

# Approche en contrainte effective pour le couplage hydromécanique dans les milieux poreux non saturés

W. Araïro<sup>a</sup>, F. Prunier<sup>a</sup>, I. Djéran-Maigre<sup>a</sup>

a. Université de Lyon, INSA de Lyon, LGCIE - Laboratoire de Génie Civil et d'Ingénierie Environnementale  
Bâtiment JCA Coulomb, 34 avenue des Arts, 69621 Villeurbanne

## Résumé:

Nous présentons ici un modèle hydromécanique couplé pour les milieux poreux non saturés. La partie mécanique est décrite par une loi élastoplastique non associée. La partie hydrique est décrite par le modèle de Van Genuchten pour les courbes limites de rétention d'eau, et par celui de Mualem 1974 pour les courbes de balayages. Ces modèles ont été enrichis par une relation de couplage hydromécanique qui permet d'exprimer la pression d'entrée d'air en fonction de la porosité. Enfin le couplage complet se fait avec la contrainte effective de Bishop en utilisant la relation de Modaressi pour l'évolution du paramètre de succion  $\chi$ .

## Abstract:

We present here a coupled hydro-mechanical model for unsaturated porous media. The mechanical part is described by a non-associated elasto-plastic model. The hydric part is described by the model of Van Genuchten, to represent the boundary curves of water retention, and by Mualem's model 1974 for scanning curves. In addition, a coupled hydromechanical relationship has been used to express the air entry value depending on the porosity. Finally the complete coupling is achieved using Bishop effective stress, the Modaressi's equation has been used for the variation of suction parameter  $\chi$ .

**Mots clefs:** milieux poreux non saturés, couplage hydromécanique, rétention d'eau, contrainte effective.

## 1 Introduction

Comprendre la réponse d'un milieu poreux non saturé aux sollicitations mécaniques et hydrauliques est important pour la conception et la construction de structures utilisant ce type de matériau. Ceci est d'autant plus vrai dans le domaine géotechnique, où il s'agit des géo matériaux argileux.

Un sol non saturé est un milieu poreux multiphasique. Une partie de l'espace vide entre les particules solides est occupé par l'eau et le reste par de l'air. Dans les sols non saturés, la présence de l'air modifie les interactions entre les particules solides et l'eau. De nouveaux concepts ont été introduits pour tenir compte du comportement particulier associé à la non saturation.

Les courbes de rétention d'eau sont souvent utilisées pour quantifier la capacité d'un sol à retenir l'eau.

Une description complète du comportement des sols non saturés en eau, devra prendre en compte:

- le comportement hydraulique (propriétés de rétention)
- le comportement mécanique (relation contrainte/déformation)
- l'écoulement d'eau en milieu poreux.

Tous les trois comportements sont connus pour être couplés entre eux. En particulier, le comportement mécanique est explicitement une fonction de la succion par le biais de la contrainte effective.

Ainsi, les recherches ont été menées pour étudier les différents facteurs physiques et mécaniques affectant la courbe de rétention d'eau.

Dans cet article, un modèle hydrique est présenté pour modéliser les courbes de rétention d'eau, en se basant sur le modèle de Van Genuchten [14] et celui de Mualem [10]. Le comportement mécanique du squelette solide est représenté par la loi Plaso, une loi élasto-plastique non associée basée sur la surface limite proposée par Van Eekelen [13]. La définition de Bishop pour la contrainte effective est adoptée pour relier les différentes variables indépendantes. De plus, le couplage hydromécanique est complété par la prise en compte de l'effet de l'évolution de la porosité (due à la déformation mécanique) sur le comportement hydrique. En d'autres termes la courbe de rétention d'eau va dépendre de la porosité.

## 2 L'eau dans le milieu poreux non saturé

Les courbes de rétention d'eau (CRE) sont souvent utilisées pour quantifier la capacité d'un sol à retenir l'eau. Ces courbes sont obtenues en soumettant un échantillon du matériau à un cycle de séchage et d'imbibition. La CRE montre des effets d'hystérésis : le chemin parcouru lors du séchage se situe au-dessus du chemin de remouillage. A une succion donnée le degré de saturation dépend du chemin parcouru pour parvenir à ce point. Cette hystérésis est typique des milieux poreux constitués de pores de taille variable interconnectés en parallèle ou en série, dans lesquels l'air est piégé. Sur les courbes de rétention d'eau, on distingue : la courbe limite d'imbibition, la courbe limite de drainage, les courbes de balayage en imbibition et les courbes de balayage en drainage.

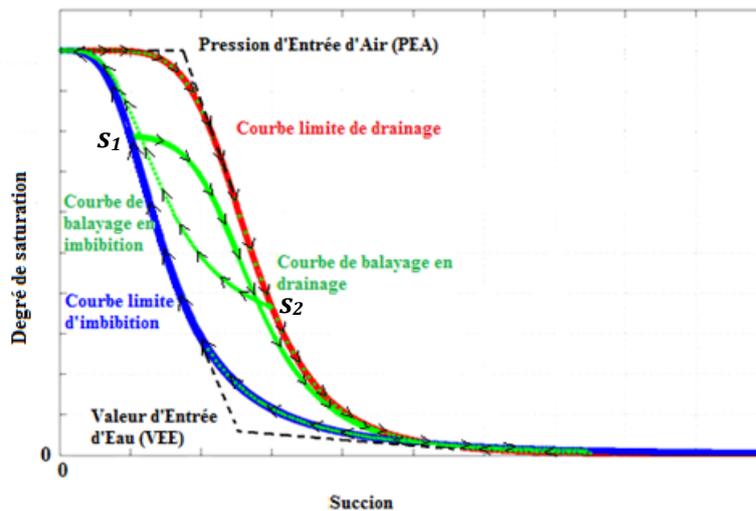


FIG. 1 – Représentation schématique d'une courbe de rétention d'eau (CRE) avec les quatre courbes : les deux courbes limites et deux courbes de balayage en imbibition et en drainage.

Compte tenu de la difficulté de la mesure de la succion, plusieurs modèles numériques ont été développés pour décrire la courbe sigmoïdale de rétention d'eau.

Pour les courbes limites, Leong et Rahardjo [8], Aubertin et Maksoud [1], Fredlund et Houston, et Fredlund et Sillers ([3], [4]) ont constaté que l'équation de Van Genuchten [14] et celle de Fredlund et Xing [5] sont les plus pertinentes pour modéliser les courbes limites de rétention d'eau, pour une variété de sols. Ce choix a été fait en fonction du critère d'information d'Akaike [4].

L'équation de Van Genuchten s'écrit :

$$S_r = S_{rres} - (S_{rsat} - S_{rres}) \left[ 1 + \left( \frac{s}{a_v} \right)^{n_v} \right]^{-m_v} \quad (1)$$

$S_r$  est le degré de saturation correspondant à la succion  $s$  ;  $S_{rres}$  et  $S_{rsat}$  sont respectivement le degré de saturation résiduel et le degré de saturation à la saturation.

$a_v$  est un paramètre lié à la pression d'entrée,  $n_v$  est un paramètre lié à la variation du degré de saturation dans le sol pour des succions supérieures à la pression d'entrée d'air, et  $m_v$  est lié au degré de saturation résiduel  $S_{rres}$ . L'indice  $v$  dans  $a_v, n_v, m_v$  est égale à  $w$  dans le cas d'imbibition et  $v = d$  dans le cas de drainage.

$n_v$  et  $m_v$  peuvent être lié par:  $m_v = 1 - \frac{k_m}{n_v}$  ; pour  $k_m = 1$  on a la formulation de Van Genuchten et Mualem, et pour  $k_m = 2$  on a la formulation de Van Genuchten et Burdine [14].

Kawai et al. [7] ont étudié l'effet de l'indice des vides sur la courbe limite de rétention d'eau (CRE). L'eau interstitielle a tendance à migrer avec l'augmentation de la succion et lorsque la valeur de la succion atteint la pression d'entrée d'air (PEA), l'eau commence à s'écouler. La PEA reflète la grandeur de la zone capillaire de saturation dans le sol. Plus les pores sont grands, plus la PEA est faible. La PEA est inversement proportionnelle au logarithme de  $e$  ( $e$  est l'indice des vides du sol)[15]. Quand le sol est mouillé, la succion diminue et le degré de saturation augmente, lorsque la valeur de la succion diminue au-delà d'une certaine valeur appelée la valeur d'entrée d'eau (VEE) (FIG. 1), l'augmentation du degré de saturation est plus

remarquable. Dans ce contexte, Vanapalli et al. [15] ont publié les résultats des courbes de rétention d'eau d'un limon argileux sous différents états de compactage.

Dans notre modèle, l'équation (1) de Van Genuchten a été améliorée en ajoutant un paramètre  $D_p$  qui permet de prendre en compte l'effet de l'évolution de l'indice des vides sur les courbes limites de la courbe de rétention d'eau.  $D_p$  est exprimé en fonction de l'indice des vides actuel selon l'équation :

$$D_p = s_{ea0} * \lambda(e_0 - e)/e_0 \quad (2)$$

Où  $s_{ea0}$  est la pression d'entrée d'air correspondant à l'indice des vides de référence  $e_0$ ,  $\lambda$  un paramètre du matériau déterminé par des essais de drainage à différentes porosités, et  $e$  l'indice des vides actuel.

Alors l'équation (1) sera modifiée comme suit :

$$S_r = S_{rres} - (S_{rsat} - S_{rres}) \left[ 1 + \left( \frac{(s - D_p)}{a_v} \right)^{n_v} \right]^{-m_v} \quad (3)$$

Pour les courbes de balayages, dans l'étude menée par Pham et Fredlund [12] les deux modèles de Mualem de (1974) et (1984) sont comparés à trois autres modèles.

Ces études [10] [12] ont démontré la pertinence du modèle de Mualem (1974) pour la modélisation des courbes de balayage.

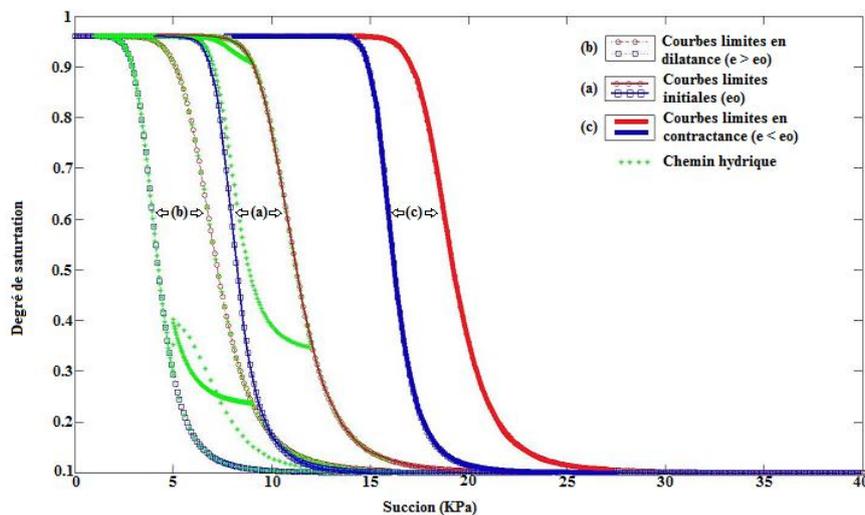


FIG. 2 – Capacité du modèle sur un chemin avec plusieurs phases de drainage/imbibition et plusieurs phases de chargement mécanique : la translation des courbes limites de rétention d'eau est fonction de l'indice des vides actuel (la pression d'entrée d'air est inversement proportionnelle à l'indice des vides)

Le modèle de Mualem peut être établi à partir des deux courbes limites de drainage et d'imbibition.

La courbe de balayage en drainage, qui commence à partir de la valeur  $s_1$  de succion sur la courbe limite de mouillage, est donnée par:

$$S_{rd}(s_1, s) = S_{rw}(s) + \frac{[S_{rw}(s_1) - S_{rw}(s)]}{[S_{rsat} - S_{rw}(s)]} [S_{rd}(s) - S_{rw}(s)] \quad (4)$$

Où  $S_{rw}(s)$  est le degré de saturation sur la courbe limite de mouillage à la succion  $s$  ;  $S_{rd}(s)$  est le degré de saturation sur la courbe limite de drainage à la succion  $s$  ; et  $S_{rsat}$  est le degré de saturation à l'intersection des deux courbes limites pour une succion nulle.

D'une manière analogue, la courbe de balayage en imbibition, qui commence à partir de la valeur  $s_2$  de succion sur la courbe limite de drainage, est donnée par:

$$S_{rw}(s_2, s) = S_{rw}(s) + \frac{[S_{rsat} - S_{rw}(s)]}{[S_{rsat} - S_{rw}(s_2)]} [S_{rd}(s_2) - S_{rw}(s_2)] \quad (5)$$

### 3 Comportement mécanique du squelette solide

Nous avons reprogrammé la loi développée par Barnichon [2]. Cette loi élasto-plastique non associée est basée sur la surface de charge limite proposée par Van Eekelen [13], où la conicité dépend de l'angle de frottement  $\varphi$  et de la cohésion actuelle  $C$ . La figure 3 montre une comparaison entre les surfaces de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager et celle de Van Eekelen dans le plan déviateur.

L'expression de la surface de charge de Van Eekelen est donnée par :

$$f = \sqrt{I_{2\sigma'}} + m \left( I_{\sigma'} - \frac{3C}{\tan \varphi_c} \right) = 0 \quad (6)$$

Où  $C$  est la cohésion,  $\varphi_c$  l'angle de frottement en compression,  $I_{\sigma'}$  et  $I_{2\sigma'}$  sont respectivement le premier et le deuxième invariant des contraintes effectives.

$m$  est un coefficient défini par :

$$m = a(1 + b \sin 3\vartheta)^n \quad (7)$$

Où le paramètre  $\vartheta$  est l'angle de Lode, les paramètres  $a$  et  $b$  sont des fonctions de l'angle de frottement en compression  $\varphi_c$  et en extension  $\varphi_e$  :

$$a = \frac{r_c}{(1+b)^n} ; \quad b = \frac{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)^{\frac{1}{n}} + 1} \quad (8)$$

Avec  $r_c$  et  $r_e$  les rayons réduits en compression et en extension respectivement pour des essais triaxiaux :

$$r_c = \frac{2 \sin \varphi_c}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)} ; \quad r_e = \frac{2 \sin \varphi_e}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_e)} \quad (9)$$

L'exposant  $n$  contrôle la convexité de la surface de charge.

L'écrouissage est défini par une évolution hyperbolique sur  $C$  et  $\varphi$  en fonction de la déformation plastique équivalente de Von Mises. Les valeurs initiales de  $C$  et  $\varphi$  ( $C_0$ ,  $\varphi_{c0}$  et  $\varphi_{e0}$ ) donnent la limite élastique tandis que leur valeur maximale ( $C_f$ ,  $\varphi_{cf}$  et  $\varphi_{ef}$ ) donnent la limite de plasticité :

$$\varphi_c = \varphi_{c0} + \frac{(\varphi_{cf} - \varphi_{c0})\varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \quad (10)$$

$$\varphi_e = \varphi_{e0} + \frac{(\varphi_{ef} - \varphi_{e0})\varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \quad (11)$$

$$C = C_0 + \frac{(C_f - C_0)\varepsilon_{eq}^p}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \quad (12)$$

$\varphi_c$  et  $\varphi_e$  sont respectivement les angles de frottements en compression et en extension.  $B_p$  et  $B_c$  sont deux constantes d'écrouissage permettant de calibrer la forme de cet écrouissage. Enfin,  $\varepsilon_{eq}^p$  est la déformation plastique totale équivalente de Von-Mises. Le caractère non-associé est décrit avec une surface d'écoulement définie de la même manière que la surface de chargement, mais en utilisant l'angle de dilatance  $\psi$  au lieu de l'angle de frottement  $\varphi$ . L'évolution de  $\psi$  est donnée en supposant que :

$$\varphi - \psi = cte \quad cte \in \mathbb{R} \quad (13)$$

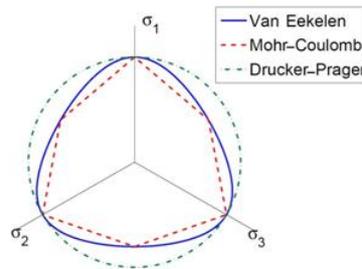


FIG. 3 – Surfaces limites de Mohr-Coulomb, de Drucker-Prager et de Van Eekelen dans le plan déviatoire pour  $\varphi_c = \varphi_e = 19^\circ$

#### 4 Validation du modèle hydrique

La comparaison du modèle hydrique avec les données expérimentales est fournie afin d'illustrer les capacités du modèle à simuler le comportement hydrique réel des sols non saturés.

La série de résultats expérimentaux considérés sont ceux présentés par Muraleetharan et al. [11] et correspondent à un échantillon de sable Silica F95. La figure 4 montre la compatibilité du modèle avec les données expérimentales, les résultats calculés donnent une représentation précise des données expérimentales. Pour un chemin cyclique de drainage et d'imbibition : il suffit de déterminer empiriquement les paramètres des deux courbes limites ( $a_d, n_d, a_w, n_w$ ) et le modèle est capable de prédire le degré de saturation correspondant à une succion donnée en dépendant de l'histoire de la succion.

Les paramètres utilisés dans l'équation (3) sont :

$$S_{rsat} = 0.83 ; S_{rres} = 0.00 ; a_d = 6.7613 ; n_d = 8.168 ; a_w = 3.9215 ; n_w = 7.695$$

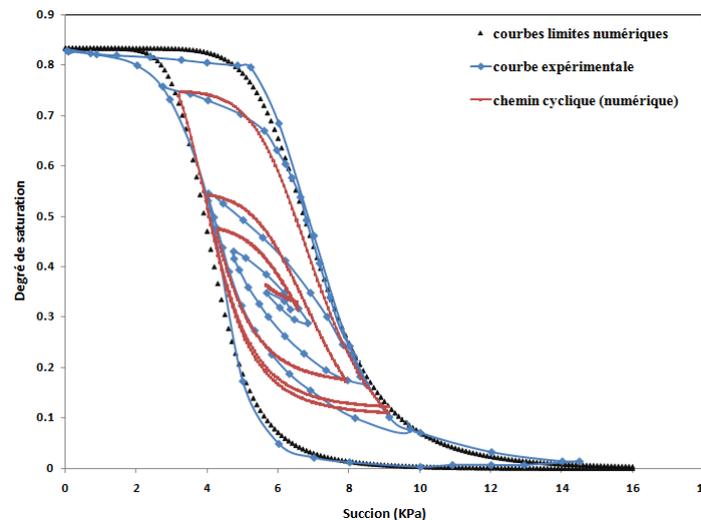


FIG. 4 – Validation du modèle de la courbe de rétention d'eau par des données expérimentales issues des essais de succion sur du sable Silica F95 (données expérimentales d'après [11])

#### 5 Notion de contrainte effective: Couplage hydromécanique

Le choix des variables de contrainte pour les sols saturés a donné lieu à des débats intenses, souvent en relation avec la possibilité de définir une mesure unique de la contrainte effective. Comme l'a souligné Jommi [6] : « En fait, aucune variable unique de contraintes n'a jamais été trouvée, qui, substituée à la contrainte effective, permet une description de tous les aspects du comportement mécanique d'un sol donné dans le domaine non saturé ». Une deuxième variable est généralement requise pour représenter l'influence stabilisatrice de la succion sur les forces intergranulaires et les effets de sa diminution avec l'imbibition.

Une omission flagrante du modèle de Barcelone (BBM) et des premières formulations était l'absence d'un modèle spécifique pour décrire la variation de la teneur en eau ou du degré de saturation en fonction de la variation des contraintes et/ou de la succion. Si le modèle mécanique est décrit en termes de contraintes nettes, les conséquences sont limitées, car il n'y a pas de couplage direct entre le modèle mécanique et le modèle hydrique.

Ainsi, dans le BBM, le comportement hydrique a été simplement défini en terme de surface limite. D'où la nécessité d'introduire la notion de contrainte effective qui dépend de la contrainte totale et de la pression capillaire.

Parmi les définitions de la contrainte effective, nous avons choisi celle de Bishop :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} + \chi(u_a - u_w) \delta_{ij} \quad (14)$$

Avec  $\delta_{ij}$  symbole de Kronecker,  $u_a$  la pression d'air,  $u_w$  la pression de l'eau, et pour l'instant :

$$\chi = \frac{s_{max}}{s} \tanh\left(\frac{s}{s_{max}}\right) \quad (15)$$

Avec  $s_{max}$  la succion maximale et  $s$  la succion. D'autres formulations plus complexes pour  $\chi$  peuvent-être utilisées, et ce coefficient donne lieu encore à des débats.

## 6 Conclusion

Un modèle hydromécanique couplé est présenté. Un modèle hydrique complet de la courbe de rétention a été mis en œuvre, prenant en compte l'effet d'hystérésis et de l'évolution de l'indice des vides. Ce modèle a été validé pour le sable d'Hostun. Cependant, dans la littérature, à la connaissance des auteurs, il existe peu de données expérimentales (une courbe de rétention avec les quatre branches) où l'effet de la porosité est pris en compte. Un nouveau dispositif expérimental est en cours de développement, dans notre laboratoire, pour contrôler les déformations d'un échantillon de sol soumis à des cycles de succion.

Le modèle hydrique est couplé à un modèle mécanique, dans ce dernier une loi élasto-plastique non associée est utilisée pour décrire le comportement du squelette solide. Les deux variables de contrainte adoptées pour le modèle hydromécanique couplé sont la contrainte effective de Bishop  $\sigma'$  et la succion  $s$ . Les variables conjuguées à ces deux dernières sont respectivement la déformation  $\varepsilon$  et le degré de saturation  $S_r$ . Les paramètres hydriques sont déterminés par des essais de rétention d'eau à différentes densités et les paramètres mécaniques sont déterminés par des essais triaxiaux.

## Références

- [1] Aubertin, M. and Maksoud, A. Hysteresis effects on the water retention curve: a comparison between laboratory results and predictive models. 57th Canadian Geotechnical Conference, Session 3A: 8-15, 2004.
- [2] Barnichon, J.D. Finite element modelling in structural and petroleum geology. Mémoire de thèse, Université de Liège, Belgique, 1998.
- [3] Fredlund, D.G. and Houston S.L., Protocol for the assessment of unsaturated soil properties in geotechnical engineering practice. Can. Geotech. J. 46: 694-707, 2009.
- [4] Fredlund D.G., and Sillers W.S. Statistical assessment of soil-water characteristic curve models for geotechnical engineering. Can. Geotech. J. 38: 1297-1313, 2001.
- [5] Fredlund, D.G., and Xing, A. Equations for the soil-water characteristic curve. Can. Geotech. J. 31: 521-532, 1994.
- [6] Jommi C., Remarks on the constitutive modeling of unsaturated soils. Balkema, Rotterdam, 139-153, 2000.
- [7] Kawai, K., et al. The model of water retention curve considering effects of void ratio. In Proceedings of Asian Conference on Unsaturated Soils, Singapore. Edited by H. Rahardjo, D.G. Toll, and E.C Leong. A.A. Balkema, Rotterdam, the Netherlands. 329-334, 2000.
- [8] Leong E. C. and Rahardjo H. Review of soil-water characteristic curve equations. Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, vol.123 No 12:1106-1117, 1997.
- [9] Modaressi A., A unified approach to model the behaviour of saturated and unsaturated soils. 8th international conference on computer methods and advances in geomechanics. Balkema, Rotterdam, 1507-1513, 1994.
- [10] Mualem, Y. A conceptual model of hysteresis. Water Resources Research, 10: 514-520, 1974.
- [11] Muraleetharan K.K., Liu C., Wei C., Kibbey T.C.G. and Chen L. An elastoplastic framework for coupling hydraulic and mechanical behavior of unsaturated soils. International Journal of Plasticity, 25: 473-90, 2009.
- [12] Pham H.Q. and Fredlund D.G., A study of hysteresis models for soil-water characteristic curves: Can. Geotech. J. 42: 1548-1568, 2005.
- [13] Van Eekelen, H.A.M., Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 4: 89-101, 1980.
- [14] Van Genuchten, M.T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal, 44: 892-898, 1980.
- [15] Vanapalli, S.K., Pufahl, D.E. and Fredlund, D.G. The influence of soil structure and stress history on the soil-water characteristic of compacted till. Géotechnique, 49(2):143-159, 1999.