_{2p,0}u(x,\xi)+a_{2m,0}D_\delta^{2(m-p)}u(x,\xi)=v(x,\xi). \tag{12}$$

Уравнение (11) после замены неизвестной функции $v(x,\xi)=\dfrac{w(x,\xi)}{\sqrt{\beta(x)}}$ и введения новой переменной $z=\int\limits_x^d\dfrac{ds}{\beta(s)}$ сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $2p$ с постоянными коэффициентами

$$M_{2p}(D_z,\xi)\hat{w}(z,\xi)=\hat{g}(z,\xi),\qquad z\in[0,\infty), \tag{13}$$

где $M_{2p}(D_z,\xi)=\sum\limits_{k=0}^{2p}c_k(\xi)D_z^k$, $\hat{w}(z,\xi)=w(x_\beta(z),\xi)$, $x_\beta(z)$ – функция обратная функции $z=\int\limits_x^d\dfrac{ds}{\beta(s)}$, $g(x,\xi)=\sqrt{\beta(x)}\,f(x,\xi)$, причём $\hat{g}(z,\xi)\in L_2(0,\infty)$, т.к.

$$\int\limits_0^\infty|\hat{g}(z,\xi)|^2\,dz=\int\limits_0^d|g(x,\xi)|^2\frac{dx}{\beta(x)}=\int\limits_0^d|f(x,\xi)|^2\,dx<\infty.$$

Как известно (см. [9]), общее решение уравнения (13) в $L_2(0,\infty)$ имеет вид

$$\hat{w}(z,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}\frac{C(\lambda)\exp(i\lambda z)}{M_{2p}^-(\lambda,\xi)}+\hat{R}_0[\hat{g}](z,\xi),\quad \hat{w}(z,\xi)\in H^{2p}(0,\infty),$$

где $C(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{p}\nu_k\lambda^{k-1}$ – некоторый многочлен степени $p-1$, $M_{2p}(\lambda,\xi)=M_{2p}^+(\lambda,\xi)M_{2p}^-(\lambda,\xi)$ – факторизация по λ эллиптического в силу следствия 1 многочлена $M_{2p}(\lambda,\xi)$, γ_0 – контур на комплексной плоскости, охватывающий корни многочлена $M_{2p}^+(\lambda,\xi)$, S – оператор сужения на $(0,\infty)$,

$$\hat{R}_0[\hat{g}](z,\xi)=\frac{1}{2\pi}S\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau z)}{M_{2p}(\tau,\xi)}\int\limits_0^\infty\hat{g}(y,\xi)\exp(-i\tau y)\,dy\,d\tau.$$

Заметим, что при построении оператора $\hat{R}_0$ мы продолжили функцию $\hat{g}(z,\xi)$ нулём на все отрицательные значения z.

Поэтому для решения уравнения (11) справедливо представление

$$v(x,\xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\beta(x)}}\int\limits_{\gamma_0}\frac{C(\lambda)}{M_{2p}^{+}(\lambda,\xi)}\exp\left(i\lambda\int\limits_x^d\frac{ds}{\beta(s)}\right)d\lambda+\frac{1}{\sqrt{\beta(x)}}R_0[g](x,\xi),\qquad(14)$$

где $R_0[g](x,\xi)=\hat{R}_0[\hat{g}](z,\xi),\ z=\int\limits_x^d\frac{ds}{\beta(s)}$.

Отметим также, что

$$\sum_{k=0}^{2p}\int\limits_0^d\left|D_\beta^k v(x,\xi)\right|^2dx=\sum_{k=0}^{2p}\int\limits_0^d\left|(\beta(x)\partial_x)^k w(x,\xi)\right|^2\frac{dx}{\beta(x)}=\sum_{k=0}^{2p}\int\limits_0^\infty\left|D_z^k\hat{w}(z,\xi)\right|^2dz=\left\|\hat{w}(z,\xi)\right\|^2_{H^{2p}(0,\infty)}<\infty.$$

Аналогично для решения уравнения (12) справедливо представление

$$u(x,\xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\delta(x)}}\int\limits_{\gamma_1}\frac{Y(\lambda)}{M_{2(m-p)}^{+}(\lambda)}\exp\left(i\lambda\int\limits_x^d\frac{ds}{\delta(s)}\right)d\lambda+\frac{1}{\sqrt{\delta(x)}}R_1[h](x,\xi),\qquad(15)$$

где $Y(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{m-p}\nu_{k+p}\lambda^{k-1}$ – некоторый многочлен степени $m-p-1$, $M_{2(m-p)}(\lambda)=b_{2p,0}+a_{2m,0}\lambda^{2(m-p)}$, $M_{2(m-p)}(\lambda)=M_{2(m-p)}^{+}(\lambda)M_{2(m-p)}^{-}(\lambda)$, γ_1 – контур на комплексной плоскости, охватывающий корни многочлена $M_{2(m-p)}^{+}(\lambda)$, Π – оператор продолжения функции из $H^{2p}(0,\infty)$ в $H^{2p}(-\infty,\infty)$ (см. [10]),

$$R_1[h](x,\xi)=\widetilde{R}_1\left[\widetilde{h}\right](t,\xi),\ t=\int\limits_x^d\frac{ds}{\delta(s)},\qquad \widetilde{R}_1\left[\widetilde{h}\right](t,\xi)=\frac{1}{2\pi}S\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{M_{2(m-p)}(\tau)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Pi\widetilde{h}(s,\xi)\exp(-i\tau s)dsd\tau,$$

$\widetilde{h}(t,\xi)=h(x,\xi)\big|_{x=x_\delta(t)}=\sqrt{\delta(x)}v(x,\xi)\big|_{x=x_\delta(t)}$, $x_\delta(t)$ – функция обратная функции $t=\int\limits_x^d\frac{ds}{\delta(s)}$.

Чтобы определяемое формулой (15) решение уравнения (9) удовлетворяло начальным условиям (10), следует выбрать постоянные $\nu_k,\ k=1,2,\dots,m$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\int\limits_{\gamma_1}\frac{Y(\lambda)}{M_{2(m-p)}^{+}(\lambda)}d\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Pi\widetilde{h}(t,\xi)\exp(-it\tau)}{M_{2(m-p)}(\tau,\xi)}dtd\tau=0,\qquad(16)$$

$$\int\limits_{\gamma_1}\frac{\lambda^jY(\lambda)}{M_{2(m-p)}^{+}(\lambda)}d\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^j\,\Pi\widetilde{h}(t,\xi)\exp(-it\tau)}{M_{2(m-p)}(\tau,\xi)}dtd\tau=0,\quad j=1,2,\dots,m-1.\qquad(17)$$

Заметим, что интегралы в левой части (17) сходятся, поскольку $\Pi\widetilde{h}(t,\xi)\in H^{2p}(-\infty,\infty)$ и $m-1-2p<2(m-p)$.

Рассмотрим введённую ранее функцию $\widetilde{h}(t,\xi)=h(x,\xi)\big|_{x=x_\delta(t)}=\sqrt{\delta(x)}v(x,\xi)\big|_{x=x_\delta(t)}$. В силу (14) для неё справедливо представление

$$\widetilde{h}(t,\xi)=\left(\frac{\sqrt{\delta(x)}}{2\pi\sqrt{\beta(x)}}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\gamma_0}\frac{\nu_k\lambda^{k-1}}{M_{2p}^{+}(\lambda,\xi)}\exp\left(i\lambda\int\limits_x^d\frac{ds}{\beta(s)}\right)d\lambda+R_0[g](x,\xi)\right)\Bigg|_{x=x_\delta(t)}=\left(\sum_{k=1}^{p}\nu_k\rho_k(x,\xi)+\frac{\sqrt{\delta(x)}}{2\pi\sqrt{\beta(x)}}R_0[g](x,\xi)\right)\Bigg|_{x=x_\delta(t)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\nu_k\widetilde{\rho}_k(t,\xi)+\frac{\sqrt{\widetilde{\delta}(t)}}{2\pi\sqrt{\widetilde{\beta}(t)}}\widetilde{R_0[g]}(t,\xi),\qquad(18)$$

где $\rho_k(x,\xi)=\frac{\sqrt{\delta(x)}}{2\pi\sqrt{\beta(x)}}\int\limits_{\gamma_0}\frac{\lambda^{k-1}}{M_{2p}^{+}(\lambda,\xi)}\exp\left(i\lambda\int\limits_x^d\frac{ds}{\beta(s)}\right)d\lambda$.

Учитывая (18), из (17) получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\nu_k\varphi_{jk}(\xi)=A_j(\xi),\quad j=0,1,\dots,m-1,\qquad(19)$$

где для $1\le k\le p$ $\varphi_{jk}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^j\Pi\widetilde{h}(t,\xi)\exp(-it\tau)}{M_{2(m-p)}(\tau,\xi)}dtd\tau$, а для $p+1\le k\le m$ $\varphi_{jk}(\xi)=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\lambda^{j+k-1}d\lambda}{M^+_{2(m-p)}(\lambda)}$,

$$A_j(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\widetilde{\delta}(t)}\tau^j\Pi\widetilde{R_0[g]}(t,\xi)\exp(-it\tau)}{2\pi\sqrt{\widetilde{\beta}(t)}M_{2(m-p)}(\tau)}dtd\tau .$$

Неизвестные $\nu_k,\ k=1,2,...,m$ будут однозначно определены, если для $|\xi|\le\lambda_0$ определитель $\det\limits_{\substack{0\le j\le m-1\\1\le k\le m}}(\varphi_{jk}(\xi))\ne 0$. Заметим, что при достаточно малых $\lambda_0>0$ и $|\xi|\le\lambda_0$ это требование выполнено в силу условия 4, означающего что $\det\limits_{\substack{0\le j\le m-1\\1\le k\le m}}(\varphi_{jk}(0))\ne 0$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1 – 4. Тогда при любых $f(x,\xi)\in L_2(0,d),\ |\xi|\le\lambda_0,\ d<\lambda_0$ и достаточно малом $\lambda_0>0$ существует единственное решение $u(x,\xi)$ задачи (9), (10), причём справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{2m}\left\|D^j_\alpha u(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{2p}\left\|D^j_\beta u(x,\xi)\right\|_0\le c\left\|f(x,\xi)\right\|_0, \tag{20}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от $u(x,\xi)$ и $f(x,\xi)$.

Доказательство. Как вытекает из следствия 1, корни многочленов $M_{2p}(\lambda,\xi)$ и $M_{2(m-p)}(\lambda)$ комплексны. Проведём факторизацию этих многочленов $M_{2p}(\lambda,\xi)=M^+_{2p}(\lambda,\xi)M^-_{2p}(\lambda,\xi)$ и $M_{2(m-p)}(\lambda)=M^+_{2(m-p)}(\lambda)M^-_{2(m-p)}(\lambda)$.

Формула (15) даёт решение рассматриваемой задачи (9), (10), причём постоянные $\nu_k,\ k=1,2,...,m$ находятся из уравнений (16), (17) и нам только остаётся установить справедливость оценки (20).

Для оценки слагаемых, стоящих в левой части неравенства (20), используем равенство (7) и мультипликативное неравенство

$$\left\|D^m_\alpha v(x)\right\|_0\le\varepsilon^{s-m}\left\|D^s_\alpha v(x)\right\|_0+c\left(\varepsilon^{-m}+\varepsilon^{s-m}\right)\left\|v(x)\right\|_0,\quad 0<m<s,\quad \varepsilon>0 . \tag{21}$$

Будем иметь

$$\sum_{j=0}^{2m}\left\|D^j_\alpha u(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{2p}\left\|D^j_\beta u(x,\xi)\right\|_0\le c_1\left(\left\|D^{2m}_\alpha u(x,\xi)\right\|_0+\left\|D^{2p}_\beta u(x,\xi)\right\|_0+\left\|u(x,\xi)\right\|_0\right)\le$$

$$\le c_1\left(\left\|D^{2p}_\beta D^{2(m-p)}_\delta u(x,\xi)\right\|_0+c_2\sum_{j=0}^{2m-1}\left\|D^j_\alpha u(x,\xi)\right\|_0+\left\|D^{2p}_\beta u(x,\xi)\right\|_0+\left\|u(x,\xi)\right\|_0\right)\le$$

$$\le c_1\left(\left\|D^{2p}_\beta D^{2(m-p)}_\delta u(x,\xi)\right\|_0+\left\|D^{2p}_\beta u(x,\xi)\right\|_0\right)+\varepsilon\left\|D^{2m}_\alpha u(x,\xi)\right\|_0+c(\varepsilon)\left\|u(x,\xi)\right\|_0,$$

и, выбирая $\varepsilon<1$, получим

$$\sum_{j=0}^{2m}\left\|D^j_\alpha u(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{2p}\left\|D^j_\beta u(x,\xi)\right\|_0\le c_2\left(\left\|D^{2p}_\beta D^{2(m-p)}_\delta u(x,\xi)\right\|_0+\left\|D^{2p}_\beta u(x,\xi)\right\|_0+\left\|u(x,\xi)\right\|_0\right). \tag{22}$$

Таким образом, в задаче (10) – (12) осталось оценить производные $D^{2p}_\beta u(x,\xi)$ и $D^{2p}_\beta D^{2(m-p)}_\delta u(x,\xi)$. Применив к (12) оператор D^{2p}_β, получим

$$a_{2m,0}D^{2p}_\beta D^{2(m-p)}_\delta u(x,\xi)+b_{2p,0}D^{2p}_\beta u(x,\xi)=D^{2p}_\beta v(x,\xi), \tag{23}$$

$$u(d,\xi)=\partial_x u(d,\xi)=\cdots=\partial^{m-1}_x u(d,\xi)=0. \tag{24}$$

На основании леммы 3 [8], прокоммутируем операторы D^{2p}_β и $D^{2(m-p)}_\delta$, после чего рассмотрим задачу с зафиксированными в нуле коэффициентами

$$a_{2m,0}D^{2(m-p)}_\delta D^{2p}_\beta u(x,\xi)+b_{2p,0}D^{2p}_\beta u(x,\xi)=D^{2p}_\beta v(x,\xi), \tag{25}$$

$$u(d,\xi)=\partial_x u(d,\xi)=\cdots=\partial^{m-1}_x u(d,\xi)=0. \tag{26}$$

Также, как и при доказательстве леммы 1, причём со значительными упрощениями, устанавливается неравенство

$$\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0 \le c_3\left\|D_\beta^{2p}v(x,\xi)\right\|_0, \tag{27}$$

где $u(x,\xi)$ – решение задачи (25), (26), а $c_3>0$ не зависит от $u(x,\xi)$ и $v(x,\xi)$.

Следовательно, для решения задачи (23), (24), которая в силу условия $d<\lambda_0$ является задачей с мало изменяющимися коэффициентами по отношению к задаче (25), (26), также справедлива оценка (27). Кроме того, из уравнения (23) оценим $D_\beta^{2p}D_\delta^{2(m-p)}u(x,\xi)$. С помощью неравенства (27) получим оценку

$$\left\|D_\beta^{2p}D_\delta^{2(m-p)}u(x,\xi)\right\|_0 \le c_4\left\|D_\beta^{2p}v(x,\xi)\right\|_0. \tag{28}$$

Учитывая, что функция $v(x,\xi)\in L_2(0,d)$ является решением уравнения (11), для неё запишем неравенство, которое устанавливается аналогично неравенству (5), а именно:

$$\left\|D_\beta^{j}v(x,\xi)\right\|_0 \le c_5\left(\left\|f(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{p-1}\left|\partial_x^j v(x,d)\right|\right)$$

с постоянной $c_5>0$, не зависящей от $v(x,\xi)$ и $f(x,\xi)$.

Для оценки производных $\left|\partial_x^j v(x,d)\right|$ в последнем неравенстве применим теорему о следах и мультипликативное неравенство (21). Будем иметь

$$\left\|D_\beta^{2p}v(x,\xi)\right\|_0 \le c_5\left(\left\|f(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{p-1}\left|\partial_x^j v(d,\xi)\right|\right)\le c_5\left(\left\|f(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{p}\left\|D_\beta^{j}v(x,\xi)\right\|_0\right)\le$$

$$\le \varepsilon\left\|D_\beta^{2p}v(x,\xi)\right\|_0+c(\varepsilon)\left\|v(x,\xi)\right\|_0+c_5\left\|f(x,\xi)\right\|_0. \tag{29}$$

Выбирая $\varepsilon<1$, из (29) выводим неравенство

$$\left\|D_\beta^{2p}v(x,\xi)\right\|_0 \le c_6\left(\left\|v(x,\xi)\right\|_0+\left\|f(x,\xi)\right\|_0\right). \tag{30}$$

Объединяя оценки (22), (27) с заменой $D_\beta^{2p}u(x,\xi)$ на $u(x,\xi)$ и $D_\beta^{2p}v(x,\xi)$ – на $v(x,\xi)$, (28), (30), получим

$$\sum_{j=0}^{2m}\left\|D_\alpha^{j}u(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{2p}\left\|D_\beta^{j}u(x,\xi)\right\|_0 \le c_7\left(\left\|v(x,\xi)\right\|_0+\left\|f(x,\xi)\right\|_0\right)<\infty. \tag{31}$$

Таким образом, найденное решение $u(x,\xi)$ при $\xi\le\lambda_0$ принадлежит пространству с конечной нормой $\sum_{j=0}^{2m}\left\|D_\alpha^{j}u(x,\xi)\right\|_0+\sum_{j=0}^{2p}\left\|D_\beta^{j}u(x,\xi)\right\|_0$. Следовательно, в силу установленного в теореме 1 неравенства (5), для решения $u(x,\xi)$ задачи (9), (10), которая в силу леммы 5 [8] является задачей с мало изменяющимися коэффициентами по отношению к задаче (3), (4), выполнена (см. [9]) оценка (20). Теорема 2 доказана.

Сформулируем, наконец, основную теорему настоящей работы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1 – 4. Тогда найдется такое число $d_0>0$, что при любых $F(x,y)\in L_2(D)$ и $d\le d_0$ существует единственное решение $U(x,y)\in H_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$ задачи (1), (2), причём справедлива оценка

$$\left\|U(x,y)\right\|_{2m,\alpha,2p,\beta}^2 \le c\iint_D\left|F(x,y)\right|^2 dxdy$$

с постоянной $c>0$ не зависящей от $U(x,y)$ и $F(x,y)$.

Доказательство основной теоремы вытекает из следующих трёх замечаний:

1) задача (3), (4) в силу леммы 5 является задачей с мало изменяющимися коэффициентами по отношению к задаче (19), (20), следовательно (см. [9]), для неё справедливо утверждение аналогичное теореме 2;

2) из установленной в теореме 1 оценки (5) и только что сделанного замечания 1) следует однозначная разрешимость задачи (3), (4) при любых $\xi\in R_n$;

3) если $u(x,\xi)$ – единственное решение задачи (3), (4), то $U(x,y)=F^{-1}_{\xi\to y}[u(x,\xi)]$ – единственное решение задачи (1), (2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197.

Список литературы
References

1. Олейник О.А., Радкевич Е.В. 2010. Уравнения с неотрицательной характеристической формой, МГУ, Москва.

Oleinic O.A., Radkevich E.V. 2010. Equations wits nonnegative characteristic form, Moscow State University, Moscow.

2. Архипов В.П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения, 47(10): 1383–1393.

Arkhipov V.P. 2011. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative. Differential Equations, 47(10): 1383–1393.

3. Архипов В.П., Глушак А.В. 2013. Асимптотические представлениярешений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №5 (148), выпуск 30.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2013. Asymptotic Representations of Solutions the Second-Order Differential Equation near the Degenerating Point. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics, №5(148), Iss.30.

4. Архипов В.П. 2016. Асимптотические представления решений вырождающихся эллиптических уравнений. Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика, №1: 50–65.

Arhipov V.P. 2016. Asymptotic representations of solutions of degenerate elliptic equations. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, №1: 50–65.

5. Архипов В.П., Глушак А.В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20 (241), выпуск 44: 5–22.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2016. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (241), issue 44: 5–22.

6. Архипов В.П., Глушак А.В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления спектра. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №27 (248), выпуск 45: 45–59.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2016. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Spectrum. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №27 (248), issue 45: 45–59.

7. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. 1985. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи. Итоги науки и техники. Сер. Мат. анал, 23: 125–218.

Glushko V.P., Savchenko Yu. B. 1985. Higher-order degenerate elliptic equations: Spaces, operators, boundary-value problems. Mathematical analysis. Itogi Nauki i Tekhniki. Moscow, 23: 125–218.

8. Глушак А.В. 2017. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20 (269), Выпуск 48: 50–57.

Glushak A.V. 2017. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (269), issue 48: 50–57.

9. Агранович М.С., Вишик М.И. 1964. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. УМН, XIX, вып. 3: 53–161.

Agranovich M.S., Vishik M.I. 1964. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form. UMN. XIX, issue 3: 53-161.

10. Фихтенгольц Г.М. 1969. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука.

Fikhtengolts G.M. 1969. Course of differential and integral calculus. T. 1. Moscow: Nauka.