

Influence du caractère rhéofluidifiant d'un fluide non newtonien sur les caractéristiques d'un écoulement de Taylor Couette

B. Alibenyahia^a, C. Lemaitre^b, C. Nouar^c

a. Université de Blida, Algérie

b. GEMICO, ENSIC, 1 rue Grandville, BP 20451, 54001 Nancy Cedex, France

c. LEMTA, UMR 7563 (CNRS), 2 avenue de la forêt de Haye, BP 160, 54504 Vandoeuvre Cedex, France

Résumé :

Une analyse linéaire de stabilité tridimensionnelle de l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux pour un fluide rhéofluidifiant avec ou sans seuil de contrainte est effectuée. L'influence des paramètres rhéologiques et géométriques sur les conditions critiques et la structure des rouleaux de Taylor est examinée. On montre que la stratification de la viscosité retarde l'apparition des tourbillons de Taylor. Contrairement à Caton (2006), la structure la moins stable reste axisymétrique même pour de très fortes rhéofluidifications.

Abstract :

A 3D linear stability analysis of circular Couette flow is performed for a shear-thinning fluid with and without yield stress. The influence of the rheological and geometrical parameter on the critical conditions and on the shape of the Taylor vortices is studied. It is shown that the viscosity stratification delays the appearance of Taylor vortices. Unlike Caton (2006), the least stable structure remains axisymmetric, even for very strong shear-thinning conditions.

Mots clefs : écoulement de Couette ; rhéofluidifiant ; analyse de stabilité

1 Introduction

L'objectif de la présente communication est d'examiner la stabilité de l'écoulement d'un fluide purement visqueux rhéofluidifiant, entre deux cylindres coaxiaux. Un fluide rhéofluidifiant est un fluide dont la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement imposé augmente. Comparativement au cas Newtonien, l'écoulement de ce type de fluide se caractérise d'une part par une stratification radiale de la viscosité et d'autre part par une anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes lorsqu'on écrit les équations aux perturbations linéarisées autour de l'écoulement de base. Deux modèles rhéologiques sont considérés : (1) modèle de Bingham (fluide à seuil rhéofluidifiant), (2) modèle en loi puissance. Paradoxalement, peu de résultats existent dans la littérature sur la stabilité des écoulements de Couette pour des fluides purement visqueux non linéaires. Ces résultats sont parfois en désaccord comme le montre la figure 1, où on a représenté pour un fluide en loi puissance le nombre de Reynolds critique, défini par l'équation (3), en fonction de l'indice de structure. Récemment, il a été indiqué dans la littérature [1] que, pour de fortes rhéofluidifications, l'instabilité primaire serait caractérisée par des structures longitudinales. Ce résultat surprenant n'a pas été rediscuté ultérieurement. Ceci nous a conduits à effectuer une analyse de stabilité tridimensionnelle.

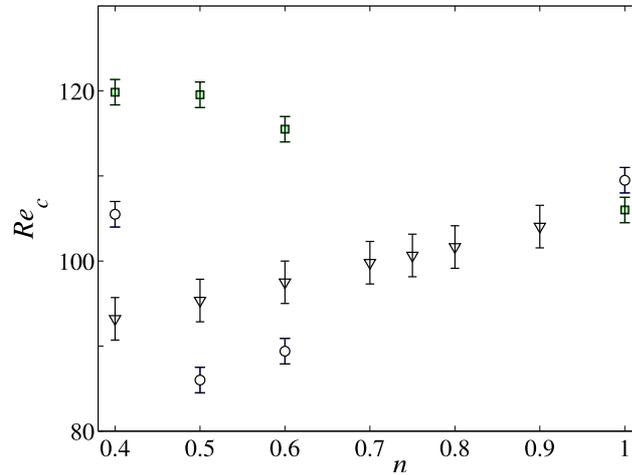


FIGURE 1 – Nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure n pour un fluide en loi puissance. Le rapport des rayons est $\eta = 0.9$, (o) Sinevic *et al.* (1986) [2], (□) Caton (2006) [1] et (∇) Jastrebski *et al.* (1992)[3]. Les barres d'erreur correspondent aux incertitudes de lecture à partir de courbes données dans la littérature.

2 Description du problème

L'écoulement d'un fluide incompressible entre deux cylindres concentriques infiniment longs est étudié. Le cylindre intérieur, de rayon \hat{R}_1 , tourne à la vitesse angulaire $\hat{\Omega}_1$ et le cylindre extérieur, de rayon \hat{R}_2 est immobile. Les équations adimensionnelles décrivant le mouvement du fluide s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Re (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2)$$

où \mathbf{U} est la vitesse, P la pression et $\boldsymbol{\tau}$ le déviateur du tenseur des contraintes. La vitesse est de la forme $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_r + V \mathbf{e}_\theta + W \mathbf{e}_z$, où \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_z sont les vecteurs unités dans les directions radiale r , orthoradiale θ et axiale z respectivement. Le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 \hat{d} / \hat{\mu}_{ref}. \quad (3)$$

Ces équations ont été adimensionnées en utilisant la largeur de l'entrefer $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$, la vitesse du cylindre intérieur $\hat{\Omega}_1 \hat{R}_1$, et une viscosité de référence $\hat{\mu}_{ref}$ que nous précisons plus loin. Dans cette étude, seul le cas de fluides rhéofluidifiants sera considéré, c'est-à-dire des fluides dont la viscosité effective $\hat{\mu}$ décroît lorsque le taux de cisaillement augmente. Pour nos calculs numériques, nous considérons deux modèles rhéologiques différents : le modèle de Bingham (rhéofluidifiant avec seuil de contrainte) et le modèle en loi de puissance. Après adimensionnement, les lois de comportement s'écrivent :

– *Modèle de Bingham* :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \left[1 + \frac{B}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right] \dot{\boldsymbol{\gamma}} \iff \boldsymbol{\tau} > B, \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \iff \boldsymbol{\tau} \leq B. \quad (5)$$

Le nombre de Bingham est défini par $B = \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}}$ où $\hat{\tau}_0$ est le seuil de contrainte, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont les seconds invariants du tenseur des taux de cisaillement $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ et du déviateur du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ respectivement. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \right)^{1/2} \quad ; \quad \boldsymbol{\tau} = \left(\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

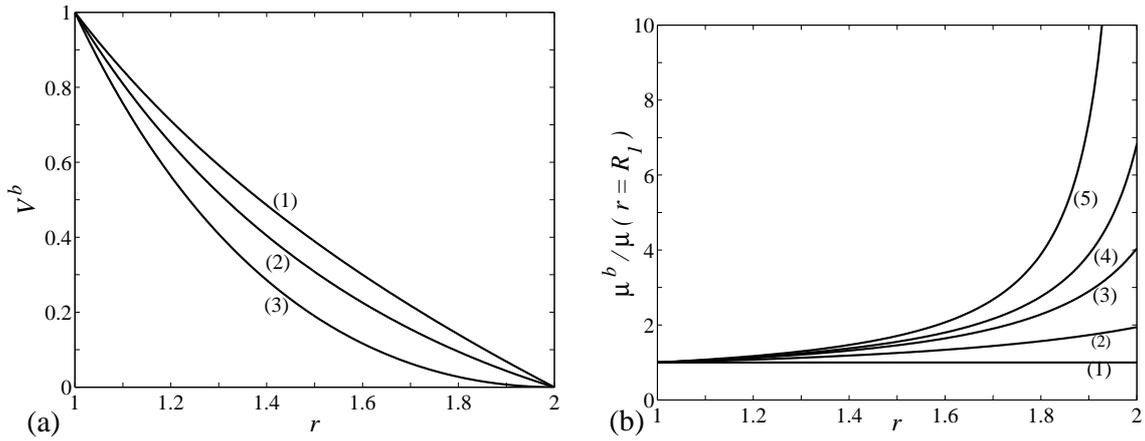


FIGURE 2 – Ecoulement de Couette d'un fluide de Bingham dans le cas où tout l'espace annulaire est cisailé. (a) Profils de vitesse azimutale pour $\eta = 0.5$: (1) $B = 0$ fluide Newtonien ; (2) $B = 0.5$; (3) $B = 1.23$. (b) Profils de viscosité pour $\eta = 0.5$: (1) $B = 0$ fluide Newtonien ; (2) $B = 0.5$; (3) $B = 0.85$; (4) $B = 1$; (5) $B = 1.23$

– *Modèle en loi de puissance* : $\tau = \mu \dot{\gamma} = \dot{\gamma}^{n-1} \dot{\gamma}$

La viscosité de référence $\hat{\mu}_{ref}$ est la viscosité plastique $\hat{\mu}_p$ pour le modèle de Bingham et la viscosité nominale $\hat{K} \left(\hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d} \right)^{n-1}$, avec \hat{K} la consistance du fluide, pour le modèle en loi de puissance.

3 Ecoulement de base

L'écoulement de base est considéré stationnaire et axisymétrique avec un champ de vitesse purement azimutal $\mathbf{U}^b = (0, V^b(r), 0)$. L'exposant b fait référence à l'état de base. Les coordonnées du tenseur des taux de cisaillement sont nulles sauf $\dot{\gamma}_{r\theta}^b(r) = \dot{\gamma}_{\theta r}^b(r)$, de sorte que les seules coordonnées non nulles du déviateur du tenseur des contraintes sont $\tau_{r\theta}^b(r) = \tau_{\theta r}^b(r) = \mu^b \dot{\gamma}_{r\theta}^b$. L'expression de l'état de base $V^b(r)$ pour un fluide en loi de puissance est donnée par Bird (1987) [4] et par Landry *et al.* [5] pour un fluide de Bingham.

Les profils de vitesse sont similaires pour les deux fluides. On peut remarquer que lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente, la valeur absolue du gradient de vitesse croît sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure, Fig. 2(a). La viscosité de base μ^b , Fig. 2(b), comme on peut s'y attendre, augmente avec la position radiale. Cette augmentation est d'autant plus forte que le fluide est rhéofluidifiant.

4 Analyse linéaire de stabilité

Une perturbation infinitésimale $(\epsilon \mathbf{u}', \epsilon p')$ est superposée à l'écoulement de base et on linéarise autour de (\mathbf{U}^b, P^b) . Les équations du mouvement linéarisées obtenues sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (7)$$

$$\partial_t \mathbf{u}' = -Re \left[\left(\mathbf{U}^b \cdot \nabla \right) \mathbf{u}' + \left(\mathbf{u}' \cdot \nabla \right) \mathbf{U}^b \right] = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' \quad (8)$$

La perturbation du déviateur du tenseur des contraintes est donnée par :

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \boldsymbol{\tau} \left(\mathbf{U}^b + \epsilon \mathbf{u}' \right) - \boldsymbol{\tau} \left(\mathbf{U}^b \right) \right\} = \mu^b \dot{\gamma} \left(\mathbf{u}' \right) + \left(\mu_t - \mu^b \right) \mathbf{A} \quad (9)$$

où la viscosité tangentielle μ_t a été introduite $\mu_t = \mu \left(\mathbf{U}^b \right) + \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{r\theta}} \left(\mathbf{U}^b \right) \dot{\gamma}_{r\theta} \left(\mathbf{U}^b \right)$. Les composantes du tenseur \mathbf{A} sont toutes nulles sauf $A_{1,2} = A_{2,1} = \dot{\gamma}_{r\theta} \left(\mathbf{u}' \right)$. L'anisotropie de la perturbation $\boldsymbol{\tau}'$ est

une conséquence de la non-linéarité de la loi de comportement $\mu(\dot{\gamma})$. La solution est recherchée sous la forme de modes normaux $\{\mathbf{u}', p'\} = \{\mathbf{u}(r), p(r)\} \exp[\sigma t + i(m\theta + kz)]$, où $k \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde axial et $m \in \mathbb{Z}$ le nombre d'onde azimutal. On obtient alors un problème aux valeurs propres généralisé où σ est la valeur propre recherchée. La résolution numérique est basée sur une méthode de collocation de Chebyshev [6]. Les calculs ont été réalisés en utilisant 40 points de collocation.

5 Résultats

5.1 Perturbation axisymétrique : $m = 0$

– Fluide en loi de puissance

Les variations du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure n pour différents rapports de rayon η ont été calculées. Nos résultats confirment ceux obtenus par Jastrzebski *et al.*[3]. Pour décrire l'influence du caractère rhéofluidifiant sur le seuil de stabilité, il est plus pertinent d'utiliser un nombre de Reynolds Re_{cw} construit avec la viscosité au niveau de la paroi intérieure et non plus $\hat{\mu}_{ref}$, Fig 3(gauche). Avec cette définition, on observe que le comportement rhéofluidifiant retarde l'apparition des rouleaux de Taylor. Comme on pouvait s'y attendre, le retard est plus grand quand η diminue. Pour η proche de 1, le profil de vitesse est presque linéaire et ainsi le taux de cisaillement et la viscosité sont pratiquement constants dans l'espace annulaire. Il convient de noter que si la perturbation de la viscosité n'est pas prise en compte, les nombres de Reynolds critiques seront beaucoup plus importants que ceux donnés dans la figure 3(gauche). Une interprétation de ce résultat peut être donnée en considérant le produit scalaire des équations du mouvement linéarisées par le complexe conjugué \mathbf{u}^* et en intégrant entre les deux cylindres. Tout calcul fait, on arrive à :

$$\begin{aligned} \lambda_r \|\mathbf{u}\|^2 &= Re \int_{R_1}^{R_2} (2Vvu^* - r(DV - V/r)v^*u) dr - \int_{R_1}^{R_2} \mu_b \left[r|D\mathbf{u}|^2 + k^2 r|\mathbf{u}|^2 + \frac{(|u|^2 + |v|^2)}{r} \right] \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} (\mu^b - \mu_t) \left(|Dv - \frac{v}{r}|^2 \right) dr, \end{aligned} \quad (10)$$

où $|u|^2 = u_r^2 + u_i^2$ et $\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{R_1}^{R_2} (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) r dr$.

Le troisième terme de l'équation ci-dessus provient de la perturbation de la viscosité. Il est défini positif et participe à la réduction de la dissipation visqueuse et donc à la diminution du nombre de Reynolds critique. Une interprétation phénoménologique peut être donnée. Lorsqu'on impose une perturbation infinitésimale à l'écoulement, la contrainte $\tau_{r\theta}$ est modifiée de $\delta\tau_{r\theta}$ et le cisaillement de $\delta\dot{\gamma}_{r\theta}$, de sorte que la perturbation ne perçoit que la viscosité tangente $\mu_t = \delta\tau_{r\theta}/\delta\dot{\gamma}_{r\theta}$ et non la viscosité effective. La dépendance du nombre d'onde axial critique et donc de la taille des rouleaux de Taylor avec l'indice n est montrée sur la figure 3(droite). On peut noter que pour une valeur de n donnée, le nombre d'onde augmente lorsque η diminue. Ainsi, pour $\eta = 0.4$ et $n = 0.3$, le nombre d'onde est presque deux fois plus grand que dans le cas Newtonien. Ceci peut être relié à la stratification de viscosité entre les cylindres intérieur et extérieur. Les contours des iso-valeurs de la vitesse radiale u pour un fluide Newtonien et un fluide en loi de puissance, tracés sur la figure 4, montrent l'effet du caractère rhéofluidifiant. Pour $n = 0.3$, les contours sont fortement écrasés contre la paroi intérieure.

– Fluide de Bingham

La variation du nombre de Reynolds critique avec le nombre de Bingham est tracée sur la figure 5 (gauche). A nouveau, on observe que Re_c croît lorsqu'augmente la stratification de viscosité induite par le nombre de Bingham $\mu = 1 + B/\dot{\gamma}$. Nos résultats, représentés par des tirets et des pointillés pour $\eta = 0.5$ et $\eta = 0.883$ respectivement, confirment ceux donnés par Landry *et al.* [5]. La taille axiale des rouleaux de Taylor est estimée à partir du nombre d'onde critique redimensionné par la largeur de la zone cisailée $\tilde{k}_c = k_c \times (R_0 - R_1)$. Elle est représentée sur la figure 5 (droite) en fonction du nombre de Bingham. Un décrochement, marqué par un trait vertical, dans l'évolution de \tilde{k}_c a lieu à l'apparition d'une zone non-cisailée attachée au cylindre extérieur. En dessous du décrochement, pour le même

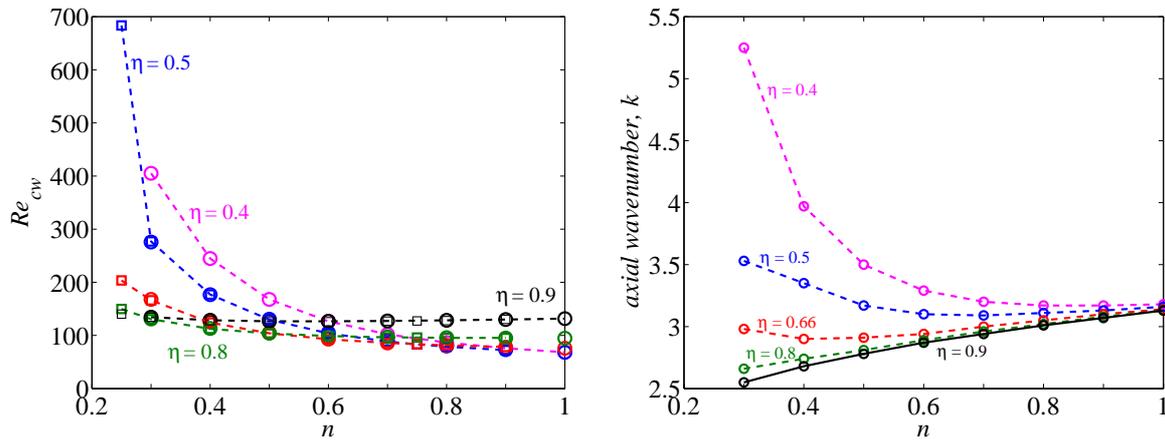


FIGURE 3 – Variation des paramètres critiques en fonction de l’indice de structure pour un fluide en loi de puissance avec différents rapports de rayons. (o) Nos résultats, (□) Jastrzebski *et al.*[3]. Figure de gauche : nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi intérieure ; figure de droite : nombre d’onde critique.

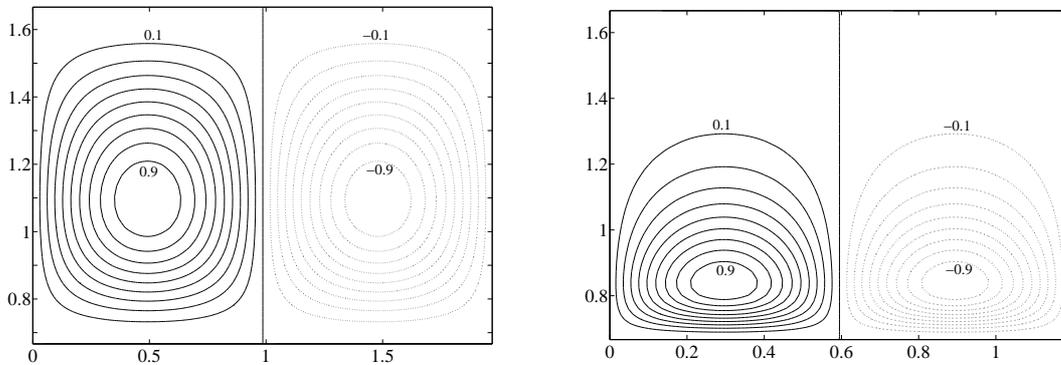


FIGURE 4 – Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse u pour $\eta = 0.4$. (· · ·) Valeurs négative de u et (—) valeurs positives de u . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de u par pas de 0.1. (Gauche) fluide Newtonien, $Re_c = 68.3$, $k_c = 3.18$; (Droite) fluide en loi puissance avec $n = 0.3$, $Re_c = 80.7$, $k_c = 5.25$.

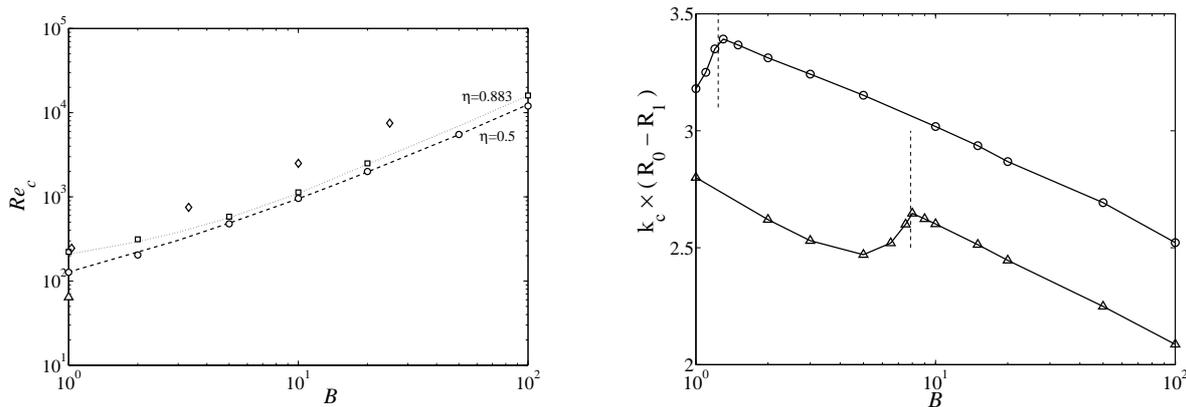


FIGURE 5 – (Gauche) Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons : $\eta = 0.5$ (—) et $\eta = 0.883$ (· · ·). (o) Landry *et al.* [5] pour $\eta = 0.5$, (□) Landry *et al.* [5] pour $\eta = 0.883$, (◇) Caton [1] pour $\eta = 0.5$, (△) Lockett *et al.* [7] pour $\eta = 0.5$. (Droite) Nombre d’onde critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons : (o) 0.5 et (△) 0.883. Les traits verticaux délimitent l’apparition d’une zone non-cisaillée à grand B .

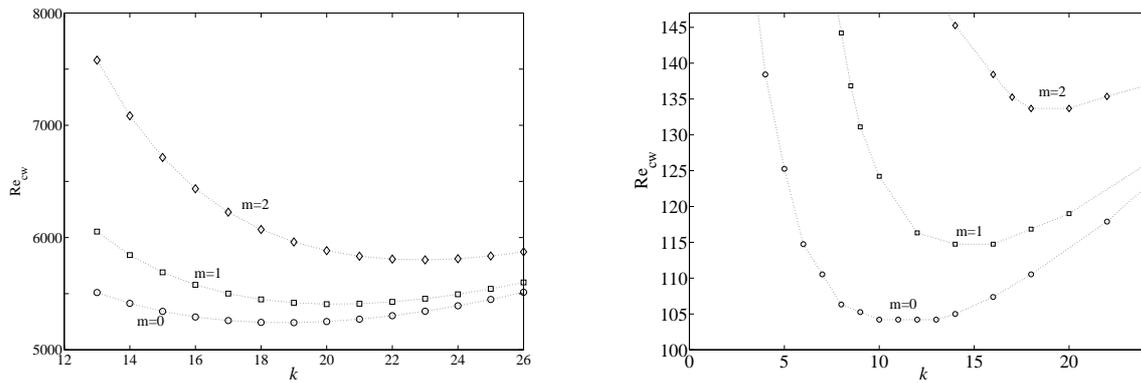


FIGURE 6 – Courbes de stabilité marginale pour $\eta = 0.5$ et pour différents nombres d'onde azimutaux m . (a) Fluide de Bingham avec $B = 50$; (b) loi de puissance avec $n = 0.1$

rapport de rayons, Re_c et k_c pour les fluides de Bingham et loi puissance, varie de manière similaire lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente, i.e., lorsque B augmente ou n diminue. Pour de grands nombres de Bingham, le nombre d'onde diminue quand le caractère rhéofluidifiant augmente, ce qui est cohérent avec la loi de puissance pour une faible épaisseur cisillée (η proche de 1).

5.2 Perturbation tridimensionnelle

Une perturbation tridimensionnelle est maintenant considérée. Sur la figure 6 sont montrées les courbes de stabilité marginale pour différents nombres d'onde azimutaux. On observe que Re_c augmente lorsque le nombre d'onde azimutal augmente. Le minimum est toujours atteint pour le cas axisymétrique, même pour des fluides très rhéofluidifiants ($n = 0.1$) ou ($B = 50$). Ces résultats sont en contradiction avec ceux de Caton[1]. La forme de la courbe de stabilité marginale à bas nombres d'ondes axiaux suggère que l'écoulement de Couette est linéairement stable à $k = 0$. Des calculs supplémentaires ont été effectués pour le cas particulier de $k = 0$, et nous n'avons trouvé aucune instabilité pour les deux lois rhéologiques considérées : $B \leq 100$, $0.1 \leq n < 1$. Même pour des fluides fortement rhéofluidifiants, le mode le moins stable reste axisymétrique.

Références

- [1] F. Caton 2006 Linear stability of circular Couette flow of inelastic viscoplastic fluids plastics. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **134** 148-154
- [2] V. Sinevic and R. Kuboi and A. W. Nienow 1986 Power numbers, Taylor numbers and Taylor vortices in viscous Newtonian and non-Newtonian fluids *Chemical Engineering Science* **41** 2915-2923
- [3] M. Jastrzebski and H. A. Zaidani and S. Wronski 1992 Stability of Couette flow of liquids with power law viscosity. *Rheol. Acta.* **31** 264-273
- [4] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager 1987 Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Dynamics *Wiley, New York*
- [5] M.P. Landry and I.A. Frigaard and D.M. Martinez 2006 Stability and instability of Taylor-Couette flows of a Bingham fluid. *J. Fluid. Mech.* **560** 321-353
- [6] P. J. Schmid and D. S. Henningson 2001 Stability and transition in shear flows *Springer - Verlag*
- [7] T. J. Lockett and S. M. Richardson and W. J. Worraker 1992 The stability of inelastic non-Newtonian fluids in Couette flow between concentric cylinders : a finite-element study. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **43** 165-177