

# Résolution des équations d'érosion interne dans les sols par développement asymptotique

F. YAKHLEF<sup>a</sup>, A. KHAMLI<sup>a</sup>, A. JABBOUR<sup>a</sup>, M. BEZZAZI<sup>a</sup>, M.A. PARRON VERA<sup>b</sup>, P. DUBUJET<sup>c</sup>

a. Laboratoire AMS, Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech, Tétouan 93002, Maroc

b. Université de Cadiz, Ecole Polytechnique Supérieure d'Algeciras, Espagne

c. LTDS, ENISE, Rue Jean Parot, Saint-Etienne, France

## Résumé :

On considère dans ce travail le phénomène d'érosion interne se produisant dans un milieu monodimensionnel. Les équations couplées de ce problème qui comprennent la consolidation, l'érosion et le transport des particules érodées sont résolues par une méthode semi-analytique utilisant un développement asymptotique. La variable échelle choisie étant définie par la variation maximale de porosité. Une étude paramétrique en fonction de la perméabilité, de la résistance à l'érosion et du gradient hydraulique a été ensuite effectuée.

## Abstract :

We consider in this work internal erosion phenomenon occurring in a one-dimensional medium. The coupled equations which include consolidation, erosion and transport of the eroded particles are solved by a semi-analytical method using an asymptotic expansion. The scale variable is chosen to be the maximum variation of porosity that could take place in the porous medium. A parametric study giving the maximum porosity as function of permeability, resistance to erosion and the applied hydraulic gradient was then carried out.

**Mots clefs :** milieu poreux, érosion interne, Darcy, consolidation, développement asymptotique

## 1 Introduction

L'érosion interne est reliée au phénomène d'endommagement, par arrachement des fines et leur transport, qui se produit dans les sols sous l'action d'un écoulement de liquide. Elle peut conduire à des ruptures imprévues des ouvrages de génie civil: digues, quais, barrages, et provoquer des inondations catastrophiques. Le phénomène d'érosion suit au cours de son évolution deux scénarios. Le premier correspond à la phase initiale où la suffusion provoque l'entraînement des particules solides fines arrachées au squelette solide et la deuxième phase correspond au développement du renard hydraulique caractérisé par la présence d'une brèche à fort débit au sein du sol, [1]. Dans la suite seule la suffusion est considérée.

Des progrès récents ont été accomplis au niveau de la compréhension des lois physiques qui gèrent le phénomène d'érosion interne [2], [3] et [4]. Tous les modèles proposés supposent que le sol est composé de trois phases: le squelette solide, le fluide interstitiel et le solide fluidisé produit par l'érosion et transporté ensuite par l'écoulement au sein du milieu poreux. Les lois d'érosion internes sont formulées en exprimant directement l'évolution de la porosité du sol en fonction de l'action mécanique à l'origine de l'arrachement des particules. Cette action est prise égale au gradient de pression de l'écoulement ou bien au débit d'écoulement. Sous cette forme, l'équation d'érosion est couplée à l'équation de Darcy et au problème de consolidation ayant lieu dans le massif du sol.

En considérant le problème monodimensionnel permettant de décrire la configuration associée aux échantillons testés expérimentalement [5], nous exprimons les équations qui gouvernent le couplage érosion, consolidation et transport des particules érodées. Afin d'intégrer ces équations, nous introduisons des simplifications physiques et nous effectuons un développement asymptotique en termes d'un paramètre échelle représentant la perturbation maximale qui pourrait affecter la porosité dans le cas d'un mélange contrôlé sable-argile où la proportion d'argile érodable est faible. Nous montrons que ce problème admet une solution analytique en termes de la porosité. Des simulations sont ensuite effectuées pour étudier l'influence de la perméabilité du milieu, la résistance du sol à l'érosion et le gradient hydraulique appliqué.

## 2 Equations générales du modèle d'érosion

Le modèle d'érosion proposé dans la suite concerne un mélange saturé de sable et d'argile. Il s'appuie sur une description de type Euler dans les différentes phases qui composent le milieu. Une modélisation continue est utilisée pour représenter les particules fines érodées puis transportées [3] et [6]. Le modèle sera présenté dans le contexte mono dimensionnel. Le sol est supposé être constitué des trois phases suivantes:

- le squelette, formé par les grains de sable et les grains d'argile non détachés;
- le fluide, l'eau;
- le solide fluidisé, c'est-à-dire les grains d'argile détachés par les forces d'écoulement.

Les quantités relatives des différents constituants sont entièrement définies par la porosité du sol  $\varphi$  et la concentration  $c$  en solide fluidisé qui représente le rapport du volume occupé par les grains d'argile, arrachés du squelette par les forces d'écoulement, divisé par le volume des vides.

Dans le modèle, les grains arrachés par l'écoulement sont supposés entraînés immédiatement par l'eau interstitielle et se déplacent alors à la même vitesse que celle de l'écoulement. Ceci constitue seulement une approximation car la vitesse réelle des particules est inférieure à celle de l'eau [7]. L'approximation pourrait être justifiée par le fait que dans le problème d'érosion interne seules les fines particules d'argile sont mobilisées. Comme les vitesses d'écoulement sont très faibles, les vitesses limites des grains fluidisés sont atteintes rapidement. Le modèle utilise aussi le concept de vitesse de Darcy,  $q$ , qui représente une proportion de la vitesse vraie moyenne de l'eau  $v$ . Elle correspond en fait à une vitesse définie à partir du débit de percolation :  $q = \varphi v$ .

En exprimant l'équation de continuité de la masse et le fait que les particules produites par l'érosion se détachent du sol pour s'immerger dans l'eau, il vient pour le mélange sable-argile d'une part et pour la phase des particules fluidisées d'autre part les équations suivantes :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -(1-\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\varphi(1-c))}{\partial t} - \frac{\partial(cq)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (1-\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2)$$

où  $x$  est la coordonnée axiale,  $t$  le temps et  $u$  le déplacement des grains solides.

La loi expérimentale de Darcy mesure le débit d'eau qui peut s'écouler par unité de temps à travers un échantillon de milieu poreux. En remarquant que la masse volumique du fluide s'écrit :  $\rho_f = \rho_s c + \rho_w (1-c)$  où  $\rho_s$ ,  $\rho_w$  sont respectivement les densités des grains solides et de l'eau, la vitesse de Darcy prend la forme

$$q = -k \frac{1}{g \rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

où  $k$  est la conductivité hydraulique,  $g$  la constante de gravité et  $p$  la pression.

La variation de la perméabilité par rapport à la porosité est considérée selon la loi de Kozeny- Carman [6]

$$k = k_0 \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \quad (4)$$

où  $k_0$  est la perméabilité initiale.

Pour définir l'état de contraintes au sein de l'échantillon de sol, on considère le principe de Terzaghi qui introduit le concept de contrainte effective du squelette. Ce postulat peut se résumer en exprimant que la déformation d'un sol saturé est régie par la contrainte effective égale à la différence entre contrainte totale et pression du fluide interstitiel. Ainsi, la contrainte totale  $\sigma$  s'écrit sous la forme  $\sigma = \sigma' + p$  où  $\sigma'$  est la contrainte effective du squelette et  $p$  la pression de l'eau. Il est admis ici que l'érosion ne modifie pas la validité du postulat de Terzaghi.

Du fait que le phénomène d'érosion est associé à une dégradation du milieu dont l'effet est essentiellement l'augmentation de la porosité  $\varphi$ , le comportement mécanique du squelette granulaire est supposé élastique

couplé à un endommagement qui affecte le module de rigidité du sol selon l'approche classique utilisée dans la théorie de l'endommagement [8]. Il convient cependant de préciser que l'évolution de cet endommagement lié à la variation de la porosité n'est pas pour l'instant régie par une force thermodynamique (au sens de la mécanique de l'endommagement). De plus, la plage de variation de la porosité n'est pas conforme à celle des modèles classiques d'endommagement. La porosité est supposée dans la suite varier faiblement de sorte qu'il est possible de justifier l'approche par développement asymptotique qui sera mise en œuvre. Pour cela la proportion de l'argile (seul phase érodable) dans le sol est supposée faible.

En considérant une configuration axisymétrique en présence de la seule déformation axiale, la loi de Hooke généralisée pour des matériaux linéaires isotropes et homogènes permet d'exprimer la contrainte effective axiale sous la forme

$$\sigma' = E_1 (1 - \varphi) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

avec

$$E_1 = \frac{E_0(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (6)$$

où  $E_0$  est le module du sol intact et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

L'équilibre local de l'échantillon de sol s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_1 (1 - \varphi) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

En négligeant la variation de la porosité due à la déformation du squelette, la variation locale de la porosité coïncide avec la variation de volume résultant de l'érosion  $\varepsilon_{er}$  de sorte que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{er}}{\partial t} \quad (8)$$

Une loi classique qui exprime l'érosion a été proposée sous la forme

$$\frac{\partial \varepsilon_{er}}{\partial t} = \rho_s \frac{1}{\tau_{er}} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_c} \right)^n |q| \quad (9)$$

où  $n$  est un exposant réel positif souvent pris égal à l'unité [7],  $\tau_{er}$  est un paramètre du sol qui mesure la résistance à la progression de l'érosion et  $\varphi_c$  la porosité maximale correspondant à une partie du squelette non érosive (ici elle correspond à l'état où toute la phase argile a été érodée).

En supposant que la densité  $\rho_f \approx \rho_w$ , les équations (1) à (9) permettent de former un système de quatre équations indépendantes aux quatre inconnues  $c$ ,  $q$ ,  $u$  et  $\varphi$ .

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho_w g (1 - \varphi)}{k_0 E_1 \varphi^3} \left( (1 - \varphi) \frac{\partial q}{\partial t} - q \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{(1 - \varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho_w g (1 - \varphi)}{k_0 E \varphi^3} q + \frac{1}{(1 - \varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\rho_s}{\tau_{er}} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_c} \right)^n |q| \quad (12)$$

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + q \frac{\partial c}{\partial x} = (1 - c) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (1 - \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \quad (13)$$

Une fois le débit est calculé, la pression  $p$  peut être calculée par intégration de l'équation (3).

### 3 Développement asymptotique des équations d'érosion

Le système des équations (10), (11), (12) et (13) peut être découpé en les trois premières équations qui décrivent la consolidation avec érosion, qui peuvent être intégrées indépendamment de l'équation (13), et de cette dernière qui décrit le transport des particules érodées.

Les essais faits pour intégrer le système (10) à (12) par éléments finis se sont révélés infructueux du fait de l'instabilité qui caractérise ce système. En remarquant que ce système décrit la consolidation perturbée par le phénomène d'érosion, nous envisageons d'introduire un développement asymptotique. Le paramètre échelle que nous proposons est défini par la perturbation maximale pouvant endommager le sol à savoir

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi_c}\right)^n \quad (14)$$

où  $\varphi_0$  est la porosité initiale du sol.

L'équation (9) montre que le choix de ce paramètre permet de rendre compte du taux maximum d'érosion pouvant se produire dans un sol donné qui est le siège d'un écoulement donné. Le choix de  $\varepsilon$  défini par l'équation (14) avec l'exposant  $n$  permet d'éviter l'apparition d'un terme fractionnaire dans l'équation (12). Afin de simplifier le modèle, nous supposons par ailleurs que la porosité initiale est uniforme de sorte que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Le développement asymptotique au premier ordre s'écrit

$$q = q_0 + \varepsilon q_1, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 \quad (16)$$

En remplaçant le développement (16) dans les équations (10) à (12) et en utilisant (3), il vient les équations à l'ordre 0 et 1 suivantes

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -\frac{1}{E_1(1-\varphi_0)} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (18)$$

$$q_0 = -\frac{k_0 \varphi_0^3}{\rho_w g (1-\varphi_0)^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\rho_s}{\tau_{er}} |q_0| \quad (20)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{q_0}{1-\varphi_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{(3-\varphi_0)\varphi_1}{\varphi_0(1-\varphi_0)} \frac{\partial q_0}{\partial t} - 3a \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - a \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial x} - a \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\rho_w g (1-\varphi_0)(3-\varphi_0)}{k_0 \varphi_0^4} \varphi_1 q_0 - \frac{\rho_w g (1-\varphi_0)^2}{k_0 \varphi_0^3} q_1 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a(1-\varphi_0)} q_1 - \frac{a(3-2\varphi_0)}{\varphi_0(1-\varphi_0)^2} q_0 \varphi_1 + \frac{1}{1-\varphi_0} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (23)$$

avec

$$a = \frac{k_0 E_1 \varphi_0^3}{\rho_w g (1-\varphi_0)^2} \quad (24)$$

### 4 Résolution semi-analytique des équations d'érosion

Les conditions initiales qui sont associées à ces équations sont choisies sous la forme:

$$\varphi_0(x, t=0) = \varphi_i, \quad p_0(x, t=0) = p_s, \quad \varphi_1(x, t=0) = 0 \quad (25)$$

Les conditions aux limites en  $x=0$  correspondent à une pression imposée, une déformation nulle et un gradient de perturbation de pression nul:

$$p_0 = p_e, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow q_1 = -\frac{k_0 \varphi_0^2 (3 - \varphi_0) \varphi_1}{\rho_f g (1 - \varphi_0)^3} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

Les conditions aux limites en  $x=L$  correspondent à une pression imposée, un déplacement nul et un gradient de perturbation de pression nul:

$$p_0 = p_s, \quad u_0 = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow q_1 = -\frac{k_0 \varphi_0^2 (3 - \varphi_0) \varphi_1}{\rho_f g (1 - \varphi_0)^3} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad u_1 = 0 \quad (27)$$

Les équations (17) à (20) avec les conditions initiales et aux limites (25) à (27) admettent des solutions analytiques :

$$p_0(x, t) = p_e + i \left\{ x + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2}}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (28)$$

$$q_0(x, t) = ib \left\{ 1 + \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (29)$$

$$u_0(x, t) = -\frac{iE_1 L}{1 - \varphi_0} \left\{ \frac{L}{2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + 2 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2}}}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2}}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (30)$$

$$\varphi_1(x, t) = -\frac{\rho_s b i}{\tau_{er}} \left\{ t + \frac{2L}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (31)$$

avec

$$b = \frac{k_0 \varphi_0^3}{\rho_w g (1 - \varphi_0)^2}, \quad i = \frac{p_s - p_e}{L} \quad (32)$$

Les équations (21) à (23) peuvent être intégrées numériquement au moyen de schémas aux différences finies pour trouver les quantités  $u$ ,  $q$  et  $p$ . La porosité  $\varphi$  s'obtient elle analytiquement sous la forme

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 - \frac{\rho_s b i}{\tau_{er}} \left\{ t + \frac{2L}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi_c}\right)^n \quad (33)$$

## 5 Résultats et discussion

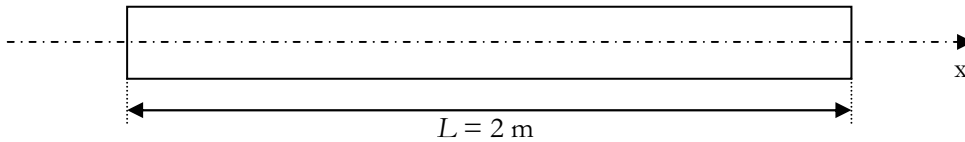


FIG. 1 – Géométrie de l'éprouvette modélisée

On considère un domaine unidimensionnel de longueur  $L = 2\text{ m}$ , figure 1. Les autres données sont :  $\rho_w = 1000\text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_s = 2650\text{ kg.m}^{-3}$ ,  $E_0 = 2 \times 10^8\text{ Pa}$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $p_s = 10^5\text{ Pa}$ ,  $\varphi_i = 0.35$ ,  $\varphi_c = 0.45$ ,  $n = 1.1$ . Nous effectuons une étude paramétrique de la porosité maximale obtenue à l'instant  $t = 60\text{ s}$  en

fonction de  $k_0$ ,  $p_e$  et  $\tau_{er}$ . La figure 2 montre un exemple du profil spatial de la porosité à  $t = 60 s$ . Le tableau 1 présente les résultats de l'étude paramétrique.

$k_0$	$p_e$	$\tau_{er}$	$\varphi_{max}$
$10^{-5}$	$5 \times 10^5$	$10^1$	0.37580
$10^{-5}$	$5 \times 10^5$	$10^2$	0.35258
$10^{-5}$	$10^6$	$10^1$	0.40805
$10^{-5}$	$10^6$	$10^2$	0.35580
$10^{-6}$	$5 \times 10^5$	$10^1$	0.35816
$10^{-6}$	$5 \times 10^5$	$10^2$	0.35082
$10^{-6}$	$10^6$	$10^1$	0.36837
$10^{-6}$	$10^6$	$10^2$	0.35184

Tableau 1 : Porosité maximale en fonction de la perméabilité, de la pression à l'entrée et de la résistance à l'érosion

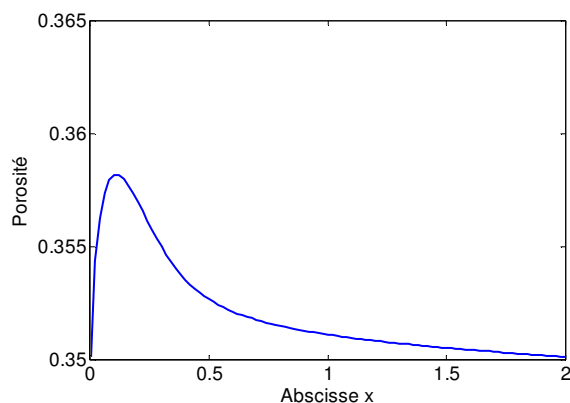


FIG. 2 – Profil type de la porosité à  $t = 60 s$ , correspondant à la ligne 6 du tableau 1

## 6 Conclusion

Une modélisation semi-analytique des équations d'érosion interne dans le contexte mono dimensionnel a été effectuée dans ce travail en utilisant la méthode des développements asymptotiques. Le paramètre échelle qui a été choisi correspond à la perturbation maximale pouvant affecter la porosité du fait de l'érosion. La solution analytique a permis de conduire une étude paramétrique en fonction des paramètres influençant le phénomène d'érosion dans le mélange sable et argile. L'approche mise en œuvre apparaît intéressante, mais nécessite encore une véritable validation. Nous comptons l'utiliser dans le futur pour essayer de prédire certains résultats expérimentaux établis dans le domaine de l'érosion interne.

## Références

- [1] Bonelli S., Brivois O., Borghi R., Benahmed N. On the modelling of piping erosion. C.R. Mécanique, 22: 225-244, 2006.
- [2] Vardoulakis I. Fluidisation in artesian flow conditions: Hydromechanically stable granular media. Géotechnique, 54(2): 117-130, 2004.
- [3] Wan R.G., Wang J. Analysis of sand production in unconsolidated oil sand using a coupled erosional-stress-deformation model. Journal of Canadian Petroleum Technology, 43(2): 47-52, 2004.
- [4] Stavropoulou M., Papanastasiou P., Vardoulakis I. Coupled wellbore erosion and stability analysis. International Journal for Numerical and analytical Methods in Geomechanics, 22: 749-769, 1998.
- [5] Bendahmane F., Marot D., Rosquoët F., Alexis A. Characterization of internal erosion in sand kaolin soils. Revue Européenne de Génie Civil, 10(4): 505-520, 2006.
- [6] Papamichos E. Failure in rocks, Hydro-mechanical coupling for erosion. Revue Française de Génie-Civil, 8: 709-734, 2004.
- [7] Papamichos E., Vardoulakis I., Tronvoll J., Skjaer-Stein A. Volumetric sand production model and experiment. Int. Journal for Numerical and analytical Methods in Geomechanics, 25 : 789-808, 2001.
- [8] Lemaitre J., Chaboche J.L. Mécanique des matériaux Dunod, 1985.