

Optimisation et contrôle d'une couche limite décollée

P-Y. Passaggia ^a et U. Ehrenstein^a

a. IRPHÉ-UMR 6594, CNRS, Aix-Marseille Université, F-13384 Marseille

Résumé :

Afin de proposer des solutions de contrôle aux écoulements décollés proche paroi, le contrôle optimal de la dynamique instable d'une couche limite décollée est étudié en utilisant un dispositif de type soufflage-aspiration. L'approche lagrangienne est mise en œuvre dans le but de calculer des lois de contrôle capables d'atténuer la dynamique instable associée au décollement. Comme archétype d'une couche limite décollée, l'écoulement en aval d'une bosse est considéré.

Abstract :

In order to investigate the possibilities of controlling wall-bounded flows, optimal control of the non-linear dynamics of a separated boundary-layer flow is studied using a localised blowing-suction at the wall. Control laws are computed using a formulation based on the augmented Lagrangian approach using the full knowledge of the flow dynamics. The case study consists in a laminar separated boundary-layer flow over a bump.

Mots clefs : Optimisation Lagrangienne ; contrôle ; décollement

1 Introduction

Le décollement est intrinsèque aux écoulements le long de parois, quelle qu'en soit la géométrie. Les bulles de recirculation ainsi formées sont sources de phénomènes d'instabilités, entraînant une dégradation des performances aérodynamiques. Il est donc essentiel de proposer des solutions de contrôle afin d'atténuer ces phénomènes d'instabilités. Pour ce faire, une méthode d'optimisation basée sur la formulation adjointe des équations de Navier-Stokes est mise en œuvre afin de contrôler un écoulement instable en aval d'un obstacle. Depuis quelques années, la réduction de modèles basée sur la dynamique linéaire en vue du contrôle rétroactif d'écoulements a reçu un fort intérêt [7]. Cette méthode a notamment été appliquée avec succès par Åkevik *et al.* [2] dans le cas d'un écoulement décollé faiblement instable au dessus d'une cavité. Cependant, une telle réduction de modèle semble délicate à mettre en œuvre dès lors que des instabilités convectives et globales coexistent dans une dynamique non linéaire. Afin d'apporter des éléments de réponse concernant le contrôle d'une telle dynamique, l'approche lagrangienne est mise en œuvre. Cette formulation permet de prendre en compte l'intégralité de la dynamique et a été utilisée avec succès par exemple pour le contrôle d'un écoulement turbulent dans un canal infini [4]. L'approche lagrangienne permet également le calcul de perturbations optimales non linéaires dont on sait qu'elles jouent un rôle important dans la dynamique transitoire d'écoulements ouverts. Il a été montré par exemple dans [5] que pour la couche limite l'effet des non linéarités n'est plus négligeable dès que l'amplitude initiale de la perturbation devient trop importante.

L'écoulement étudié ici est une couche limite laminaire où le décollement est provoqué par une bosse optimisée à cet effet. La longue bulle de recirculation créée en aval de la bosse est globalement instable au delà d'un nombre de Reynolds critique (cf. [6]). Cet écoulement a été étudié par simulation numérique dans Marquillie & Ehrenstein [8] et leur algorithme de résolution a été adaptée pour la présente étude. Pour le problème de l'optimisation sous contraintes, la méthode du gradient basée sur une formulation adjointe du système de Navier-Stokes en perturbation est mise en œuvre. Le problème du contrôle de la dynamique non linéaire est formulé en utilisant une fonction objectif basée

sur l'énergie de la perturbation. La formulation mathématique est brièvement présentée dans le chapitre 1. L'effet des non linéarités sur la perturbation optimale est abordé au cours du chapitre 2. Les possibilités de contrôle de la dynamique non linéaire saturée sont discutées au chapitre 3. Enfin quelques conclusions et perspectives sont présentées dans le chapitre 4.

2 Formulation et méthode numérique

L'écoulement est décomposé en un écoulement de base et une perturbation et le système de Navier-Stokes s'écrit

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - (1/Re) \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

avec \mathbf{U} le champ de vitesse de l'écoulement de base, \mathbf{u} étant le champ de vitesse et p la pression de la perturbation. Ici le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\delta^* U_\infty}{\nu} \quad (2)$$

est basé sur l'épaisseur de déplacement δ^* du profil de couche limite imposé à l'entrée du domaine. Le système de Navier-Stokes est résolu grâce à une simulation numérique directe reprenant la formulation décrite dans Marquillie & Ehrenstein [8]. La bosse est incluse dans le domaine grâce à une transformation de coordonnées qui transforme le domaine physique en domaine cartésien. La direction longitudinale x est discrétisée en différences finies. La direction y normale à l'écoulement est discrétisée par une méthode de type Chebyshev et l'intégration en temps est assurée par un schéma en temps de type semi-implicite. La différence entre la présente formulation et celle de Marquillie & Ehrenstein réside dans la méthode de résolution de la pression. Dans la formulation d'optimisation décrite par la suite, le choix de la condition à la sortie est essentiel. La matrice d'influence [9] permet l'utilisation de la condition de type "stress-free" qui lie le gradient de vitesse à la pression et assure la compatibilité entre le système de Navier-Stokes et son adjoint.

2.1 Écoulement de base instable

Pour un nombre de Reynolds de 650, l'écoulement de type couche limite impose un domaine de calcul d'une longueur $L = 250$ et une hauteur $H = 100$. La première étape consiste à générer un état de base et la méthode de Åkervik *et al.* [1] (selective frequency damping) a été utilisée afin de converger vers un état stationnaire. La mise en œuvre de cette méthode consiste à résoudre.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, Re) - \chi(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})}{\Lambda} \end{cases} \quad (3)$$

où \mathbf{f} désigne le système de Navier-Stokes, \mathbf{q} contenant la vitesse \mathbf{U} et la pression P de l'écoulement de base. Ici Λ est une fréquence de coupure et χ un coefficient d'amortissement. Dans le cas présent, la valeur de Λ correspond à la fréquence dominante mesurée par un capteur localisé dans la couche de cisaillement. Une bonne estimation du paramètre χ est donnée par le taux de croissance de l'instabilité linéaire, fournit par l'analyse de stabilité globale de cet écoulement [6]. Les valeurs utilisées pour un nombre de Reynolds de 650 sont $\Delta=6.37$ et $\chi=0.03$. La figure 1 montre l'état de base ainsi obtenu.

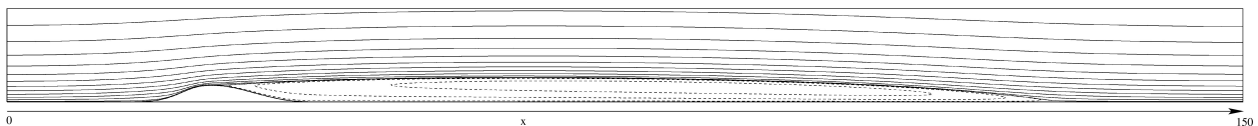


FIG. 1 – Etat de base pour un nombre de $Re = 650$

2.2 Lagrangienne augmentée et gradient

Dans le cas du contrôle, on cherche à minimiser l'énergie dans tout le domaine et la fonction objectif s'écrit

$$\mathcal{J}_1(\phi, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dx dt + \gamma \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} g\phi \cdot g\phi \, ds dt \quad (4)$$

avec Γ_c la portion où le soufflage est appliqué, g est la distribution du soufflage qui est uniforme dans le cas présent, ϕ la loi de contrôle et γ est le coût du contrôle. Le domaine est schématisé dans la figure 2. Le temps d'optimisation est contenu dans l'intervalle $T_0 - T_1$. Cette fonctionnelle est soumise au système de Navier-Stokes (que l'on note \mathbf{f}) et à la contrainte associé au contrôle \mathbf{g} , à savoir

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{u}, p) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbf{u}|_{\Gamma_c} - g\phi. \quad (5)$$

Dans le cas de la perturbation optimale, on cherche à maximiser l'énergie pour un temps d'optimisation T_1 , la fonction objectif devient

$$\mathcal{J}_2(\phi, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}(T_1) \cdot \mathbf{u}(T_1) \, dx \quad (6)$$

avec les contraintes

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{u}, p) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad h(\mathbf{u}_0, \epsilon) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \, dx - \epsilon = 0 \quad (7)$$

où ϵ est l'amplitude de la perturbation initiale \mathbf{u}_0 .

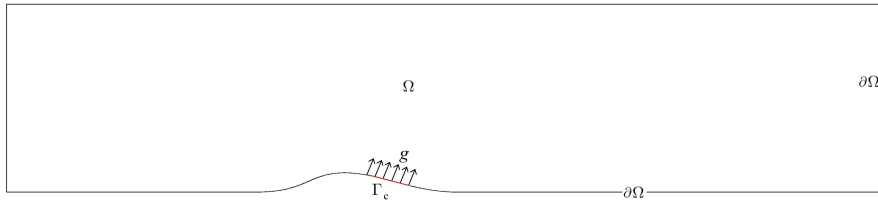


FIG. 2 – Schéma du domaine et du dispositif de contrôle

Nous détaillons le problème d'optimisation pour le contrôle, qui consiste à trouver ϕ afin que la fonctionnelle (4) soit minimisée en respectant les contraintes (5). Avec l'introduction des multiplicateurs de Lagrange, le problème d'optimisation à résoudre consiste à trouver $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^+, p, p^+, \phi, \phi^+)$ afin que le Lagrangien \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^+, p, p^+, \phi, \phi^+, \epsilon, \epsilon^+) = \mathcal{J}_1(\phi, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{u}, p), (\mathbf{u}^+, p^+) \rangle - \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}, \phi), \phi^+ \rangle$$

soit rendu stationnaire. D'annuler les dérivés (au sens de Fréchet) par rapport aux multiplicateurs de Lagrange consiste à imposer les contraintes. Les dérivées par rapport aux variables d'état (\mathbf{u}, p) s'écrivent

$$\mathcal{D}_{\mathbf{u}, p} \mathcal{L} \cdot (\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) = \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dx dt - \mathcal{D}_{\mathbf{u}, p} \langle \mathbf{f}(\mathbf{u}, p), (\mathbf{u}^+, p^+) \rangle \cdot (\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) - \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \hat{\mathbf{u}} \cdot g\phi^+ \, ds dt \quad (8)$$

Le calcul de $\mathcal{D}_{\mathbf{u},p} \langle \mathbf{f}(\mathbf{u}, p), (\mathbf{u}^+, p^+) \rangle \cdot (\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$ est détaillé par exemple dans [3] et d'annuler l'expression ci-dessus revient à résoudre le système adjoint

$$-\partial_t \mathbf{u}^+ - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}^+ + (\nabla \mathbf{U})^t \mathbf{u}^+ - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^+ + (\nabla \mathbf{u})^t \mathbf{u}^+ + \nabla p^+ - (1/Re) \Delta \mathbf{u}^+ = \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^+ = 0 \quad (9)$$

En effectuant les opérations de type intégration par parties pour obtenir le système adjoint l'intégrale sur le bord $\partial\Omega$

$$\int_{T_0}^{T_1} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{Re} \mathbf{u}^+ (\nabla \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} + (p^+ \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^+ (\hat{p} \cdot \mathbf{n}) \right] ds dt.$$

Les conditions "stress-free" $\frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{0}$ étant imposées à la sortie $\partial\Omega_S$, la condition à la sortie pour le système adjoint (implémentée grâce à la matrice d'influence)

$$-\frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^+) \mathbf{n} |_{\partial\Omega_S} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^+ |_{\partial\Omega_S} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^+ |_{\partial\Omega_S} + p^+ \mathbf{n} |_{\partial\Omega_S} = 0, \quad \mathbf{u}^+ |_{\partial\Omega - \partial\Omega_S} = \mathbf{0} \quad (10)$$

permet d'annuler cette intégrale sur $\partial\Omega - \Gamma_c$. Enfin la contribution sur Γ_c s'annule en prenant

$$g\phi^+ = -\frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} + p^+ \mathbf{n} \quad (11)$$

dans (8). La dérivé du Lagrangien par rapport au contrôle ϕ devient

$$\mathcal{D}_\phi \mathcal{L} \cdot \hat{\phi} = \gamma \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} g\phi \cdot g\hat{\phi} ds dt - \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} (-g\hat{\phi}) \cdot g\phi^+ ds dt \quad (12)$$

et tenant compte de (11), on obtient le gradient de plus grande pente pour le contrôle

$$\nabla_\phi \mathcal{J}_1(\phi) = \gamma \phi \int_{\Gamma_c} g \cdot g ds + \int_{\Gamma_c} \left(-\frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^+ \mathbf{n} + p^+ \mathbf{n} \right) \cdot g ds \quad (13)$$

La même procédure est utilisée pour la perturbation optimale. On montre que l'expression du gradient devient alors

$$\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathcal{J}_2(\mathbf{u}_0) = -\mathbf{u}_0^+ + 2\epsilon^+ \mathbf{u}_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_0^+ = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}, T_0) \\ \epsilon^+ = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{u}^+(T_0) \cdot \mathbf{u}^+(T_0) d\mathbf{x}} / 4\epsilon \end{cases} \quad (14)$$

2.3 Schéma itératif

La convergence de l'algorithme du gradient dépend précisément du pas α dont on affecte la direction de descente. Pour ce faire α est optimisé en interpolant un problème monodimensionnel dans cette direction et les itérations deviennent

$$\phi^{k+1} = \phi^k - \alpha_k \nabla_\phi \mathcal{J}(\phi^k, \mathbf{u}^{+,k}).$$

La seconde difficulté réside dans l'apparition de minimums locaux. Il est donc nécessaire de scruter la fonction objectif afin de ne pas rester piégé dans un minimum local. Une fois le contrôle optimal calculé sur le premier intervalle de temps, l'avance en temps est assurée par un algorithme de type "receding-predictive control" décrit dans [4] avec un temps de décalage entre chaque intervalle d'optimisation égal à la moitié du temps d'optimisation.

3 Croissance optimale et contrôle

L'étude des perturbations optimales linéaires [6] a montré qu'un paquet d'onde localisé au point de décollement permet d'obtenir la croissance transitoire la plus forte. Afin d'examiner l'effet des non linéarités sur ces perturbations, on utilise une faible amplitude initiale qui permet de rester dans le régime linéaire. Puis l'amplitude est augmentée de 10^{-8} à 10^{-4} et les temps d'optimisation étudiés s'étendent de $T = 50$ à $T = 150$, ce qui permet d'observer le régime de saturation de l'écoulement. Les résultats sont illustrés dans la figure 3b) La figure 3a) montre l'évolution de la perturbation optimale en fonction de l'amplitude : elle s'étend de plus en plus dans la zone de cisaillement de la bulle de recirculation. Ceci montre clairement que l'écoulement non linéaire n'est pas seulement sensible à des actions près de la bosse (comme dans le cas linéaire) mais qu'il est également très sensible dans la région à l'intérieur de la bulle de recirculation. La figure 3b) montre la croissance de l'énergie (normalisée par rapport à l'énergie initiale) partant des perturbations optimales de la figure 3a). On observe notamment l'amorce de la saturation pour des plus fortes amplitudes initiales.

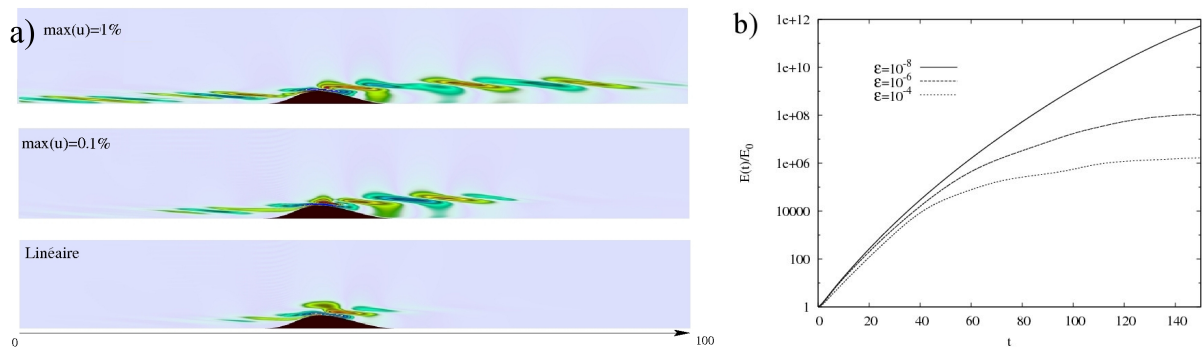


FIG. 3 – (a) Évolution de la structure de la perturbation optimale en fonction de l'amplitude initiale, (b) croissance transitoire des perturbations optimales en fonction de l'amplitude initiale pour $T_1 = 150$.

On s'intéresse ensuite au contrôle de l'écoulement développé. La dynamique instable est caractérisée par un battement basse fréquence [8] de la bulle que l'on cherche à atténuer. Le battement a une période $T \approx 200$, et l'intervalle d'optimisation minimum de la loi de contrôle utilisé est de 300 car pour des temps plus faibles, le contrôle n'est pas d'influence significative sur l'écoulement. La procédure d'optimisation implique entre 5 et 7 évaluations du gradient alors que pour chaque évaluation du gradient, entre 4 et 7 appels à la fonction objectif sont nécessaires pour l'évaluation de α .

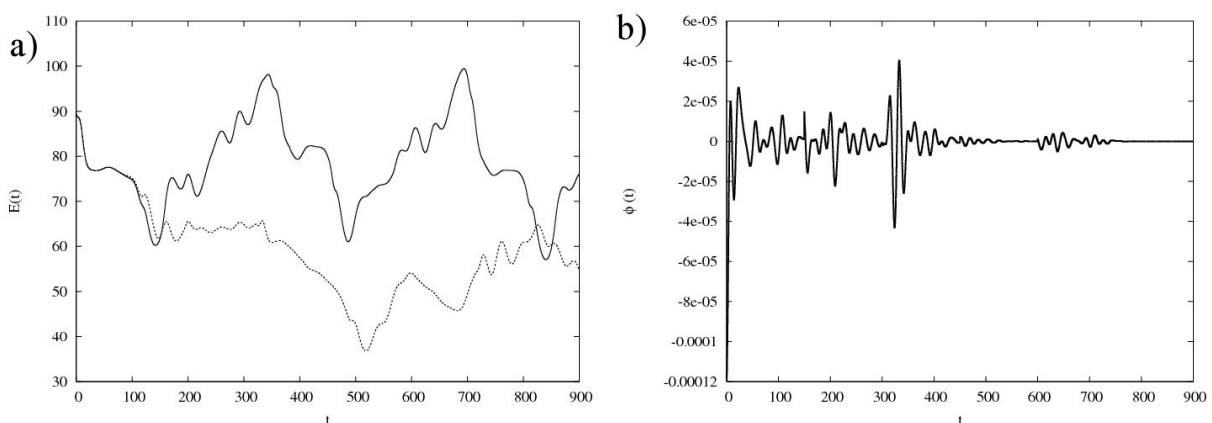


FIG. 4 – (a) Energie de la perturbation de l'écoulement non contrôlé (-----), contrôle avec un actionneur (.....), (b) loi de control ϕ associée.

En un premier temps un actionneur est placé au point de décollement, là où la perturbation optimale

domine (cf. schéma de la figure 2). Le problème est intégré faisant des aller-retour en temps pour le système direct et son adjoint. Le contrôle est rapidement capable de diminuer l'énergie de la perturbation de moitié mais il ne permet pas un contrôle total de la dynamique. En effet l'utilisation d'un seul actionneur, tout en minimisant le lâcher tourbillonnaire, n'offre pas la contrôlabilité suffisante pour permettre un retour vers l'état de base. L'introduction de nouveaux actionneurs s'avère donc nécessaire afin d'envisager un contrôle total de la dynamique de cet écoulement.

4 Conclusions et Perspective

L'optimisation et le contrôle rétroactif de la dynamique non linéaire d'un écoulement décollé à l'arrière d'une bosse sont étudiés. La méthode du gradient a été mise en œuvre afin de calculer les perturbations optimales non linéaires bidimensionnelles ainsi qu'une loi de contrôle capable d'atténuer le phénomène de battement basse fréquence. Afin d'utiliser une condition à la sortie compatible entre le système de Navier-Stokes et son adjoint, une méthode de matrice d'influence a permis le couplage entre le gradient de vitesse et la pression à la sortie. Les résultats concernant la perturbation optimale montrent que la région de sensibilité de l'écoulement s'accroît avec le degré des non linéarités. Par conséquent, l'utilisation d'un seul actionneur localisé près du point de décollement n'est pas suffisante pour permettre un retour à l'état de base. Cependant il atténue notablement le battement de l'instabilité basse fréquence de la bulle de recirculation. L'introduction de nouveaux actionneurs au niveau de la bulle et en amont de la bosse permettront de juger des possibilités de contrôle de cet écoulement par l'utilisation d'actions de type soufflage-aspiration à la paroi.

5 Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-09-SYSC-011.

Références

- [1] E. Åkervik, L. Brandt, D. Henningson, J. Hoepffner, O. Marxen, and P. Schlatter. Steady solutions of the navier-stokes equations by selective frequency damping. *Phys. of Fluids*, 18 :068102, 2006.
- [2] E. Åkervik, J. Hoepffner, U. Ehrenstein, and D. Henningson. Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes. *J. Fluid Mech.*, 579 :305 – 314, 2007.
- [3] T.R. Bewley. Flow control : new challenges for a new renaissance. *Prog. in Aero. Sci.*, 37 :21–58, 2001.
- [4] T.R. Bewley, P. Moin, and R. Temam. Dns-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark of feedback algorithms. *J. Fluid Mech.*, 447 :179–225, 2001.
- [5] S. Cherubini, P. De Palma, J-Ch. Robinet, and A. Bottaro. Rapid path to transition via nonlinear localized optimal perturbation in a boundary-layer flow. *Phys. Rev. E*, 571 :066302, 2010.
- [6] U. Ehrenstein and F. Gallaire. Two-dimensional global low-frequency oscillations in a separating boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.*, 614 :315–327, 2008.
- [7] J. Kim and T. R. Bewley. A linear systems approach fo flow control. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 39 :383–417, 2007.
- [8] M. Marquillie and U. Ehrenstein. On the onset of nonlinear oscillations in a separating boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.*, 490 :169– 188, 2003.
- [9] R. Peyret. *Spectral Methods for Incompressible Flows*. Springer, 2002.