

Transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien: Effet de la non-linéarité de la loi de comportement.

N. López, M. Jenny, C. Nouar^a

a. LEMTA - ENSEM, Nancy Université, CNRS UMR 7563, 2 av. de la Forêt de Haye BP 160, F-54504 Vandoeuvre lès Nancy, FRANCE.

Résumé :

La transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien a été peu étudiée en dépit de l'importance de ce problème. Les résultats existants dans la littérature font état d'une part d'un retard à la transition vers la turbulence et d'autre part de l'apparition d'une asymétrie dans les profils moyennés en temps de la vitesse axiale. Notre étude numérique montre que la non-linéarité de la viscosité est à l'origine d'une réorganisation significative de l'écoulement. D'une part, cette non-linéarité réduit la dissipation visqueuse de l'énergie de la perturbation et d'autre part, elle induit un fort enrichissement du spectre d'énergie.

Abstract :

The transition to turbulence of purely viscous shear-thinning fluid flow in a pipe has been little studied despite the importance of this problem. The existing results in literature show, firstly, a delay in the transition to turbulence and secondly, the onset of an asymmetry in the mean profiles (time averaged) of the axial velocity. Our numerical study shows that the nonlinearity of viscosity is at the origin of a significant reorganization of the flow. On the one hand, the nonlinearity reduces the viscous dissipation of kinetic energy of the disturbance and on the other hand, induces a broad energy spectrum.

Mots clefs : transition vers la turbulence, fluide rhéofluidifiant, conduite cylindrique

1 Introduction

La transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien a été peu étudiée en dépit de l'importance de ce problème dans de nombreux secteurs industriels. Les résultats existants dans la littérature font état pour les fluides rhéofluidifiants, *i.e.* les fluides pour lesquels la viscosité diminue avec le cisaillement, d'une part d'un retard à la transition vers la turbulence [1] et d'autre part de l'apparition d'une asymétrie dans les profils moyennés en temps de la vitesse axiale [2, 3, 4]. Les écoulements de tels fluides se caractérisent par une stratification radiale de la viscosité et par la variation non-linéaire de la viscosité μ en fonction du cisaillement $\dot{\gamma}$. L'objectif de cette étude est de faire ressortir l'influence de la non-linéarité $\mu(\dot{\gamma})$ sur le scénario de transition vers la turbulence en conduite cylindrique. Pour cela, nous avons effectué une simulation numérique de l'écoulement d'un fluide de Carreau (Eq. 3) en régime transitionnel par une méthode pseudo-spectrale de type Petrov-Galerkin. Les résultats numériques ont permis de mettre en évidence deux caractéristiques fondamentales induites par la non-linéarité $\mu(\dot{\gamma})$: (i) réduction de la dissipation visqueuse et (ii) élargissement du spectre d'énergie.

2 Formulation du problème

Nous considérons l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant purement visqueux incompressible dans une conduite cylindrique de rayon \hat{R} . Les équations adimensionnelles gouvernant le problème sont

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2)$$

La mise sous forme adimensionnelle est obtenue en utilisant \hat{W}_0 la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille, le rayon \hat{R} et $\hat{\rho}\hat{W}_0^2$ comme échelles caractéristiques de vitesse, de distance, de pression et de contrainte. Le vecteur vitesse \mathbf{U} est écrit sous la forme $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_z$, où U , V et W sont les composantes de la vitesse dans les directions radiale, azimutale et axiale. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par le modèle de Carreau :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{Re} \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_\infty + (1 - \mu_\infty) \left[1 + (\lambda \dot{\boldsymbol{\gamma}})^2 \right]^{(n_p - 1)/2}, \quad (3)$$

où $\mu_\infty = \hat{\mu}_\infty/\hat{\mu}_0$, $\hat{\mu}_\infty$ est la viscosité à cisaillement infini, $\hat{\mu}_0$ la viscosité à cisaillement nul et $\lambda = \hat{\lambda}\hat{R}/\hat{W}_0$ un temps caractéristique adimensionnelle du fluide. Le nombre de Reynolds est défini par :

$$Re = \frac{\hat{\rho}\hat{W}_0\hat{R}}{\hat{\mu}_0}. \quad (4)$$

2.1 Écoulement de base

En régime dynamique établi, le profil de vitesse axiale $W_b(r)$ satisfait l'équation suivante :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_b \frac{\partial W_b}{\partial r} \right), \quad (5)$$

avec la condition d'adhérence à la paroi. L'indice b se réfère à l'écoulement de base. La résolution numérique de l'équation non-linéaire (5) est effectuée par une méthode itérative. A titre d'exemple, la figure 2.1 montre l'influence du caractère rhéofluidifiant sur les profils de vitesse axiale et de viscosité. En augmentant le caractère rhéofluidifiant, le cisaillement pariétal augmente et la viscosité diminue.

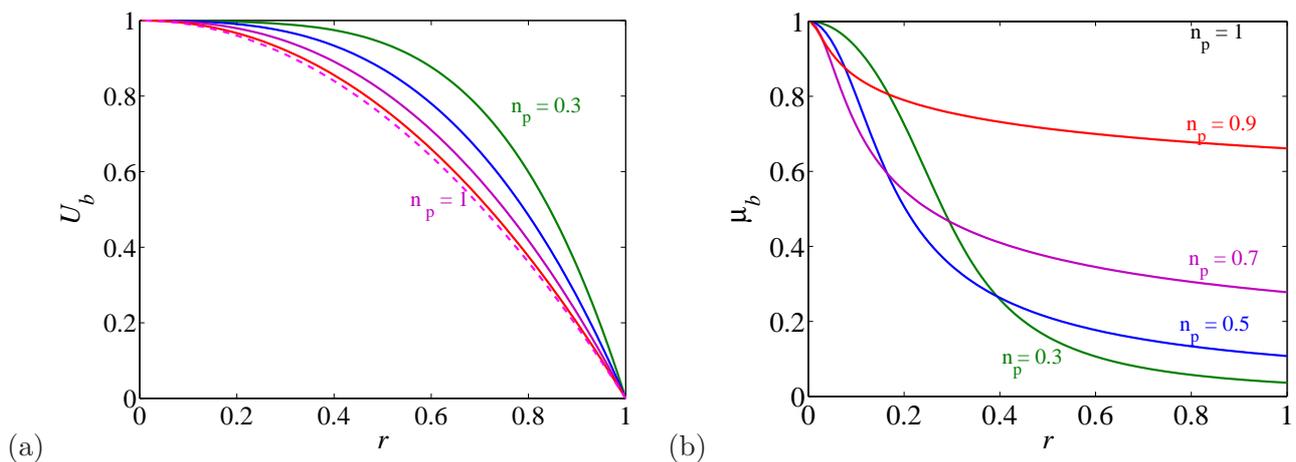


FIGURE 1 – Écoulement de base à $\lambda = 30$, $\mu_\infty = 2 \times 10^{-3}$ et différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification : (1) $n_p = 1$ (cas Newtonien), (2) $n_p = 0.9$, (3) $n_p = 0.7$, (4) $n_p = 0.5$ et (5) $n_p = 0.3$. (a) Profils de vitesse axiale. (b) Profils de viscosité.

2.2 Équations aux perturbations

À l'écoulement de base, on superpose une perturbation $(\mathbf{u}, p) : \mathbf{U} = \mathbf{U}_b + \mathbf{u}$ et $P = P_b + p$, dont l'évolution temporelle vérifie le système suivant :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)], \quad (7)$$

avec la condition de non-glissement à la paroi. Dans l'équation (7), les composantes du déviateur du tenseur des contraintes sont :

$$\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}). \quad (8)$$

3 Résolution numérique

Une méthode pseudospectrale de Petrov-Galerkin [5] est utilisée pour la résolution numérique du système (6)-(7). Le champ de vitesse \mathbf{u} est projeté sur des séries de Fourier dans les directions azimutale et axiale et sur des fonctions basées sur les polynômes de Chebyshev dans la direction radiale :

$$\mathbf{u}_s(r, \theta, t) = \sum_{k=1,2} \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}^{(k)} \boldsymbol{\Phi}_{mnl}^{(k)}. \quad (9)$$

Les fonctions de base $\boldsymbol{\Phi}_{mnl}^{(k)}$ s'écrivent sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}_{mnl}^{(k)} = \exp(2\pi i l z / Q + i n \theta) \mathbf{v}_{mnl}^{(k)}(r), \quad (10)$$

où Q est la période dans la direction axiale. Les résultats présentés ici ont été obtenus en fixant $Q = 2\pi$. L'expression des $\mathbf{v}_{mnl}^{(k)}(r)$ selon les nombres d'onde azimutal n et axial l est donnée dans [5]. Si on note \mathbf{a} le vecteur colonne contenant les éléments $a_{mnl}^{(k)}$, le système dynamique résultant de la procédure de projection s'écrit :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (11)$$

où \mathbf{b} est un vecteur colonne qui regroupe les termes non-linéaires d'inertie et les termes non-linéaires visqueux calculés en pseudospectral. La discrétisation temporelle utilise un schéma semi-implicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4. Les termes linéaires étant évalués en implicite et les termes non-linéaires en explicite.

4 Cas d'une perturbation infinitésimale : Stabilité linéaire

Si la perturbation est infinitésimale, les termes convectifs non-linéaires peuvent être négligés et le tenseur $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)$ peut être linéarisé par rapport à l'écoulement de base (\mathbf{U}_b, P_b) moyennant un développement à l'ordre 1 de la viscosité de l'écoulement perturbé $\mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})$:

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b) = \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) + \mu' \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{U}_b) \quad \text{avec} \quad \mu' \simeq \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{\mathbf{b}} \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \quad (12)$$

où μ' est la perturbation de la viscosité, $\mu' = \mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \mu(\mathbf{U}_b)$. Le problème aux valeurs initiales qui en résulte peut s'écrire de façon formelle $\mathcal{A}\dot{\mathbf{a}} = \mathcal{B}\mathbf{a}$. Pour déterminer le comportement aux temps longs de la perturbation, la solution est recherchée sous la forme $\exp(\sigma t)$. Le problème aux valeurs initiales est transformé en un problème aux valeurs propres généralisé $\sigma \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a}$ où σ est la valeur propre. Les résultats numériques montrent que pour la gamme de paramètres rhéologiques considérés dans notre étude, $0 < \lambda < 30$ et $0.3 < n_p < 1$, la partie réelle de σ reste négative. On conjecture que l'écoulement en conduite cylindrique d'un fluide rhéofluidifiant est linéairement stable. Comme l'opérateur linéaire $\mathbb{L} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ est non normal, une croissance transitoire de l'énergie cinétique est

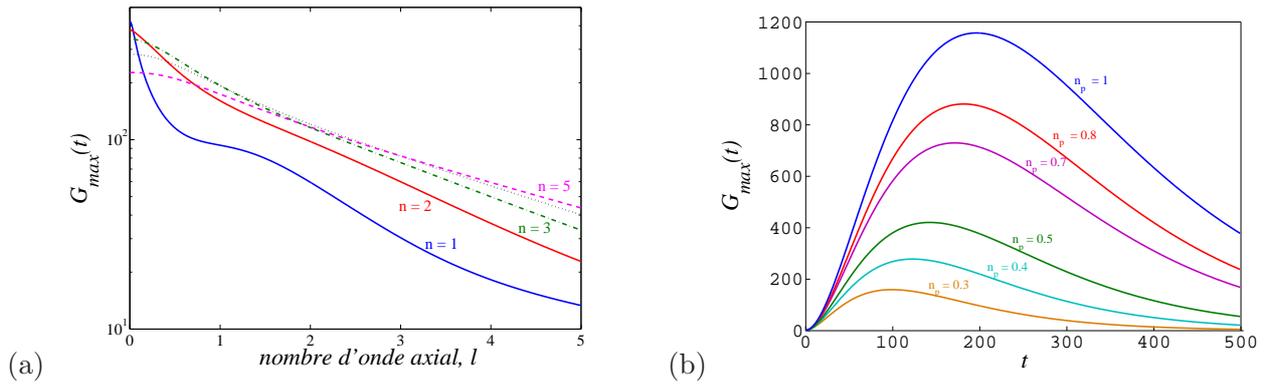


FIGURE 2 – (a) Amplification maximale de l'énergie cinétique de la perturbation en fonction du nombre d'onde axial l pour différents nombres d'ondes azimutaux n à $Re_w = 4000$, $\lambda = 30$ et $n_p = 0.5$. (b) Gain de l'énergie cinétique pour la perturbation optimale à $Re_w = 4000$, $\lambda = 30$ et différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification n_p .

attendue avant la décroissance exponentielle. On définit le gain \mathcal{G} de l'énergie cinétique au temps t par rapport à toutes conditions initiales non nulles :

$$\mathcal{G}(t, l, n) = \sup_{\mathbf{u}_0 \neq 0} \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_e}{\|\mathbf{u}_0\|_e} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{u}\|_e = \frac{1}{2\pi Q} \int_0^Q \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} r \, dr d\theta dz. \quad (13)$$

où $\|\mathbf{u}\|_e$ est la densité d'énergie cinétique instantanée de la perturbation. L'amplification maximale par rapport au temps est $\mathcal{G}_{max}(l, z) = \sup_{t>0} \mathcal{G}(t, l, z)$. Le maximum de $\mathcal{G}_{max}(l, z)$ suivant les nombres d'onde l et n est $\mathcal{G}_{opt} = \sup_{l,n} \mathcal{G}_{max}(l, z)$ obtenu par la perturbation optimale à t_{opt} . Le calcul de la perturbation optimale suit la méthode décrite dans [6]. Pour cette étude, on trouve que celle-ci est constituée de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs, ($l = 0, n = 1$) similaire au cas Newtonien (figure 2a). On note aussi que l'indice de rhéofluidification réduit significativement l'amplification de l'énergie cinétique ainsi que la durée nécessaire pour que le maximum d'amplification soit atteint (figure 2b). Les résultats sont présentés à $Re_w = 4000$, où Re_w est le nombre de Reynolds défini avec la viscosité pariétale.

5 Résultats de l'analyse non-linéaire

Nous avons commencé par examiner l'influence de la non-linéarité $\mu(\dot{\gamma})$ sur l'évolution temporelle de l'énergie de la perturbation optimale pour deux modes de Fourier $n = 1$ et $n = 3$. Lorsque l'énergie initiale de la perturbation est très faible, la contribution des termes non-linéaires peut être négligée et on retrouve la croissance transitoire due à la non normalité de l'opérateur linéaire. Aux temps longs l'énergie de la perturbation tend inéluctablement vers zéro du fait de la dissipation visqueuse. Il faut bien noter qu'en situation bidimensionnelle, les rouleaux longitudinaux n'ont aucune source d'énergie. Afin de faire ressortir l'influence de la non-linéarité $\mu(\dot{\gamma})$, nous avons représenté l'écart relatif, $RD = [\|\mathbf{u}(t)\|_e - \|\mathbf{u}(t)\|_{e,st}] / \|\mathbf{u}(t)\|_{e,st}$, de l'énergie de la perturbation par rapport au cas dit purement stratifié désigné par l'indice st où le profil de viscosité serait gelé, $\mu(r, t) = \mu_b(r)$. La figure 3 montre que l'énergie de la perturbation est beaucoup plus importante lorsque la non-linéarité de la viscosité est prise en compte. Cet effet est d'autant plus prononcé que le fluide est rhéofluidifiant. Une interprétation de ce résultat peut être donnée en écrivant l'équation de Reynolds-Orr. Le produit scalaire de (7) avec \mathbf{u} intégré ensuite sur une section droite de la conduite conduit à :

$$\frac{de}{dt} = - \int_S u w \frac{dW_b}{dr} dS - \frac{1}{Re} \int_S \mu' \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) \frac{dW_b}{dr} dS - \frac{1}{Re} \int_S \mu (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{u})) dS. \quad (14)$$

Par comparaison avec le cas Newtonien, un nouveau terme $CR_{\mu'} = -(1/Re) \mu' \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) (dW_b/dr)$ apparaît. Il provient de la contraction du tenseur des contraintes de Reynolds non Newtoniennes $\mu' \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})$

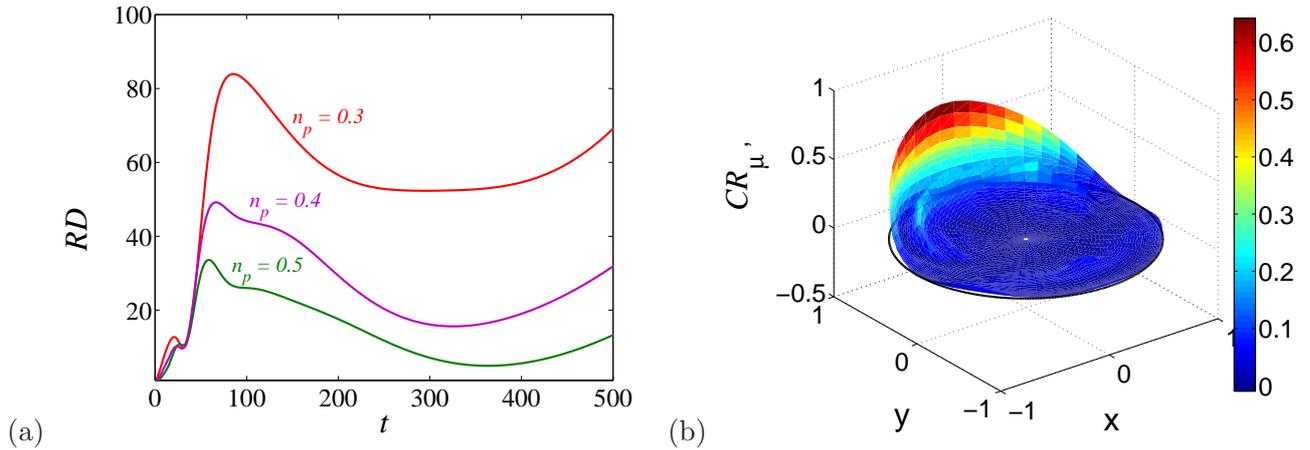


FIGURE 3 – Effet de la non-linéarité $\mu(\dot{\gamma})$ sur l'énergie de la perturbation, pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$ et $Re_w = 4000$. La condition initiale correspond à la perturbation optimale pour $n = 1$. (a) Réduction de la dissipation visqueuse pour trois valeurs de l'indice de rhéofluidification : $n_p = 0.5, 0.4$ et 0.3 . (b) Répartition de la *contrainte de Reynolds non Newtonienne* $CR_{\mu'}$ dans une section de la conduite à $t = 70$, pour $n_p = 0.5, \lambda = 30$ et $Re_w = 4000$,

avec le tenseur des taux de déformations de l'écoulement de base $\dot{\gamma}_{ij}^b$. Les résultats numériques montrent que $CR_{\mu'} > 0$ en tout point d'une section de la conduite. Ce résultat pouvait être anticipé en considérant un développement de Taylor au premier ordre de la viscosité autour de l'écoulement de base, qui conduit à $-\mu' \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) dW_b/dr \approx -\dot{\gamma}_{rz}^2(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{rz}} \right)_b \frac{dW_b}{dr} > 0$. L'intégrale $I_{\mu'} = \int_S CR_{\mu'} ds$ augmente avec le caractère rhéofluidifiant. La *contrainte de Reynolds non Newtonienne*, $CR_{\mu'}$ se comporte comme un terme source d'énergie. La réduction de la dissipation visqueuse décrite précédemment est aussi observée pour une perturbation initiale ayant un mode azimutal n différent de 1. De plus, dans ce cas un autre effet fondamental de la non-linéarité de $\mu(\dot{\gamma})$ est mis en évidence, par exemple en considérant une perturbation initiale constituée de trois paires de rouleaux longitudinaux, $n = 3$ (figure 4). Lorsque seule la stratification de la viscosité est prise en compte, le terme d'inertie, non-linéaire quadratique, ne permet pas le transfert d'énergie vers des modes non harmoniques ce qui se traduit sur les figures 4 du haut par le maintien de la structure imposée par les rouleaux initiaux. Lorsque la perturbation de la viscosité est prise en compte, tous les modes sont excités par la non-linéarité de la loi de comportement rhéologique. Le transfert énergétique vers les modes n'étant pas des harmoniques de $n = 3$ est suffisant pour déclencher une modification de la structure de la perturbation, comme le montre la série de figures 4 du bas. Il est alors important de constater qu'au bout d'un certain temps, seuls deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs correspondants au mode $n = 1$ subsistent comme le montre la structure finale de la série de figures 4 du bas. Le mode $n = 1$ finit donc par être le mode dominant même s'il n'est pas perturbé initialement grâce à la non-linéarité de la viscosité. Ce résultat pourrait être relié à la dissymétrie de l'écoulement observée expérimentalement.

6 Conclusion

Un code pseudo-spectral utilisant une méthode de Petrov-Galerkin a été développé pour étudier l'influence de la non-linéarité de la viscosité par rapport au taux de cisaillement sur la stabilité de l'écoulement en conduite cylindrique d'un fluide rhéofluidifiant face à des perturbations bidimensionnelles. Deux effets fondamentaux ont été mis en évidence : (1) une réduction de la dissipation visqueuse, expliquée par l'apparition d'un nouveau terme dans l'équation de Reynolds-Orr (2) un élargissement du spectre de modes de la perturbation.

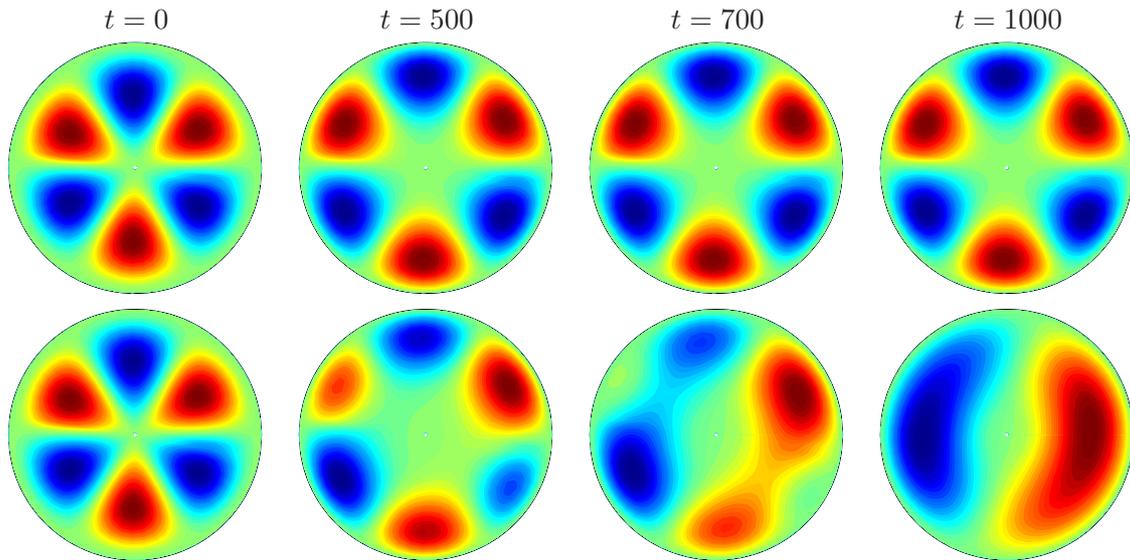


FIGURE 4 – Contours d’iso-valeurs de la vitesse axiale w à $Re_w = 4000$ et différents instants t . Les valeurs négatives sont en bleu et les valeurs positives en rouge. L’échelle de couleur est ajustée en fonction du minimum et du maximum à chaque instant t . Les caractéristiques rhéologiques du fluide sont $n_p = 0.5$ et $\lambda = 30$. La condition initiale est une perturbation constituée de trois paires de rouleaux longitudinaux ($n = 3$; $l = 0$). (Haut) Cas purement stratifié. (Bas) Influence de la non linéarité de μ .

Références

- [1] M. Escudier, F. Presti and S. Smith. Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers. *J. non-Newtonian Fluid Mech*, **81**, 197-213 (1999).
- [2] M. Escudier, R. Poole, F. Presti, C. Dales, C. Nouar, C. Desaubry, L. Graham and L. Pullum. Observations of asymmetrical flow behaviour in transitional pipe flow of yield-stress and other shear-shinning liquids. *J.Non-Newtonian Fluid Mech*, **127**, 143-155 (2005).
- [3] A. Esmael, C. Nouar, Transitional flow of a yield stress fluid in a pipe : Evidence of a Robust coherent structure. *Phys sical review E*, **77**, 057302 (2008).
- [4] M. Escudier, S. Rosa, R. Poole. Asymmetry in transitional pipe ow of drag-reducing polymer solutions. *J.non-Newtonian Fluid Mech*, **161**, 19-29 (2009).
- [5] Á. Meseguer, F Mellibosky. On a solenoidal Fourier-Chevishev spectral method for stability analysis of the Hagen-Poiseuille flow. *Applied Numerical Mathematics*, **57**, 920-938 (2007).
- [6] P.J. Schmid and D.S. Henningson. Stability and Transition in Shear Flows. *Springer Verlag, New York*, (2001).