

La transition vers la turbulence de la couche d'Ekman stratifiée

NADIA MKHININI¹, THOMAS DUBOS¹, PHILIPPE DROBINSKI¹

¹Laboratoire de Météorologie Dynamique/IPSL, École Polytechnique, France

Résumé :

L'écoulement d'Ekman se forme au voisinage d'une paroi dans un fluide tournant. Dans la couche d'Ekman stratifiée, la transition vers la turbulence est contrôlée par les nombres de Reynolds Re , de Richardson Ri et de Prandtl Pr . Pour des Ri inférieurs au Ri critique, des tourbillons se forment par saturation de l'instabilité linéaire primaire. Nous montrons que lorsque $Pr > 1$ des tourbillons d'amplitude finie existent lorsque Ri atteint sa valeur critique et au-delà. Nous étudions l'instabilité secondaire de ces tourbillons. La stratification modifie le vecteur d'onde le plus instable, qui passe de $k_2 \sim 2 - 3$ pour de faibles stratifications à $k_2 \sim 0.2 - 0.4$ pour des fortes stratifications. De plus lorsque $Pr = 1$, le taux de croissance de l'instabilité secondaire diminue lorsque la stratification augmente, alors que lorsque $Pr > 1$, ceux-ci augmentent.

Abstract :

The Ekman flow is an exact solution of the Boussinesq equations occurring near boundaries in rotating fluids. In the stratified Ekman layer, the transition to turbulence is controlled by Reynolds Re , Richardson Ri and Prandtl Pr number. For Ri below the critical Ri number, eddies are formed by saturation of the primary linear instability. We show that when $Pr > 1$ vortices with finite amplitude still exist when Ri reaches its critical value and beyond. We study the secondary instability of these vortices. Stratification modifies the most unstable wave vector, which was $k_2 \sim 2 - 3$ for low stratifications and become $k_2 \sim 0.2 - 0.4$ for strong stratification. Furthermore, when $Pr = 1$, the growth rate of the secondary instability decreases as stratification increases, while when $Pr > 1$, those growth rate increase.

1 Introduction

La couche limite atmosphérique (CLA) est la partie de l'atmosphère qui est directement soumise à la turbulence. Bien que la stratification tende à éliminer les mouvements verticaux et turbulents, on peut observer de la turbulence dans les couches limites atmosphériques stratifiées. Pour des études idéalisées de la CLA, la spirale d'Ekman est utile en tant qu'écoulement prototype. C'est également un écoulement générique se formant au voisinage des parois dans un fluide en rotation. Lilly (1966) a montré qu'une couche d'Ekman non stratifiée est sensible à une instabilité de cisaillement. Le cas stratifié a été étudié par Brown (1972).

Nous cherchons ici à déterminer l'effet de la stratification sur la transition vers la turbulence. Nous étudions en particulier l'effet du nombre de Prandtl sur les rouleaux de Kelvin-Helmholtz issus de la saturation non-linéaire l'instabilité primaire d'une part (section 2) et sur l'instabilité linéaire secondaire d'autre part (section 3). Il en ressort que la bifurcation au nombre de Prandtl critique est soit sur-critique, soit sous-critique selon que $Pr = 1$ ou $Pr > 1$, avec des conséquences sur l'instabilité secondaire. Ces conclusions sont présentées en section 4.

2 Instabilité primaire

2.1 Équations et paramètres de contrôle

Nous considérons comme écoulement de base l'écoulement d'Ekman (Fig.1), solution stationnaire exacte des équations de Boussinesq définie par :

$$\hat{u}_E = G \left[1 - e^{-\hat{z}/\delta_E} \cos(\hat{z}/\delta_E) \right] \quad (1)$$

$$\hat{v}_E = G \left[1 - e^{-\hat{z}/\delta_E} \sin(\hat{z}/\delta_E) \right] \quad (2)$$

$$\hat{b}_E = N^2 \hat{z} \quad (3)$$

où \hat{z} est la coordonnée orthogonale à la paroi, $\hat{\mathbf{U}}$ est l'écoulement total, \hat{b} est la flottabilité, N est la pulsation de Brunt-Vaisala, G est le module du vent géostrophique et $\delta_E = \sqrt{\frac{2\nu}{f}}$ est l'épaisseur de la couche d'Ekman, avec ν la viscosité et f le paramètre de Coriolis. Dans ces équations, le symbole « $\hat{}$ » indique que ces variables ont des dimensions. Nous adimensionnons le problème en définissant les variables sans dimension $\mathbf{U} = (u, v, w)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, t, p, b telles que $\hat{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{x}$ soit la position dans l'espace, $\hat{t} = \frac{\delta}{G} t$ soit le temps, $\hat{P} = \rho G^2 p$ soit la pression, $\hat{\mathbf{U}} = G \mathbf{U}$ et $\hat{b} = \delta b + GNb$. En particulier $b = 0$ correspond au profil linéaire de flottabilité \hat{b}_E . Les équations de Boussinesq s'écrivent alors :

$$\text{div} \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\omega + \frac{2}{Re} \mathbf{e}_z \right) \times \mathbf{U} + \nabla \left(P + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} + \sqrt{Ri} b \mathbf{e}_z \quad (5)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla b + \sqrt{Pr} w = \frac{1}{Re \cdot Pr} \Delta b \quad (6)$$

où $Ri = \frac{\delta^2 N^2}{G^2}$ est le nombre de Richardson, $Re = \frac{G \delta}{\nu}$ est le nombre de Reynolds, $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ est le nombre de Prandtl avec κ la diffusivité thermique. Ce système possède une énergie qui se décompose en énergie cinétique $E_K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ et énergie potentielle $E_P = \frac{1}{2}b^2$.

Dans la suite les calculs numériques se font sur la base d'une méthode de Galerkin utilisant des B-splines cubiques dans la direction z et des modes de Fourier dans la direction x . Cette discrétisation spatiale est d'ordre 4.

2.2 Instabilité linéaire primaire

Nous rappelons ici les grandes caractéristiques de l'instabilité linéaire primaire (Lilly, 1966; Brown, 1972). La théorie de l'instabilité linéaire primaire considère l'évolution de perturbations infinitésimales de l'écoulement d'Ekman. Ces perturbations peuvent être représentées comme une superposition de modes de la forme $\mathbf{U}_{2D}(x, y, z, t) = e^{\sigma_1 t} \cdot e^{i \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \cdot \mathbf{U}_{2D_{\text{propre}}}(z) + cc$ où cc est le complexe conjugué et $\mathbf{U}_{2D_{\text{propre}}}(z)$ est un profil inconnu qui est déterminé comme une solution d'un problème aux valeurs propres (Lilly, 1966). $\sigma_1(Re, Ri, Pr, \mathbf{k}_1)$ représente le taux de croissance où $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y)$ est le vecteur d'onde.

La figure (Fig. 1) représente σ_1 en fonction de Ri pour des nombres de Reynolds et de Prandtl donnés. On voit que le nombre de Prandtl a une faible influence sur le taux de croissance σ_1 de l'instabilité linéaire primaire. Le nombre de Richardson critique $Ri_c(Re, Pr)$ est tel que pour $Ri > Ri_c$ l'écoulement d'Ekman stratifié est linéairement stable ($\sigma_1 < 0$) et pour $Ri < Ri_c$ l'écoulement est instable ($\sigma_1 > 0$).

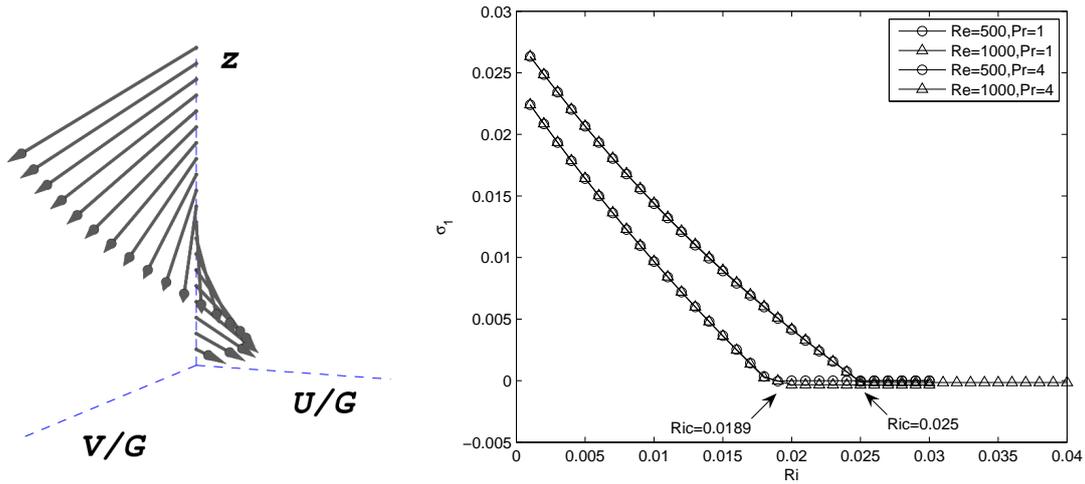


FIG. 1 – Gauche : Spiral d’Ekman ; Droite : Variation de σ_1 en fonction du nombre de Richardson pour un couple (Re, Pr) donné.

Dans la suite nous nous plaçons dans le repère (X, Y) tel que X soit parallèle au vecteur d’onde $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y)$ et Y l’axe orthogonal à X . Pour simplifier nous reprendrons la notation (x, y) à la place de (X, Y) (Dubos et al., 2008).

2.3 Saturation non linéaire

Après cette phase de croissance linéaire, l’écoulement se met sous forme de rouleaux se déplaçant avec une vitesse de phase c constante sans subir d’évolution supplémentaire (Dubos et al., 2008). Il s’agit de solutions stationnaires exactes des équations (4), de la forme $\mathbf{U}_E(z) + \mathbf{U}_{2D}(x - ct, z)$. Ces rouleaux sont analogues à des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. $\mathbf{U}_{2D}(x, z)$ n’est pas obtenu par intégration dans le temps : il est solution d’un problème non-linéaire que nous résolvons par une méthode de Newton-Krylov (Dubos et al., 2008). La figure représente ce tourbillon de type Kelvin-Helmholtz pour $(Re, Pr, Ri) = (1000, 1, 0.015)$. La figure 2 (Fig. 3) représente la variation de l’énergie des rouleaux en fonction du nombre de Richardson pour 4 couples (Re, Pr) . Outre l’énergie totale, nous représentons l’énergie potentielle et l’énergie cinétique.

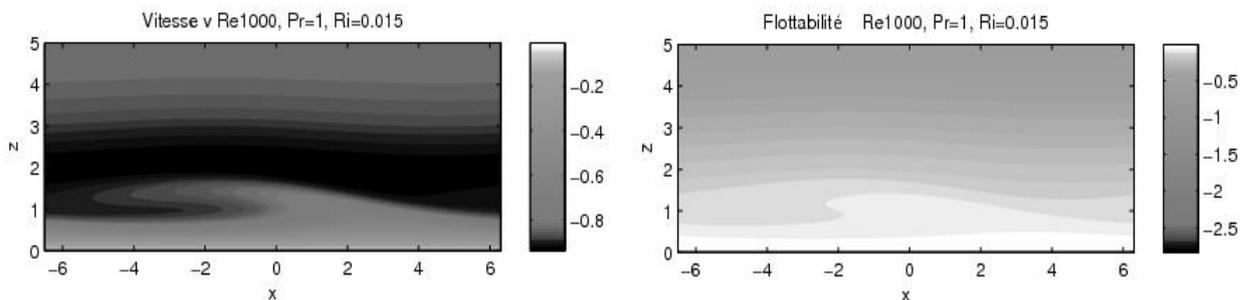


FIG. 2 – Rouleaux saturés se déplaçant avec une vitesse de phase c ; vitesse v à gauche et flottabilité à droite pour une coupe dans le plan (x, z) et pour les paramètres $(Re, Pr, Ri) = (1000, 1, 0.015)$.

Pour $Pr = 1$ et de faibles stratifications, l’énergie cinétique décroît quand la stratification augmente alors que l’énergie potentielle croît légèrement. Cette dernière atteint un maximum aux alentours de $Ri = 0.0075$ pour $Re = 500$ et aux alentours de $Ri = 0.0125$ pour $Re = 1000$. Au delà, elle finit par décroître jusqu’à s’annuler pour des nombres de Richardson proches du Richardson critique. Nous trouvons que le nombre de Ri_c ne dépend pas de la variation du Re mais plutôt de la variation du

Pr. $Ri_c = 0.0189$ pour les simulations à $Pr = 1$ et $Ri_c = 0.025$ pour $Pr = 4$. La légère croissance de l'énergie potentielle aux faibles valeurs de Ri peut s'expliquer par le fait que les rouleaux restent assez robustes et arrivent à extraire de l'énergie potentielle de l'environnement stratifié. Lorsque la stratification augmente, les rouleaux s'affaiblissent et leur énergie (cinétique et potentielle) s'annule. L'énergie totale suit le même comportement de croissance puis décroissance en fonction de Ri que l'énergie potentielle, ce qui montre que le gain d'énergie potentielle dû à la stratification est plus grand que la perte d'énergie cinétique.

En revanche, pour $Pr = 4$, l'énergie cinétique turbulente ne diminue pas tout de suite après l'augmentation de la stratification. De plus elle reste même finie lorsque Ri atteint Ri_c . L'énergie totale ne s'annule donc pas pour $Ri = Ri_c$. Ceci montre que la transition en $Ri = Ri_c$ est une bifurcation sous-critique pour $Pr = 4$, alors qu'elle est sur-critique pour $Pr = 1$. Nous pouvons alors déterminer des rouleaux stationnaire au-delà du Ri_c . Sur toute la gamme de Ri où les rouleaux existent, on observe que leur énergie potentielle domine largement leur énergie cinétique.

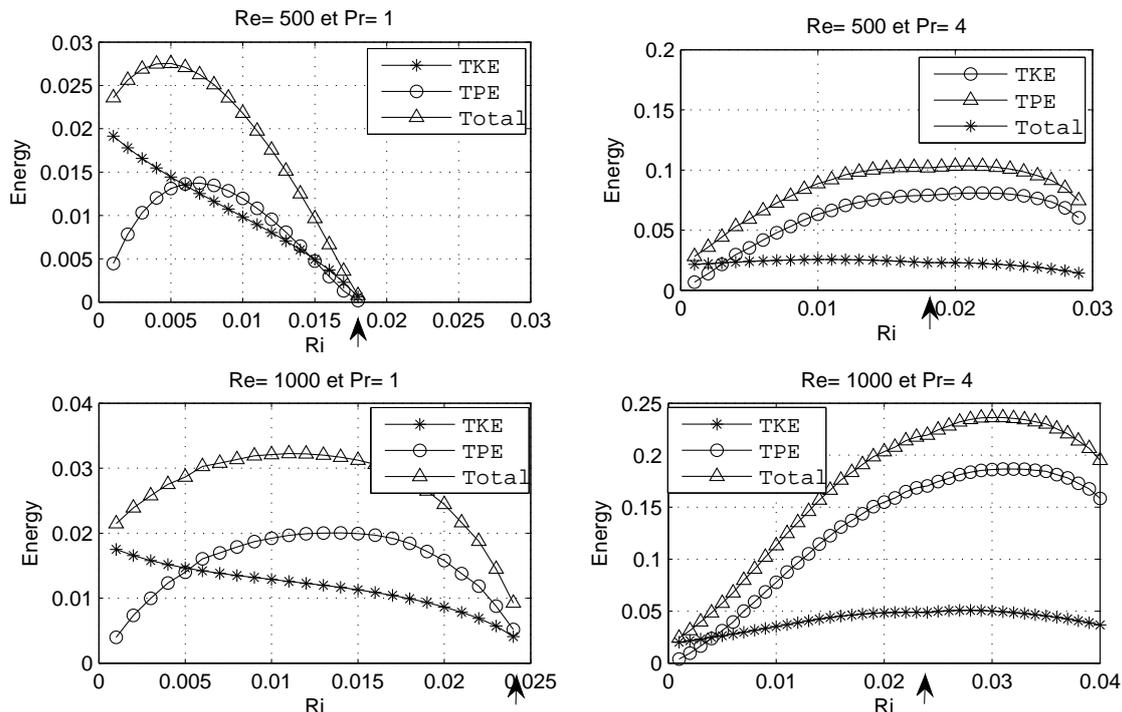


FIG. 3 – Variation de l'énergie des rouleaux se formant par saturation de l'instabilité linéaire primaire en fonction de Ri pour différents couples (Re, Pr) . Les flèches pointent sur la valeur Ri_c .

3 Instabilité secondaire

Dans le référentiel qui se déplace avec leur vitesse de phase c , les rouleaux (caractérisés dans la section 2.3) sont exactement stationnaires et homogènes dans la direction y . On peut alors étudier leur stabilité linéaire en considérant l'évolution de perturbations infinitésimales, qui peuvent s'écrire comme superposition de modes de la forme $\mathbf{U}_{3D}(x, y, z, t) = e^{\sigma_2 t} \cdot e^{ik_y y} \cdot \mathbf{U}_{3D_{\text{propre}}}(x - ct, z) + cc$ où k_y est le vecteur d'onde et σ_2 est le taux de croissance. Pour approximer $\mathbf{U}_{3D_{\text{propre}}}(x, z)$ la discrétisation spatiale suit la méthode de Galerkin, avec une décomposition en modes de Fourier selon x et des B-splines cubiques selon z . $\mathbf{U}_{3D_{\text{propre}}}(x, z)$ est solution d'un problème aux valeurs propres que nous résolvons par une méthode de Krylov (Dubos et al., 2008).

Les figures (Fig. 4) et (Fig. 5) représentent pour différents couple de paramètres (Re, Pr) et différentes stratifications le taux de croissance la variations de taux de croissance σ_2 en fonction du vecteur d'onde

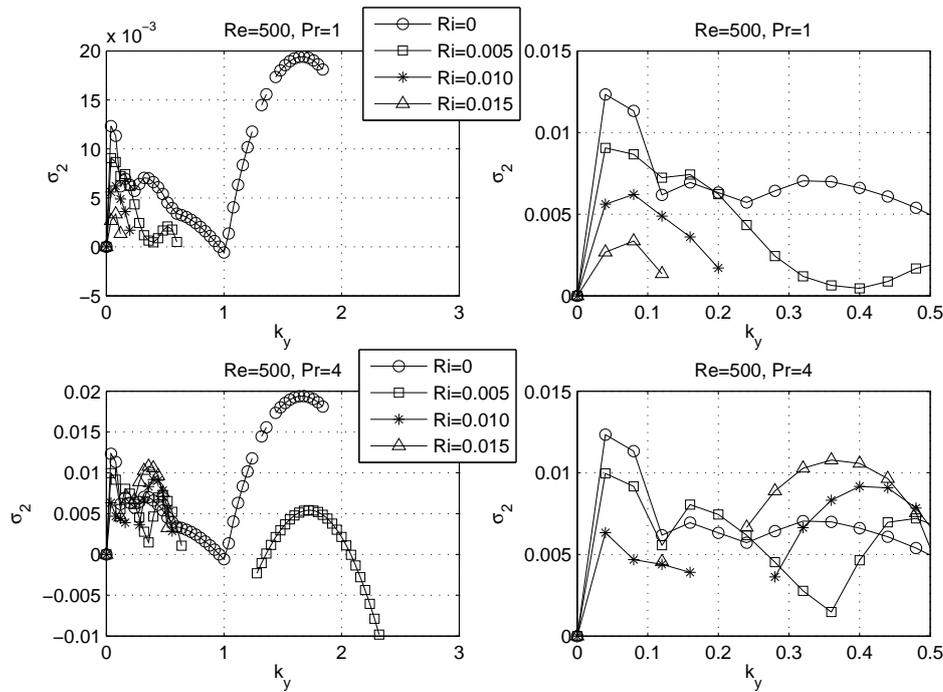


FIG. 4 – Variation de σ_2 en fonction du vecteur d'onde k_2 pour $Re = 500$ et $Pr = 1$ ou 4 (droite : zoom).

k_y . Nous retrouvons en $k_y > 1$ les modes instables identifiés par Dubos et al. (2008) dans le cas non-stratifié. Nous obtenons aussi d'autres branches moins instables pour des vecteurs d'onde k_2 compris entre 0 et 1, qui n'avaient pas été identifiées.

Pr=1 Pour $Re = 500$, la branche la plus instable du cas neutre ($k_2 = 1.68$) disparaît dès que $Ri = 0.005$. En revanche, les autres branches continuent à exister pour des nombres de Richardson plus élevés avec une diminution de taux de croissance. La branche la plus instable devient alors celle telle que $0 \leq k_y \leq 1$.

Pour $Re = 1000$, le comportement des taux de croissance reste semblable à celui de $Re = 500$ sauf que la branche la plus instable dans le cas neutre résiste à la stratification et ne devient stable qu'à partir de $Ri = 0.010$.

Pr=4 Pour $Re = 500$, la branche la plus instable du cas neutre ($k_2 = 2.65$) reste présente pour $Ri = 0.005$ mais finit par disparaître pour $Ri = 0.010$. Les autres branches ont un taux de croissance qui augmente avec la stratification. Dès que $Ri = 0.010$, c'est la branche qui a un vecteur d'onde entre 0 et 1 qui devient dominante.

Pour $Re = 1000$ la branche la plus instable a un taux de croissance qui commence par augmenter quand Ri augmente jusqu'à ce que $Ri = 0.015$. Au delà, le taux de croissance diminue. Pour les vecteurs d'onde plus petits (entre 0 et 1), le taux de croissance augmente tant que Ri augmente.

4 Conclusion

Nous avons étudié l'influence de la stratification sur l'écoulement d'Ekman stratifié. Cette influence dépend fortement du nombre de Prandtl. Lorsque $Pr = 1$ l'énergie cinétique des rouleaux de Kelvin-Helmholtz issus de la saturation de l'instabilité primaire diminue lorsque Ri augmente, conformément à l'idée que la stratification inhibe les mouvements verticaux. L'énergie cinétique des rouleaux s'annule lorsque $Ri = Ri_c$. Ce caractère de bifurcation sur-critique est analogue aux bifurcations déjà

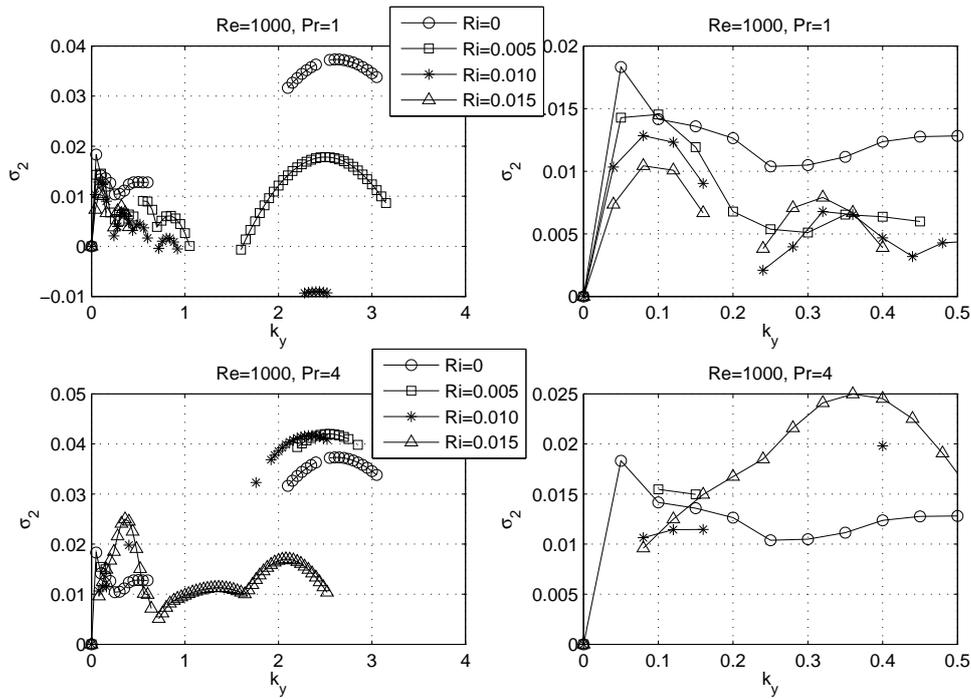


FIG. 5 – Variation de σ_2 en fonction du vecteur d'onde k_2 pour $Re = 1000$ et $Pr = 1$ ou 4 (droite : zoom).

identifiées pour la couche d'Ekman (Foster, 1996; Haeusser and Leibovich, 2003). En revanche lorsque $Pr = 4$ la bifurcation est sous-critique, ce qui n'avait pas été identifié précédemment. Nous montrons numériquement l'existence de rouleaux pour $Ri > Ri_c$.

Concernant l'instabilité linéaire secondaire, un effet important de la stratification est de modifier le vecteur d'onde le plus instable. Celui-ci passe d'une valeur $k_2 \sim 2 - 3$ pour de faibles stratifications à des valeurs $k_2 \sim 0.2 - 0.4$ pour des fortes stratifications. L'effet du nombre de Prandtl est également important : lorsque $Pr = 1$, les taux de croissance de l'instabilité secondaire diminuent lorsque la stratification augmente, ce qui est conforme à l'intuition. En revanche lorsque $Pr = 4$, certains taux de croissance augmentent avec la stratification. Cette augmentation est probablement liée au fait que l'énergie des rouleaux de Kelvin-Helmholtz reste importante pour ces nombres de Richardson, y compris au nombre de Richardson critique et au-delà. Ces résultats doivent être complétés par une étude non-linéaire de l'instabilité secondaire, en cours.

Références

- Brown, R. A. (1972). On the inflection point instability of a stratified ekman boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(5) :850–859.
- Dubos, T., Barthlott, C., and Drobinski, P. (2008). Emergence and secondary instability of ekman layer rolls. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(7) :2326–2342.
- Foster, R. C. (1996). *An analytic model for planetary boundary layer roll vortices*. PhD thesis, University of Washington.
- Haeusser, T. M. and Leibovich, S. (2003). Pattern formation in the marginally unstable Ekman layer. *JFM*, 479 :125–144.
- Lilly, D. K. (1966). On the instability of Ekman boundary flow. *J. Atmos. Sci.*, 23(481-494).