

Etude du comportement quasi-statique de la mousse polyuréthane :

Comparaison entre les modèles de mémoire fractionnaire et entier.

H. JMAL^a, R. DUPUIS^a, E. AUBRY^a

a. Laboratoire Modélisation Intelligence Processus Systèmes (MIPS), 12 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse (France).

Résumé :

Lors d'un essai de compression à grande déformation, la mousse polyuréthane présente à la fois un comportement viscoélastique et un comportement élastique non linéaire. Dans ce travail, les paramètres de deux modèles à mémoire, l'un fractionnaire, l'autre entier ont été déterminés grâce à des méthodes originales de minimisation et d'identification. Il a été vérifié que les paramètres trouvés respectent les conditions thermodynamiques. Les résultats obtenus montrent une bonne concordance entre le comportement expérimental de la mousse polyuréthane et celui prédit par les deux modèles de mémoire. Enfin, une comparaison entre ces deux derniers modèles a été menée.

Abstract :

Polyurethane foam undergoing large compressive deformation exhibits highly nonlinear elasticity and a viscoelastic behaviour. In this work, the parameters of two memory models (fractional memory model and integer memory model) were determined through original minimization and identification methods. It has been verified that the found parameters meet the thermodynamic conditions. The results show good agreement between experimental behaviour of polyurethane foam and those predicted by two memory models. Finally, a comparison between these models was conducted.

Mots clefs: Mousse polyuréthane, comportement quasi-statique, viscoélasticité linéaire, conditions thermodynamiques d'un modèle, modèle de mémoire fractionnaire, modèle de mémoire entier, méthodes de minimisation et d'identification.

1 Introduction

La mousse de polyuréthane souple est un matériau cellulaire caractérisé par un spectre de propriétés mécaniques intéressant [1]. Elle offre le confort aux assises de sièges pour de nombreuses applications (automobiles et autres) grâce à son pouvoir d'absorption de l'énergie de déformation. Pour optimiser le confort des assises de voitures, il est important de modéliser le comportement mécanique du système assises-occupant en statique, en quasi-statique et en dynamique. Les différentes recherches [2] se sont souvent intéressées à l'influence du mouvement vertical sur le corps de l'occupant ainsi les sollicitations verticales sont généralement considérées lors de la modélisation d'une partie du système assises-occupant telle que la mousse polyuréthane.

Dans le cadre d'études quasi-statique [3-9], le cycle d'hystérésis observé sur la réponse force-déplacement de la mousse polyuréthane lors d'un essai de compression à grande déformation illustre le comportement viscoélastique et le comportement élastique non linéaire du matériau. Pour prédire ce comportement mécanique, on distingue deux modes d'analyse à savoir l'analyse microscopique et l'analyse macroscopique. Dans le cadre de l'analyse macroscopique, il y a deux types de modèles : les modèles énergétiques [2] et les modèles de mémoire (entier [4-6] et fractionnaire [7,8]). Les modèles de mémoire illustrent l'effet historique sur le comportement de la mousse. Ils décrivent la non-linéarité élastique par une fonction polynomiale et la viscoélasticité par une fonction de convolution.

2 Expérimentation

Le présent document est consacré à la modélisation du comportement quasi-statique d'une mousse polyuréthane à cellule ouverte désignée par mousse Type A (Tableau 1). Des tests de compression

unidirectionnelle à différentes vitesses de déformations assurés par la machine de traction-compression «Instron 33R4240 », aident à identifier les paramètres mécaniques des modèles à mémoire considérés. Le test de compression consiste à comprimer dans une première phase (phase de charge) un spécimen de mousse polyuréthane entre le bloc supérieur de la machine comportant une cellule de force et la base jusqu'à un niveau de compression final. Dans la deuxième phase (phase de décharge) l'échantillon est déchargé progressivement jusqu'à son niveau de compression initiale. Des capteurs de force et de déplacement sont déjà intégrés dans la machine. Le nombre de cycles, les conditions de tests (niveau de compression maximale, taux de déformation, etc.), la période d'échantillonnage et les propriétés mécaniques à extraire des expériences sont définis à travers la fenêtre de configuration d'essai « Blue Hill ». Les différentes conditions de tests sont regroupées dans le tableau 2.

Tableau. 1– Les caractéristiques de la mousse Type A.

Matériel	Caractéristiques
Désignation	PUR : Type A
Type de la mousse	Mousse de polyuréthane flexible
Processus de fabrication	Moulage ouvert
Densité	28 kg m ⁻³
Porosité	800 µm
Forme et dimensions de spécimen ($L_0 \times l_0 \times h_0$)	Cubique 0.75 m \times 0.75 m \times 0.75 m
Type de Cellules	Ouvertes

Afin d'assurer une bonne précision statistique des résultats (un niveau de confiance de 95% avec une limite statistique d'erreur de 10%), 81 spécimens de mousse Type A ont été utilisés (Tableau 2 : $N = 45$ pour le test n°1, $N = 17$ pour le test n°2, et $N = 19$ pour le test n°3). Tous les spécimens ont le même historique mécanique et environnemental : ils sont des spécimens vierges et ils ont été obtenus par découpage d'un matelas de dimension 2 m \times 1.2 m \times 0.75 m.

Tableau. 2– Les conditions de tests de compression quasi-statique.

	N_{cyc}	$\dot{\epsilon}$ (sec ⁻¹)	ϵ_0 (%)	ϵ_{max} (%)	T (sec)	T_{ech} (sec)	N
Test n°1	1	1.06 10 ⁻²	0	80	150	0.0625	45
Test n°2	1	5.33 10 ⁻³	0	80	300	0.125	17
Test n°3	1	6.66 10 ⁻⁴	0	80	2400	2	19

Les réponses expérimentales, force-déplacement, des différents spécimens de la mousse Type A sont présentées dans la figure 1. Elles permettent l'extraction des enveloppes expérimentales minimale et maximale. La dispersion pendant la phase de charge semble plus importante que la dispersion pendant la phase de décharge. Les résultats expérimentaux montrent la présence d'un cycle hystérésis dans la réponse de la mousse et un retour à une position différente de l'état initial. Cette déformation ne peut pas être considérée irréversible car la mousse polyuréthane retrouve sa configuration initiale après deux jours de repos.

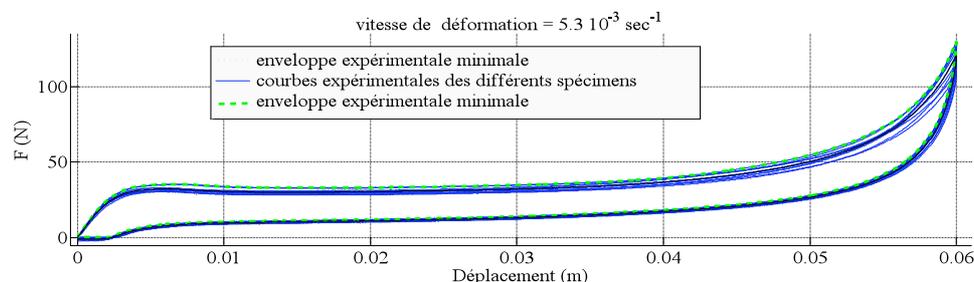


FIG. 1 – Les courbes force-déplacement expérimentales.

3 Modélisation

La mousse polyuréthane subissant une compression à grande déformation est supposée homogène, isotrope de section transversale constante, et de coefficient de Poisson nul [10]. Elle présente à la fois un comportement élastique non linéaire et un comportement viscoélastique.

3.1 Les modèles de mémoire

Les comportements élastique et viscoélastique sont généralement décrits respectivement par une fonction polynomiale (1) modélisant la réponse non linéaire d'un ressort et par une fonction de convolution décrivant l'effet de l'historique sur le comportement du matériau.

$$F_e(t) = \sum_{i=1}^M K_i (x(t))^i \tag{1}$$

Si la fonction de convolution dérive d'une équation différentielle ordinaire (2) alors le modèle est dit modèle de mémoire entier.

$$d_0 F_{ve}(t) + d_1 \frac{d^1 F_{ve}(t)}{dt} + \dots + d_r \frac{d^r F_{ve}(t)}{dt^r} = e_0 x(t) + e_1 \frac{d^1 x(t)}{dt} + \dots + e_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \tag{2}$$

Lorsque $r = n$, $r > 2$ et $e_0 = 0$, la force viscoélastique est généralement composée d'un terme purement élastique et un terme de mémoire (3).

$$F_{ve}(t) = K_{ve} x(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^P a_l e^{-\alpha_l(t-\tau)} x(\tau) d\tau \tag{3}$$

Si la fonction de convolution dérive d'une équation comportant une dérivation non entière (4), alors le modèle est à mémoire fractionnaire.

$$\frac{dF_{ve}(t)}{dt} + b F_{ve}(t) = c_1 x(t) + c_2 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}; \beta \text{ non entier} \tag{4}$$

En conclusion, les modèles de mémoire de la mousse polyuréthane décrivent la réponse force $F(t)$ lors d'un essai de compression quasi-statique à grande déformation par :

$$F(t) = F_{ve}(t) + F_e(t) \tag{5}$$

3.2 Conditions thermodynamiques

Les conditions thermodynamiques sont les conditions de causalité et de stabilité du modèle. Elles sont déterminées en vérifiant que les parties réelle et imaginaire de la transformation de Fourier de la réponse impulsionnelle du modèle, en négligeant les termes non linéaires, sont positives, quelle que soit la fréquence [8]:

Tableau. 3– Les conditions thermodynamiques du modèle de mémoire entier (cas $P = 2$).

Le vecteur des paramètres viscoélastiques à identifier : $X = [\text{Re}al(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}al(a_1), \text{Im}(a_1)]_{P=2}$			
$k_1 \geq 0$	$X(3) \leq 0$	$X(2)X(4) + X(1)X(3) \leq 0$	$X(1) \geq 0$ (stabilité du comportement viscoélastique)
$k_1 \left((X(1)^2 + X(2)^2)^2 + 4X(1)^4 \right) + (X(2)X(4) + X(1)X(3))(X(1)^2 + X(2)^2) \geq 0$			

Tableau. 4– Les conditions thermodynamiques du modèle de mémoire fractionnaire.

Le vecteur des paramètres viscoélastiques à identifier $X = [b, \beta, c_1, c_2]$				
$k_1 \geq \frac{-X(3)}{X(1)}$	$1 < X(2) \leq 2$	$X(3) \leq 0$	$X(4) \geq 0$	$X(1)X(4)\omega^{X(2)} \sin\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) - X(3)\omega \geq 0$

4 Méthode d'identification et approche d'optimisation

Pour identifier les paramètres de modèles on distingue deux méthodes : la méthode de force-moyenne [4] et la méthode de différence de force entre charge et décharge [5-8]. Cette dernière, que nous avons utilisée, est basée sur la symétrie de la force élastique entre charge et décharge. Les paramètres viscoélastiques sont identifiés à l'aide d'une démarche de minimisation d'erreur au sens des moindres carrées entre la courbe expérimentale de différence de forces, entre charge et décharge, et la même courbe obtenue à partir du modèle considéré.

Une approche de minimisation hybride (utilisation à la fois les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes) est proposée d'exploiter les avantages des méthodes déterministes tout en assurant une grande

probabilité de trouver le minimum global satisfaisant les conditions thermodynamiques. Cette approche consiste à utiliser l'algorithme génétique (commande « gatool » de MATLAB) et la méthode de région de confiance (commande « lsqnonlin »). Elle comporte trois étapes :

- la première étape permet d'attribuer une grande chance de trouver une initialisation près de l'optimum global à l'aide de l'algorithme génétique appliqué avec les critères d'arrêts grossiers et sans contraintes.
- la deuxième étape permet de finaliser la recherche de la meilleure combinaison de paramètres viscoélastiques, qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés entre les courbes différences de forces en charge et en décharge analytique et expérimentale, en utilisant la méthode de région de confiance avec des critères d'arrêt serrés.
- la solution trouvée dans la deuxième étape est injectée dans une population initiale d'algorithme génétique pour vérifier s'il s'agit effectivement du minimum global. Le critère d'arrêt dans cette troisième étape est le nombre de générations fixé à 100.

5 Validation des résultats et discussions

Les paramètres viscoélastiques trouvés par K.R Ippili [4] et R. Deng [7,8] dans le cadre d'étude quasi-statique dépendent des conditions de test (taux de déformation, niveau de compression final, période d'essai). Dans ce papier, ces paramètres sont remplacés par des paramètres adimensionnels afin de déterminer des relations entre les paramètres viscoélastiques et des conditions de test.

Tableau. 5– Les transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels.

Paramètres du modèle entier		Paramètres du modèle fractionnaire	
Dimensionnels	adimensionnels	dimensionnels	adimensionnels
$X(1) = \text{Re}(\alpha_1) (\text{sec}^{-1})$	$Y(1) = X(1)T$	$X(1) = b (\text{sec}^{-1})$	$Y(1) = X(1)T$
$X(2) = \text{Im}(\alpha_1) (\text{sec}^{-1})$	$Y(2) = X(2)T$	$X(2) = \beta$	$Y(2) = X(2)$
$X(3) = \text{Re}(a_1) (\text{Nm}^{-1}\text{sec}^{-1})$	$Y(3) = \frac{X(3)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$	$X(3) = c_1 (\text{Nm}^{-1}\text{sec}^{-1})$	$Y(3) = \frac{X(3)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$
$X(4) = \text{Re}(a_1) (\text{Nm}^{-1}\text{sec}^{-1})$	$Y(4) = \frac{X(4)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$	$X(4) = c_2 (\text{Nm}^{-1}\text{sec}^{-1})$	$Y(4) = \frac{X(4)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T^{1-\beta}$

$F_{\max} = \max(F)$ est déterminée à partir des tests

Pour valider les résultats d'identification (Tableaux 6 et 7), il est nécessaire d'examiner quatre critères : la vérification des conditions thermodynamiques, la qualité statistique, la précision d'estimation, et la reconstruction de la force globale analytique entre les enveloppes expérimentales minimale et maximale.

Les paramètres ci-dessous vérifient les conditions thermodynamiques présentées dans les tableaux 3 et 4. Ils sont des moyennes des N jeux de paramètres issus de N tests qui permettent d'assurer une qualité statistique définie par un niveau de confiance de 95% et une limite statistique d'erreur de 10% (second critère). Pour le troisième critère, l'erreur relative maximale entre les courbes ΔF expérimentale et ΔF analytique est de l'ordre de 5.7 % pour les deux modèles de mémoire fractionnaire et entier.

Les deux modèles reconstruisent la force globale de la mousse type A (figures 2-b et 3-b) dans les enveloppes expérimentales (quatrième critère) et en bonne similitude avec la courbe force globale expérimentale sauf à la fin du test où la différence est importante. Cette différence est expliquée par la présence d'une contrainte résiduelle (mais pas permanente) qui oblige la mousse de retourner à une position finale, différente de sa position initiale (effet de viscoélasticité). Ainsi, le contact entre le bloc supérieur de la machine et la mousse est perdu. Les valeurs de la force globale expérimentale sont donc inexactes à ce stade de test.

Les paramètres adimensionnels des deux modèles sont invariants en fonction de la vitesse de déformation. Il devient donc possible de caractériser le comportement viscoélastique du matériau par ces paramètres. Ce dernier résultat constitue la base d'une éventuelle comparaison entre différents types de mousse possédant un comportement viscoélastique. La comparaison entre les deux modèles montre que le modèle de mémoire fractionnaire est capable de déterminer la non linéarité du comportement élastique alors que le modèle entier ne l'est pas car la méthode utilisée intègre le terme purement élastique dans l'expression de la force élastique (figures 2-c et 3-c). Certaines similarités entre les deux modèles sont dégagées : les deux modèles ont le même temps de relaxation et les forces viscoélastiques sont négatives presque tout le temps (le signe négatif présente le phénomène de relaxation et explique la présence d'une contrainte résiduelle à la fin de test).

Tableau. 6– Résultats de l’identification des paramètres du modèle de mémoire entier.

Paramètres	Test 1	Test 2	Test 3
$Y(1)$	45.40	46.56	46.22
$Y(2)$	0.2235	0.2275	0.2235
$Y(3)$	-256.19	-257.10	-262.69
$Y(4)$	$2.202 \cdot 10^4$	$2.187 \cdot 10^4$	$2.204 \cdot 10^4$
Erreur d’estimation (%)	5.07	5.63	4.73
M	8	8	8
k_1 (N m^{-1})	$2.011 \cdot 10^4$	$1.880 \cdot 10^4$	$1.780 \cdot 10^4$
k_2 (N m^{-2})	$-4.32 \cdot 10^5$	$-6.27 \cdot 10^5$	$-7.28 \cdot 10^5$
k_3 (N m^{-3})	$9.4 \cdot 10^6$	$31.4 \cdot 10^6$	$44.4 \cdot 10^6$
k_4 (N m^{-4})	$7.503 \cdot 10^8$	$-5.210 \cdot 10^8$	$-13.380 \cdot 10^8$
k_5 (N m^{-5})	$-5.570 \cdot 10^{10}$	$-1.380 \cdot 10^{10}$	$1.478 \cdot 10^{10}$
k_6 (N m^{-6})	$1.534 \cdot 10^{12}$	$7.410 \cdot 10^{11}$	$1.675 \cdot 10^{11}$
k_7 (N m^{-7})	$-1.972 \cdot 10^{13}$	$-1.170 \cdot 10^{13}$	$-5.540 \cdot 10^{12}$
k_8 (N m^{-8})	$9.890 \cdot 10^{13}$	$6.50 \cdot 10^{13}$	$3.76 \cdot 10^{13}$

Tableau. 7– Résultats de l’identification des paramètres du modèle de mémoire fractionnaire.

Paramètres	Test 1	Test 2	Test 3
$Y(1)$	48.00	48.00	48.95
$Y(2)$	1.355	1.343	1.298
$Y(3)$	-10.947	-14,820	-11.252
$Y(4)$	1.090	1,101	1.435
Erreur d’estimation (%)	3.84	4.9	5.56
M	8	8	8
k_1 (N m^{-1})	6025.987	6875.022	6679.097
k_2 (N m^{-2})	$-5.46 \cdot 10^5$	$-7.89 \cdot 10^5$	$-8.34 \cdot 10^5$
k_3 (N m^{-3})	$1.99 \cdot 10^7$	$4.75 \cdot 10^6$	$5.49 \cdot 10^7$
k_4 (N m^{-4})	$3.03 \cdot 10^8$	$-1.31 \cdot 10^9$	$-1.84 \cdot 10^9$
k_5 (N m^{-5})	$-4.57 \cdot 10^{10}$	$7,44 \cdot 10^9$	$2.82 \cdot 10^{10}$
k_6 (N m^{-6})	$1.42 \cdot 10^{12}$	$4,13 \cdot 10^{11}$	$-3.62 \cdot 10^{10}$
k_7 (N m^{-7})	$-1.91 \cdot 10^{13}$	$-8.99 \cdot 10^{12}$	$-3.88 \cdot 10^{12}$
k_8 (N m^{-8})	$9.82 \cdot 10^{13}$	$5.58 \cdot 10^{13}$	$3.19 \cdot 10^{13}$

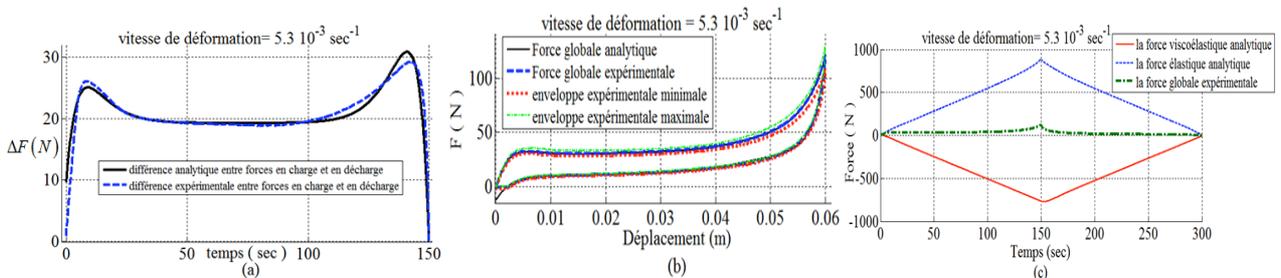


FIG. 2 – Les représentations du modèle de mémoire entier : (a) différence entre forces en charge et en décharge, (b) la force globale, (c) reconstruction des forces élastique et viscoélastique.

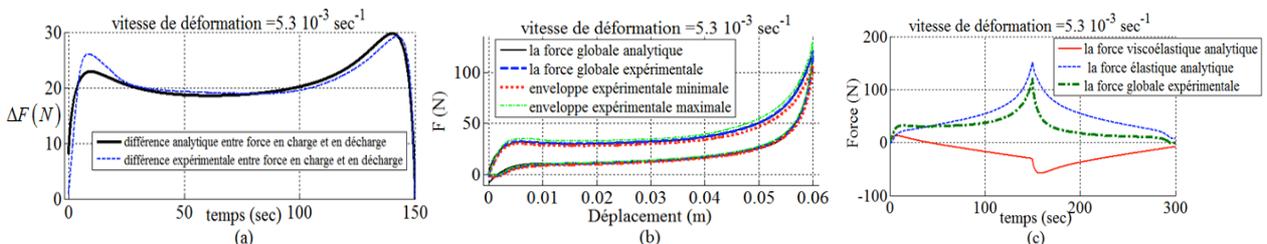


FIG. 3 – Les représentations du modèle de mémoire fractionnaire : (a) différence entre forces en charge et en décharge, (b) la force globale, (c) reconstruction des forces élastique et viscoélastique.

References

[1] Gibson, L.J. and Ashby, M.F. (1997). Cellular Solids: Structure and Properties, 2nd edn, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

- [2] Joshi, G., A. K. Bajaj. And Davies, P. (2010). Whole-body Vibratory Response Study Using a Nonlinear Multi-body Model of Seat-occupant System with Viscoelastic Flexible Polyurethane Foam. *Industrial Health* 48(5): 663-674.
- [3] Dupuis, L.R. and Aubry, E. (2008). Development and comparison of foam comprehensive law in great deformation, In: S.E.M.XI International Congress Orlando, Florida, USA.
- [4] Ippili, R. K., Davies, P., Bajaj, A.K. and Hagenmeyer, L. (2008). Nonlinear multi-body dynamic modelling of seat-occupant system with polyurethane seat and H-point prediction, *International Journal of Industrial Ergonomics*, 38(5-6):368-383.
- [5] Jmal,H., Dupuis,R. and Aubry,E. “Experimental identification of foam parameters using memory integer model”, In: DYMAT International Congress, Strasbourg 2010, 261-268 .
- [6] Jmal,H., Dupuis,R. and Aubry,E. (2011).“Quasi-static behaviour identification of Polyurethane Foam using a memory integer model and the difference-forces method”, *Journal of Cellular Plastics*”, under press.
- [7] Deng, R., Davies P., and Bajaj A. K. (2006). A nonlinear fractional derivative model for large uni-axial deformation behaviour of polyurethane foam. *Signal Processing*. 86(10): 2728-2743.
- [8] Deng,R., “Modeling and Characterization of flexible polyurethane foam”, Ph.D. Thesis: School of Mechanical Engineering, Purdue University, USA, 2004
- [9] Ouellet, S., Cronin, D. and Worswick, M. (2006). Compressive response of polymeric foams under quasi-static, medium and high strain rate conditions, *Polymer Testing*, 25(6):731-743.
- [10] Gervillers, S., Alaoui, A. and Grolleron, C., Comportement d'une mousse de polymère, 15^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nancy 2001, 422-427.

Nomenclatures

Symboles	Unités	Définitions
t	(sec)	Temps
T	(sec)	Temps d'échantillonnage
T_{ec}	(sec)	Période d'échantillonnage
x	(m)	Déplacement
$(L_0 \times l_0 \times b_0)$	(m ³)	Dimensions initiales des spécimens de mousse
$\dot{\varepsilon}$	(sec ⁻¹)	Vitesse de déformation
ε	(m m ⁻¹)	Déformation
ε_{max}	(m m ⁻¹)	Déformation maximale
ε_0	(m m ⁻¹)	Déformation initiale
F	(N)	Force globale de la mousse
F_{ve}	(N)	Force viscoélastique
F_e	(N)	Force élastique
k_i	(N m ⁻¹)	Raideur élastique d'ordre i
K_{ve}	(N m ⁻¹)	Raideur viscoélastique ⁽¹⁾
α_i	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le i^{th} mode viscoélastique ⁽¹⁾
$Re(\alpha_i)$	(sec ⁻¹)	Partie réelle du i^{th} mode viscoélastique représentant i^{th} inverse du temps de relaxation ⁽¹⁾
$Im(\alpha_i)$	(sec ⁻¹)	Partie imaginaire du i^{th} mode viscoélastique représentant la i^{th} fréquence ⁽¹⁾
a_i	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le i^{th} résidu viscoélastique ⁽¹⁾
b	(sec ⁻¹)	L'inverse du temps de relaxation ⁽²⁾
c_1	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre réel représentant la contribution du terme proportionnel au déplacement dans la force viscoélastique. ⁽²⁾
c_2	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre réel représentant la contribution du terme fractionnaire dans la force viscoélastique. ⁽²⁾
β		Ordre de la dérivation fractionnaire ⁽²⁾
P		Nombre de modes viscoélastiques ⁽¹⁾
n		Nombre entier représentant l'ordre de dérivation associé au déplacement ⁽¹⁾
r		Nombre entier représentant l'ordre de dérivation associé à la force viscoélastique ⁽¹⁾
$(e_i)_{i=0..n}$		Coefficient réel pondérant la dérivation d'ordre i du déplacement ⁽¹⁾
$(d_i)_{i=0..r}$		Coefficient réel pondérant la dérivation d'ordre i de la force viscoélastique ⁽¹⁾
M		Ordre du polynôme élastique
N		Nombre de spécimens par test
N_{cyc}		Nombre de cycle de compression quasi-statique par test

⁽¹⁾: modèle de mémoire entier.

⁽²⁾: modèle de mémoire fractionnaire.