

Un algorithme de couplage conservatif pour l'interaction fluide-structure dans le cas compressible

L. MONASSE ^{a,b,c}, V. DARU ^{b,d}, C. MARIOTTI ^c, SERGE PIPERNO ^e, C. TENAUD ^b

a. Université Paris-Est, CERMICS, 77455 Marne-la-Vallée, France

b. LIMSI - CNRS, 91403 Orsay, France

c. CEA DIF, F-91297 Arpajon, France

d. Arts et Métiers Paris Tech, DynFluid Lab., 75013 Paris, France

e. Ecole des Ponts ParisTech, 77455 Marne-la-Vallée, France

Résumé :

Nous proposons une méthode explicite de couplage générale entre une méthode Volumes Finis pour les écoulements compressibles et un solide rigide. La stratégie de couplage est fondée sur le principe des méthodes Embedded Boundaries [14]. Les flux sont calculés partout sur la grille cartésienne, et sont modifiés à la paroi solide pour imposer la conservation de masse fluide. Le couplage entre le fluide et le solide est conçu de façon à assurer un équilibre en quantité de mouvement et en énergie. Nous prouvons la conservation numérique exacte de plusieurs écoulements uniformes simples. Nous présentons le cas du soulèvement d'un cylindre par une onde de choc, que nous comparons avec des résultats existants.

Abstract :

We propose a general explicit coupling method between a Finite Volume method for compressible flow and a rigid body. The coupling strategy is based on the idea of Embedded Boundary methods [14]. The fluxes are computed everywhere in the Cartesian grid, and are modified at the solid boundaries to enforce fluid mass conservation. The coupling between the fluid and the solid is designed to ensure a balance in momentum and energy. We prove the exact numerical conservation of several simple uniform flows. An illustrative example of the liftoff of a cylinder by a shock wave is presented and compared with existing results.

Mots clefs : Volumes Finis ; Interaction Fluide-structure ; Frontières immergées

1 Introduction

Deux principaux types de méthodes ont été développés pour les problèmes d'interaction fluide-structure. La méthode Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) a été développée à la fin des années 1970 [5]. Cependant, en tant que méthode à maillage adapté à la paroi, la méthode ALE nécessite un remaillage du domaine fluide quand le solide subit de grandes déformations ou de la rupture, ce qui peut être coûteux en temps de calcul. Afin d'éviter d'avoir un maillage adapté à la paroi et de remailler, Peskin [3] a proposé la méthode Frontières Immergées (Immersed Boundary) pour le couplage d'écoulements de fluides biologiques incompressibles avec des parois élastiques mobiles. Des méthodes de pénalisation ont été appliquées à l'interaction fluide-structure compressible [1], mais la condition raide sur le pas de temps quand le paramètre de pénalisation augmente n'est pas satisfaisante. Les méthodes de forçage direct, qui modifient les valeurs des cellules fluides dans un voisinage de la paroi solide, ont été largement utilisées [11, 7, 13], mais n'assurent cependant pas la conservation de quantités physiques à l'interface.

Des méthodes conservatives pour les Volumes Finis avec géométries complexes ont été développées, telles que la méthode Embedded Boundary [14]. Plusieurs procédures ont été proposées afin d'éviter la

restriction de la condition de stabilité due aux cellules coupées ayant un faible volume. Nous adoptons ici la solution consistant à fusionner les petites cellules coupées avec leurs voisins stables, solution qui a été appliquée avec succès pour l'interaction fluide-structure compressible [9].

Dans ce qui suit, les équations pour la modification des flux restent similaires à celles de [9]. La principale différence réside dans l'approche du couplage. À plus long terme, notre but est de coupler l'écoulement compressible avec une méthode Éléments Discrets pour le solide. Puisque la méthode Éléments Discrets est coûteuse en temps de calcul, nous utilisons une méthode de couplage explicite. Dans ce papier, nous nous restreignons aux solides rigides, mais la méthode s'applique également aux solides déformables. L'algorithme est réalisé sous forme partitionnée : la pression du fluide fait bouger le solide, et la nouvelle position du solide induit une modification des flux fluides à la nouvelle paroi. Le solveur fluide est fondé sur le schéma d'ordre élevé avec splitting temporel développé dans [4]. Cependant, l'analyse théorique de l'algorithme de couplage ne dépend pas du schéma utilisé.

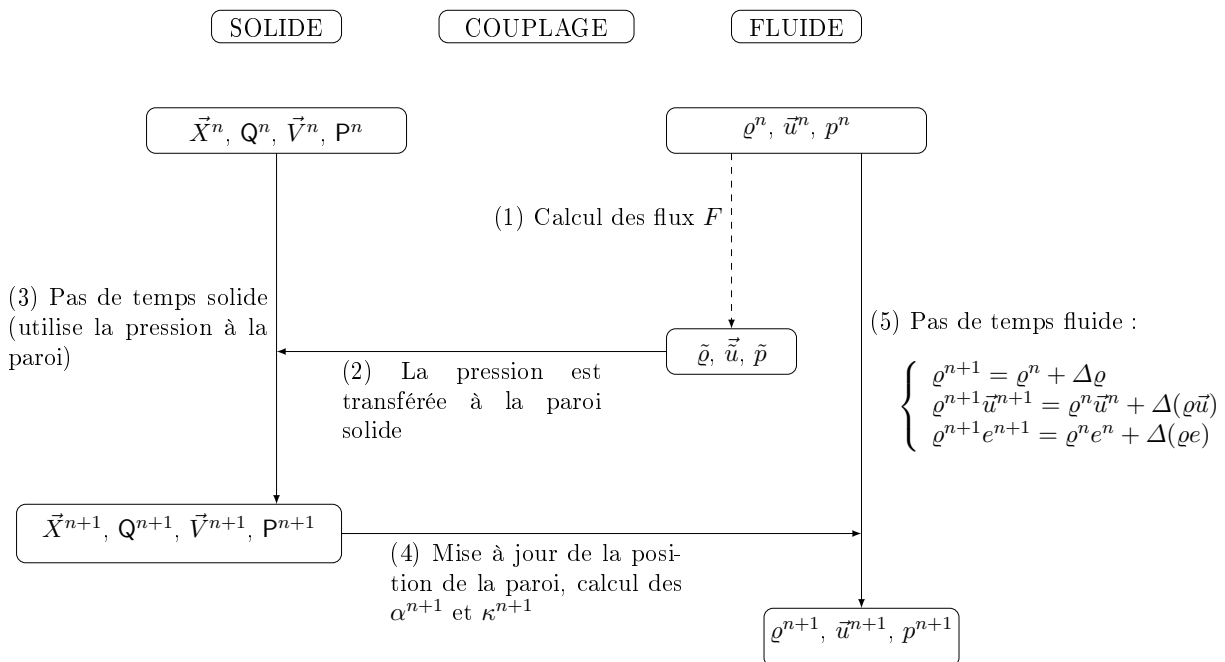
2 Description de la méthode

La position du solide dans le domaine fluide est prise en compte en utilisant la méthode Embedded Boundary [14, 8, 10, 6, 9]. Au temps t , le solide occupe une fraction volumique α_i de la cellule i , et toutes les variables sont supposées uniformes dans la cellule. Les quantités conservatives contenues dans la cellule sont donc égales au produit de leur valeur au centre de la cellule par le volume de la cellule et la fraction volumique de fluide $1 - \alpha_i$. De la même façon, les flux calculés sont supposés constants sur les faces des cellules. Si l'on note κ_{ij} la fraction surfacique de la face entre les cellules i et j occupée par le solide, nous définissons le flux effectif entre i et j comme le produit du flux calculé par la surface de la face et la fraction surfacique de fluide $1 - \kappa_{ij}$. Des flux additionnels sont dus à la présence de la paroi solide, et sont calculés de façon à obtenir la conservation exacte de la masse fluide et de la quantité de mouvement et d'énergie totales du système.

Nous décrivons maintenant l'algorithme que nous avons développé, qui préserve les propriétés de conservation exacte de la méthode Volumes Finis combinée à la méthode Embedded Boundary. Au début d'un pas de temps, au temps $n\Delta t$, les quantités connues sont :

- La position du centre de masse de la particule solide \vec{X}^n et la matrice de rotation \mathbf{Q}^n
- La vitesse du centre de masse de la particule solide \vec{V}^n et la matrice de quantité de mouvement angulaire \mathbf{P}^n
- L'état fluide : sa densité ϱ^n , vitesse \vec{u}^n et pression p^n .

L'algorithme général s'écrit comme suit :



Les pressions \bar{p}_x et \bar{p}_y transférées à la paroi solide sont choisies comme étant les moyennes temporelles des pressions de référence utilisées au cours des étapes successives du calcul de flux (1) dans les directions x et y (dans notre cas, en raison de la méthode de splitting ; ces étapes pourraient également être les étapes d'une méthode Runge-Kutta). Le solide est avancé dans l'étape (3) à l'aide du classique schéma de Verlet du second ordre pour la translation et d'un schéma RATTLE du second ordre pour la rotation. Les détails peuvent être trouvés dans [12]. Le corps rigide solide est supposé avoir une forme polygonale quelconque, et le calcul des intersections dans l'étape (4) est direct.

Notons g , d , b et h les faces à gauche, à droite, en bas et en haut de la cellule \mathcal{C} , respectivement. Suivant [9], le calcul des cellules coupées dans l'étape (5) s'écrit comme suit dans le cas 2D :

– Pour chaque paroi solide \mathcal{F} , calculer la quantité $\Delta w_{\mathcal{F}}^n$ balayée par la paroi \mathcal{F} , telle que :

$$\sum_{\mathcal{F}} \Delta w_{\mathcal{F}}^n = \sum_{\mathcal{C}} (\alpha_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{C}}^n) w_{\mathcal{C}}^n \quad (1)$$

où w désigne selon les cas la densité ρ , la quantité de mouvement $\rho \vec{u}$ ou l'énergie ρe . En pratique, nous calculons $\Delta w_{\mathcal{F}}^n$ comme l'intégrale de w^n dans le quadrangle défini par les positions de \mathcal{F} aux temps $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$.

– Calculer les flux numériques $F_{\mathcal{F}}$ à la paroi solide en utilisant \bar{p}_x et \bar{p}_y stockées dans la paroi \mathcal{F} . Les flux sont donnés par :

– Si $w = \rho$, $F_{\mathcal{F}} = 0$

– Si $w = \rho u$, $F_{\mathcal{F}} = \frac{1}{S_{\mathcal{F}}} \int_{\mathcal{F}} \bar{p}_x n_{\mathcal{F}}^x$

– Si $w = \rho v$, $F_{\mathcal{F}} = \frac{1}{S_{\mathcal{F}}} \int_{\mathcal{F}} \bar{p}_y n_{\mathcal{F}}^y$

– Si $w = \rho e$, $F_{\mathcal{F}} = \frac{1}{S_{\mathcal{F}}} \vec{V}_{\mathcal{F}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} \bar{p}_x n_{\mathcal{F}}^x \\ \bar{p}_y n_{\mathcal{F}}^y \end{pmatrix}$

– Calculer $\Delta w_{\mathcal{C}}$ pour chaque cellule \mathcal{C} :

$$(1 - \alpha_{\mathcal{C}}^{n+1}) \Delta w_{\mathcal{C}} = \Delta t \left(\frac{1 - \kappa_{\mathcal{C}g}^{n+1}}{\Delta x} F_{\mathcal{C}g} - \frac{1 - \kappa_{\mathcal{C}d}^{n+1}}{\Delta x} F_{\mathcal{C}d} + \frac{1 - \kappa_{\mathcal{C}b}^{n+1}}{\Delta y} F_{\mathcal{C}b} - \frac{1 - \kappa_{\mathcal{C}h}^{n+1}}{\Delta y} F_{\mathcal{C}h} \right) + \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \frac{\Delta t S_{\mathcal{F}}}{\Delta x \Delta y} F_{\mathcal{F}} + \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \Delta w_{\mathcal{F}}^n \quad (2)$$

– Mettre à jour la valeur de $w_{\mathcal{C}}$ dans chaque cellule :

$$w_{\mathcal{C}}^{n+1} = w_{\mathcal{C}}^n + \Delta w_{\mathcal{C}} \quad (3)$$

Afin d'assurer la stabilité de la méthode pour les petites cellules coupées, nous suivons la procédure décrite dans [9], avec des changements mineurs dus à l'impossibilité de définir un vecteur normal dans une cellule occupée par deux parois. Nous définissons les petites cellules par $\alpha_{\mathcal{C}} > 0.5$. Si on mélange la cellule \mathcal{C} avec une cellule-cible \mathcal{C}_t , de façon à ce que la valeur finale w des deux cellules soit égale, nous devons échanger les quantités $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}_t} = \frac{\alpha_{\mathcal{C}_t}}{\alpha_{\mathcal{C}} + \alpha_{\mathcal{C}_t}} (w_{\mathcal{C}_t} - w_{\mathcal{C}})$ et $M_{\mathcal{C}_t\mathcal{C}} = \frac{\alpha_{\mathcal{C}}}{\alpha_{\mathcal{C}} + \alpha_{\mathcal{C}_t}} (w_{\mathcal{C}} - w_{\mathcal{C}_t})$, et il est facile de vérifier que $w_{\mathcal{C}} + M_{\mathcal{C}\mathcal{C}_t} = w_{\mathcal{C}_t} + M_{\mathcal{C}_t\mathcal{C}}$. Dans le cas 2D, il faut faire un choix sur la cellule cible \mathcal{C}_t . Nous prenons pour \mathcal{C}_t la cellule entièrement fluide ($\alpha_{\mathcal{C}_t} = 0$) la plus proche de la cellule \mathcal{C} , telle que le chemin entre les deux cellules ne traverse pas une paroi solide. Une routine récursive trouve une telle cellule au bout de quelques itérations.

Notons que la procédure de mélange est entièrement conservative, et assure que le volume significatif d'une cellule est compatible avec la condition CFL habituelle utilisant la taille standard des cellules.

3 Résultats théoriques

Les résultats suivants ont été prouvés de façon théorique :

• **Conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :**

S'il n'y a pas d'écoulement depuis ou vers l'extérieur du domaine fluide, la conservation de la masse

du fluide est assurée. Pour des conditions aux limites périodiques, la quantité de mouvement est exactement équilibrée entre le solide et le fluide pour chaque pas de temps. Pour des conditions aux limites périodiques ou réfléchissantes, l'énergie reçue par le fluide du solide est exactement compensée par le travail des forces de pression fluide sur le solide pendant le pas de temps.

• **Invariance galiléenne :**

Considérons un solide rigide de forme arbitraire se déplaçant à vitesse constante et sans rotation, plongé dans un fluide uniforme s'écoulant à la même vitesse. Le mouvement uniforme du fluide et du solide est préservé par l'algorithme de couplage.

• **Glissement parfait le long d'une paroi droite :**

Un écoulement uniforme parallèle à un demi-plan rigide est conservé par l'algorithme de couplage.

Le dernier résultat montre qu'aucune couche limite numérique et aucune rugosité de paroi artificielle n'apparaissent à la paroi solide, même quand celle-ci n'est pas alignée avec le maillage cartésien.

4 Résultats numériques

Nous présentons tout d'abord un cas-test avec frontière mobile qui a d'abord été proposé dans [8], et a également été traité dans [9]. Un cylindre rigide de densité $7,6 \text{ kg.m}^{-3}$, reposant initialement sur le mur inférieur d'un canal bidimensionnel rempli d'air aux conditions standard, est poussé et soulevé par un onde de choc Mach 3. Les résultats obtenus sur une grille 1600×320 sont présentés sur la figure 1. Nous observons un bon accord avec les résultats présentés dans [2] et [9]. On peut noter de petites différences dans la position des ondes de choc, mais aucune solution de référence n'existe pour ce cas. Nous observons également un fort vortex sous le cylindre qui est plus faible dans [9]. Ce vortex semble être associé à une instabilité de Kelvin-Helmholtz de la discontinuité de contact présente sous le cylindre.

De plus, nous observons une convergence rapide de la méthode vers la solution, en particulier sur la position du centre de masse du cylindre. La position que nous obtenons sur une grille 1600×320 est comparable à celle obtenue sur une grille 1600×320 dans [9]. En augmentant la résolution sur des grilles 400×80 , 800×160 et 1600×320 , [9] donne les positions finales $(0.659, 0.132)$, $(0.649, 0.145)$ et $(0.641, 0.147)$; sur les mêmes grilles, nous obtenons $(0.64375, 0.1463)$, $(0.64278, 0.1471)$ et $(0.64253, 0.1471)$.

Nous proposons un nouveau cas d'interaction fluide-structure comme démonstration de la robustesse de notre approche, ainsi qu'un premier pas vers la fracture et les simulations d'impacts. Le cas des portes battantes met en jeu des parois solides se séparant ou se fermant, avec des cellules contenant plusieurs parois mobiles. L'algorithme est capable de traiter de telles difficultés. Deux porte ferment initialement un canal, et sont impactées par un choc Mach 3. Le canal est constitué de deux murs rigides fixes, de 2m de long et éloignés de 0,5m. Chaque porte est un rectangle de 0,2m de long et 0,05m de large, arrondi aux deux extrémités par un demi-cylindre de diamètre 0,05m. Les portes sont fixées aux centres des demi-cercles. Ils peuvent tourner librement autour de ces points. La densité du solide est 10 fois plus faible que celle du fluide. Nous montrons le champ de densité obtenu sur une grille 1600×400 sur la figure 2, aux temps 0,125s, 0,25s, 0,375s et 0,5s. Après l'impact du choc sur les portes, il se réfléchit vers la gauche et les portes s'ouvrent en raison de la forte augmentation de pression. L'ouverture des portes produit un jet précédé par une onde de choc se propageant vers la droite. Puis de complexes interactions d'ondes se produisent en raison du mouvement des portes et de l'interaction avec les murs. Des instabilités de Kelvin-Helmholtz au niveau des discontinuités de contact peuvent être observées à $t = 0,5s$. Nous pouvons noter que la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe du canal est remarquablement bien préservée par le schéma de couplage.

Comme les portes restent tangentes aux murs du canal pendant leur rotation, le fluide ne peut pas passer entre le mur et la porte au niveau du battant. Quand les portes approchent du mur à leur rotation maximale, le fluide est comprimé, et finalement les repousse. Nous observons ce phénomène par deux fois, la distance entre le mur et la porte étant inférieur à une cellule fluide sur une grande portion de la paroi. La simulation de ce cas avec une méthode ALE nécessiterait de nombreux remaillages au cours de la simulation, accroissant le temps de calcul global.

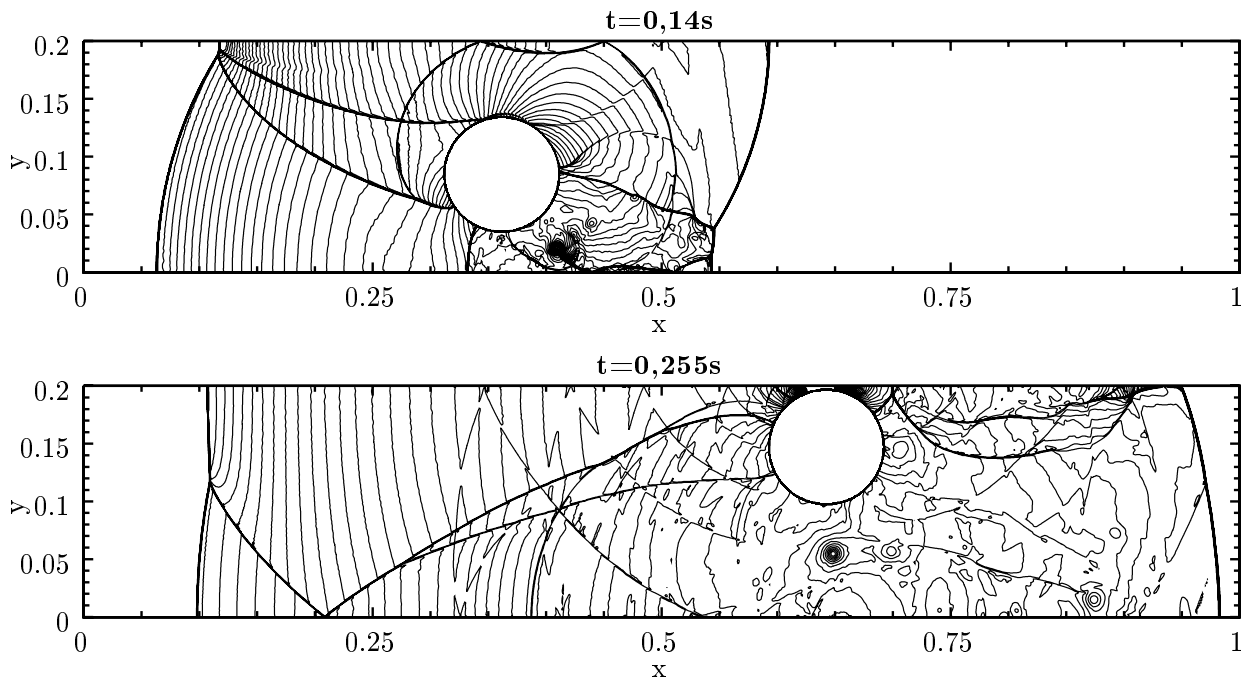


FIGURE 1 – 60 contours de pression fluide également espacés entre 0 et 28 à différents temps, $\Delta x = \Delta y = 6,25 \cdot 10^{-4}$

Références

- [1] N. Aquelet, M. Souli, and L. Olovsson. Euler-lagrange coupling with damping effects : Application to slamming problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(1-3) :110–132, 2006.
- [2] R. Arienti, P. Hung, E. Morano, and J.E. Shepherd. A level set approach to Eulerian-Lagrangian coupling. *J. Comput. Phys.*, 185 :213–251, 2003.
- [3] Peskin C.S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.*, 25 :220–252, 1977.
- [4] V. Daru and C. Tenaud. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *J. Comput. Phys.*, 193(2) :563–594, 2004.
- [5] J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux. An arbitrary Lagrangian Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 33 :689–723, 1982.
- [6] Z. Dragojlovic, F. Najmabadi, and M. Day. An embedded boundary method for viscous, conducting compressible flow. *J. Comput. Phys.*, 216(1) :37–51, 2006.
- [7] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *J. Comput. Phys.*, 161(1) :35–60, 2000.
- [8] J. Falcovitz, G. Alfandary, and G. Hanoch. A two-dimensional conservation laws scheme for compressible flows with moving boundaries. *J. Comput. Phys.*, 138 :83–102, 1997.
- [9] X. Y. Hu, B. C. Khoo, N. A. Adams, and F. L. Huang. A conservative interface method for compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 219(2) :553–578, 2006.
- [10] G. H. Miller and P. Colella. A conservative three-dimensional Eulerian method for coupled solid-fluid shock capturing. *J. Comput. Phys.*, 183(1) :26–82, 2002.
- [11] J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary/b-spline methods for simulation of flow in complex geometries. CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., 1997.

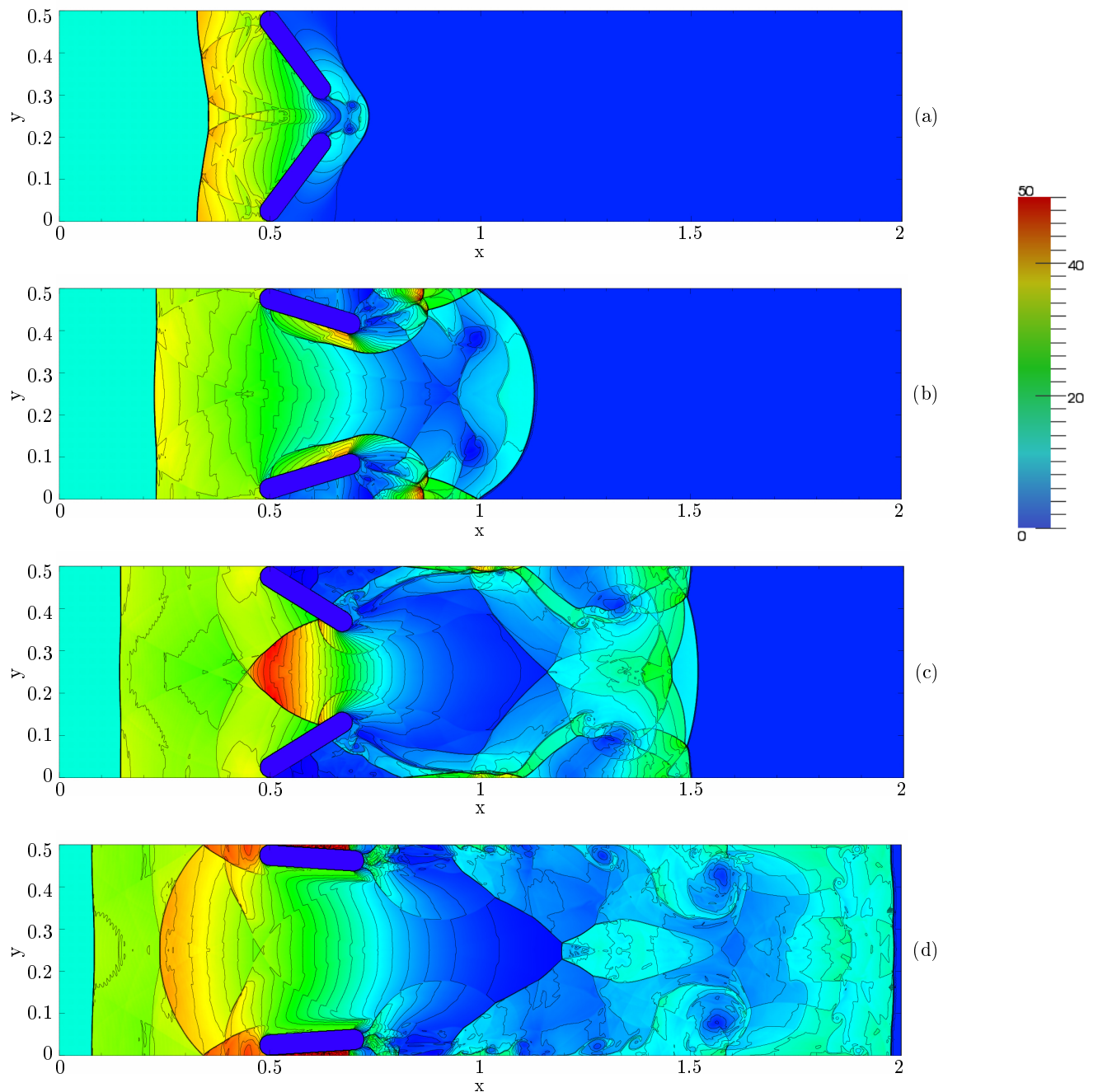


FIGURE 2 – Contours de densité aux temps $t = 0, 125s$ (a), $t = 0, 25s$ (b), $t = 0, 375s$ (c) et $t = 0, 5s$ (d)

- [12] L. Monasse and C. Mariotti. An energy-preserving Discrete Element Method for elastodynamics. submitted.
- [13] P. De Palma, M. D. de Tullio, G. Pascazio, and M. Napolitano. An immersed-boundary method for compressible viscous flows. *Comp. Fluid*, 35(7) :693–702, 2006.
- [14] R.B. Pember, J.B. Bell, P. Colella, W.Y. Crutchfield, and M.L. Welcome. An adaptive Cartesian grid method for unsteady compressible flow in irregular regions. *J. Comput. Phys.*, 120 :278–304, 1995.