

Signature fréquentielle des structures cohérentes - Décomposition en Modes Dynamiques Application à un écoulement en cavité ouverte

F. GUENIAT^{a,b}, CH. DOUAY^{a,c}, F. LUSSEYRAN^a, L. PASTUR^{a,b}, TH. FAURE^{a,c}

a. LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

b. Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

c. Université Pierre & Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75005 Paris

Résumé :

La dimension effective de la dynamique d'un écoulement impactant peut-être considérablement réduite par les conditions aux limites et les oscillations auto induites qu'elles engendrent. Dans ce cas la signature spectrale de ces oscillations est associée à des structures spatiales remarquables que l'on souhaite identifier. La méthode de décomposition en modes dynamique[2, 3] (DMD) utilisant l'opérateur de Koopman[1], permet justement d'extraire directement les caractéristiques des modes de Fourier d'un écoulement qui est établi et donc non-linéairement saturé. Nous appliquons la DMD pour mettre en évidence la contribution spectrale des structures longitudinales et transversales de l'écoulement en cavité ouverte.

Abstract :

The actual number of freedom degrees of an impinging flow can be strongly reduced by the boundary conditions and the self sustained oscillations they induce. In that case, power spectrum properties are related with remarkable spatial coherent structures, that one wishes to identify. The Dynamic mode decomposition[2, 3] (DMD) based on the Koopman operator[1], indeed directly gets the properties of Fourier modes from an established flow, flow therefore nonlinearly saturated. We apply DMD to reveal the spectral signature of the longitudinal and spanwise spatial structures in an open cavity flow.

Mots clefs : Écoulement en cavité ouverte, modes dynamiques, modes de Fourier

1 Introduction

Lorsqu'on cherche à comprendre les mécanismes responsables des oscillations spontanées prenant naissance dans les écoulements impactant, il est utile d'identifier la relation entre la signature temps-fréquence de ces oscillations et les structures spatialement cohérentes qui les engendrent. La recherche des champs solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux) permet bien d'établir une relation entre un mode spatial et une fréquence. Mais cette démarche nécessite de connaître l'opérateur d'évolution et ne concerne donc que les approches numériques calculées pour un état pas trop loin du seuil d'instabilité. Pourtant un écoulement du type de celui engendré par une cavité

ouverte en soufflerie est généralement établi autour de grandes fluctuations, car les transitoires sont rapidement oubliés et les modes nonlinéaires développés jusqu'à la saturation. Récemment, Schmid [2, 3] et Rowley [4] ont proposé d'appliquer une méthode de décomposition, basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur d'évolution [1], permettant en pratique d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire.

Nous appliquons la DMD pour mettre en évidence la contribution spectrale des structures longitudinales et transversales de l'écoulement de cavité.

2 Décomposition en modes dynamiques

On considère l'ensemble des données, V_0^{N-1} , constitué des N premières réalisations du champ de vitesse fluctuant, et l'on suppose l'existence d'un opérateur d'évolution, A , tel que :

$$V_0^{N-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\} = \{\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_0, \dots, A\mathbf{u}_{N-2}\}, \quad (1)$$

les indices correspondants aux différents temps t_0, t_1, \dots, t_{N-1} de la mesure. L'opérateur A décrit ainsi l'évolution temporelle de l'observable \mathbf{u} , qui résulte d'un processus non-linéaire, l'écoulement étant supposé décrit par les équations de Navier-Stokes. Les fonctions propres ϕ_i de A , associées aux valeurs propres λ_i , $A\phi_i = \lambda_i\phi_i$, sont caractéristiques de la dynamique temporelle du champ \mathbf{u} . La famille des $\{\phi_i\}$ est de dimension infinie et l'on suppose qu'elle forme une base pour décrire toute réalisation du champ de vitesse :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} \phi_i(t) \boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{r}), \quad (2)$$

$\boldsymbol{\alpha}_i$ étant la projection de \mathbf{u} sur la base des $\{\phi_i\}$. Les $\boldsymbol{\alpha}_i$ sont définis comme les modes dynamiques. On remarque encore, d'après l'équation (1), que la relation (2) peut se réécrire, par récurrence sur le temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{k-1} \phi_i(\mathbf{r})(t_0) \boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{r}). \quad (3)$$

La détermination des $(\phi_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ repose sur l'hypothèse que le champ \mathbf{u}_N peut s'écrire comme la combinaison linéaire des réalisations contenues dans V_0^{N-1} :

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}, \quad (4)$$

En remarquant, d'après (1), que $AV_0^{N-1} = V_1^N$, il résulte de l'hypothèse (4) que l'on peut introduire une matrice C , dite matrice compagnon, telle que $AV_0^{N-1} = V_0^{N-1}C + R$, et R une matrice résidu, qui tend vers zéro lorsque la condition (4) est strictement vérifiée. La matrice C est de dimension $N \times N$ et les c_j sont déterminés, d'après l'égalité (4), en minimisant la norme du vecteur différence $(\mathbf{u}_N - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \mathbf{u}_j)$. Les opérateurs A et C étant similaires si le résidu R est nul, ils partagent les mêmes valeurs propres et leurs vecteurs propres, respectivement $\boldsymbol{\alpha}_j$ et \mathbf{v}_j , sont liés par la relation $\boldsymbol{\alpha}_j \simeq V_0^{N-1} \mathbf{v}_j$. Il est donc possible de déterminer, empiriquement à partir de l'ensemble V_0^{N-1} , les fonctions propres $\{\phi_i\}$ de A , et d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{k-1} \phi_i(t_0) \boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{r}). \quad (5)$$

L'ensemble des conditions initiales $\{\phi_i(t_0)\}$ est déterminée en projetant \mathbf{u}_0 sur les $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$.

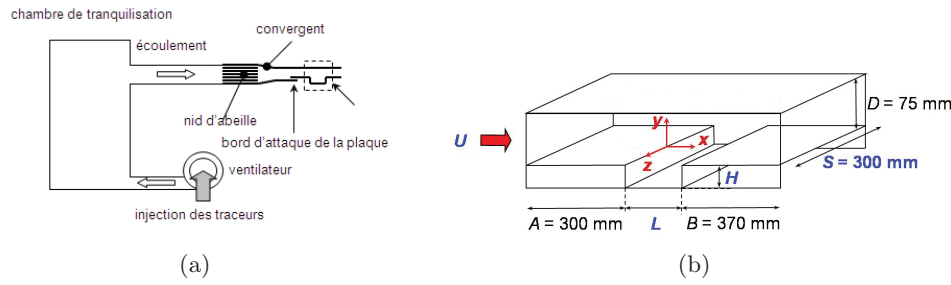
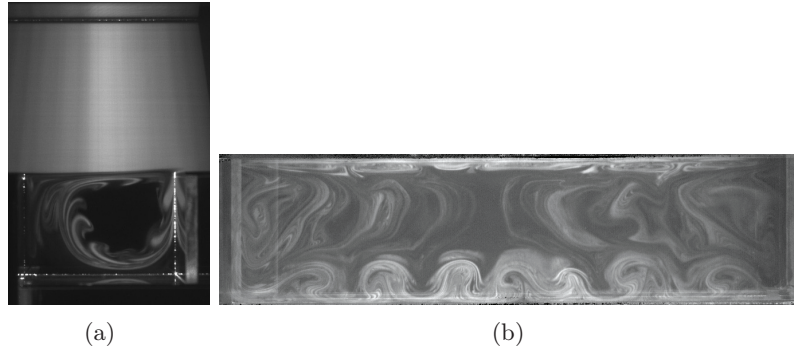


FIGURE 1 – Schéma de (a) la veine d'essais, (b) de la cavité.

FIGURE 2 – Visualisation instantanée de l'écoulement réalisée avec de la fumée de spectacle, pour $L/H = 1.5$, $S/H = 6$ et un nombre de Reynolds Re_H typique de notre étude. (a) En vue de face dans un plan (x, y) , (b) en vue de dessus dans un plan (x, z) situé en $y/H = -0.3$ à l'intérieur de la cavité. On y distingue notamment la couche cisailée et la recirculation intra-cavitaire (a), et une coupe des structures de Taylor-Görtler (b).

3 Conditions expérimentales

Une couche de cisaillement se développe entre la cavité et l'écoulement extérieur, convectivement instable (Fig. 2a). L'interaction de la couche cisailée avec le coin aval de la cavité conduit à des oscillations auto-entretenues de l'écoulement, qui se traduisent par des raies caractéristiques dans le spectre (Fig. 3 b). La courbure induite par la recirculation intra-cavitaire, que l'on peut apercevoir sur la Fig. 2a, est responsable, sur une certaine plage des paramètres de contrôle, du développement d'instabilités centrifuges. Dans le régime non-linéaire saturé, cela donne naissance à des structures de vorticité, toriques, contra-rotatives, du type Taylor-G rtler [5] (figure 2 b). Le champ de vitesse est obtenu par velocim trie par images de particules, à l'aide d'un algorithme de flot optique par programmation dynamique orthogonale, donnant deux ou trois composantes de la vitesse dans le plan considéré. La relation entre fréquences et structures spatiales longitudinales ou transversales est obtenue à partir de l'analyse de deux séries de mesures : l'une dans un plan longitudinal $\{x, y, z = 0.42H\}$ voisin du plan de symétrie [6], l'autre dans un plan transversal $\{z, x, y = -0.3H\}$. Les paramètres définissant les 2 bases de données sont précisés dans les paragraphes correspondants 4.1 et 4.2 .

4 Application de la DMD à l'écoulement de cavité

4.1 Application aux champs de vitesse dans le plan longitudinal

Pour les mesures dans le plan longitudinal, le rapport de forme de la cavité, rapport de sa longueur $L = 100$ mm sur sa hauteur $H = 50$ mm, vaut $L/H = 2$. La vitesse incidente est

$U = 1.9$ m/s, correspondant à un nombre de Reynolds $Re_L = UL/\nu_{air} = 12700$. Le calcul des champs de vitesse a été réalisé à partir d'un enregistrement de 8192 images (512x400) prises avec un ensemble laser-caméra rapide. La fréquence d'échantillonnage des champs de vitesse résultants est de $250Hz$.

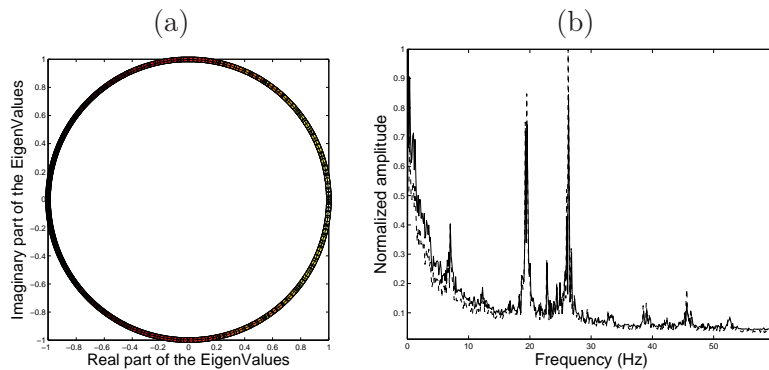


FIGURE 3 – Décomposition en modes dynamiques : (a) valeurs propres de l'opérateur, qui se distribuent sur le cercle unité en régime permanent. Les niveaux de gris traduisent l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode dynamique associé (blanc pour les plus énergétiques). (b) Comparaison des spectres de puissance obtenus par analyse de Fourier (trait plein) ou par décomposition en modes dynamiques (pointillés).

Dans le régime permanent, les valeurs propres λ_k de l'analyse de Koopman sont sur le cercle unité, comme on peut le voir sur la Fig. 3a; on peut donc les écrire sous la forme $\lambda_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$ et identifier $f_k = \omega_k/2\pi$ à une fréquence de Fourier (temporelle). On compose ainsi un spectre en affectant, à chaque canal de fréquence $f_k \pm \delta f_k/2$, l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode dynamique α_k qui lui est associé. On obtient le spectre de la Fig. 3b (trait pointillé), qui tend vers le spectre de Fourier de l'écoulement (en trait plein).

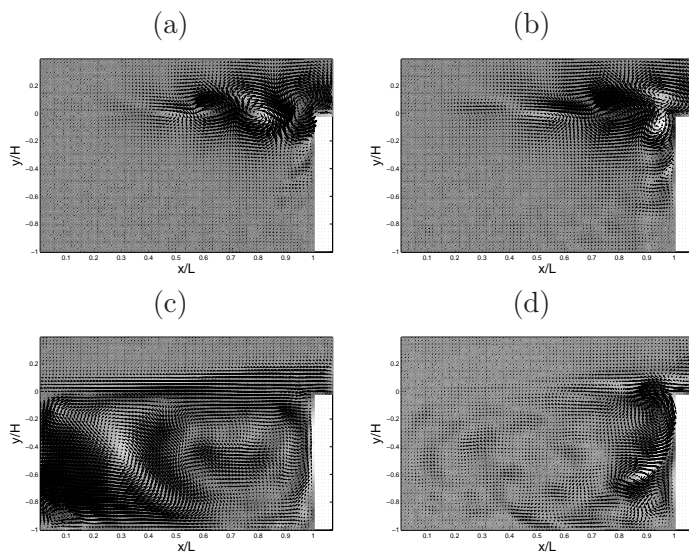


FIGURE 4 – Modes dynamiques α_k associés aux fréquences (a) $f_k = 19.6$ Hz, (b) $f_k = 26.4$ Hz, correspondant à des structures de la couche cisailée, et (c) $f_k = 0.5$ Hz, (d) $f_k = 7.1$ Hz, associées à des structures intra-cavitaires. Le champ de vecteur représente la partie réelle de $\alpha_k = \alpha_{k,x}e_x + \alpha_{k,y}e_y$. L'échelle de gris encode le champ de vorticité.

Les structures spatiales α_k , associées aux fréquences f_k les plus piquées du spectre, sont présentées sur la Fig. 4. Comme on s'y attend, les structures associées aux fréquences les plus élevées et énergétiques du spectre, sont associées à des modes de la couche cisailée (figures 4 a et b). Les basses fréquences sont quant à elles associées à des structures intra-cavitaires,

comme le révèlent les figures 4 c et d.

4.2 Application aux champs de vitesse dans le plan transversal

Pour ces mesures dans le plan transversal, la cavité est de longueur $L = 75$ mm, profondeur $H = 50$ mm et envergure $S = 300$ mm (Fig. 1) de rapport $L/H = 1.5$. La vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite vaut $U = 0.69$ m·s⁻¹ pour un nombre de Reynolds basé sur la profondeur de $Re_H = UH/\nu = 2300$. La fréquence principale des oscillations est ici $f \simeq 3.7$ Hz.

Les spectres d'amplitude de la Fig. 5 représentent l'amplitude des modes dynamiques $\alpha_k(\mathbf{r})$,

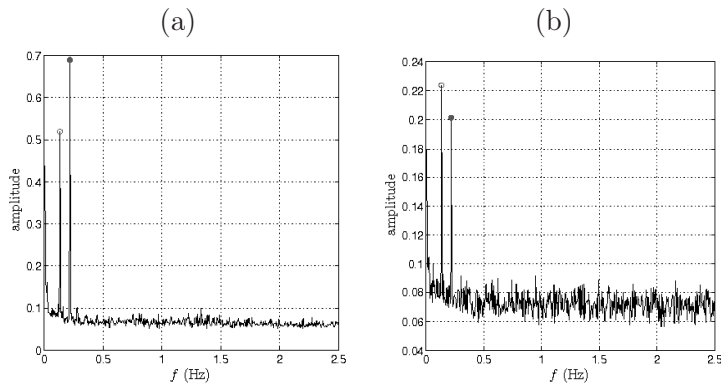


FIGURE 5 – Spectre d'amplitude obtenu par décomposition en modes dynamiques. L'amplitude des canaux fréquentiels est donnée par la norme \mathcal{L}^2 des modes dynamiques α_k pour les ensembles de mesure (a) $\{u_x\}$, (b) $\{u_z\}$.

moyennée sur la grille spatiale, en fonction de la fréquence $f_k = \frac{\ln \lambda_k}{2i\pi\Delta t}$. Les spectres obtenus, selon que les modes sont déterminés sur u_x ou u_z , exhibent les trois mêmes pics principaux, à $f_1 = 0.13$ Hz (pic repéré par un cercle ouvert), $f_2 = 0.22$ Hz (pic repéré par un cercle plein) et $f_3 = 0.005$ Hz, avec des amplitudes relatives différentes et un spectre plus bruité pour u_z . Un petit pic à la fréquence $f_4 = 1.33$ Hz est également visible dans les spectres, qui correspond au repliement de la fréquence d'oscillation de la couche de mélange, détectée aux alentours de 3.7 Hz (la fréquence de Nyquist vaut 2.5 Hz).

Les parties réelles et imaginaires des modes dynamiques principaux, α_1 associé à f_1 et α_2 associé à f_2 , sont représentés sur la Fig. 6. Ils captent la dérive latérale des tourbillons de Taylor-Görtler (à gauche pour α_1 , à droite pour α_2). En effet, on peut voir que la partie imaginaire du mode est essentiellement une quadrature de phase de sa partie réelle, de sorte que, multipliée par le coefficient temporel $\phi_1(t) = e^{2i\pi f_1 t}$, la dynamique résultante est une onde progressive gauche. De façon analogue, le mode α_2 capte une dérive à droite. La distribution du champ de vitesse fait clairement apparaître des structures tourbillonnaires sur les parties hautes et basses de l'image (donc près des bords amont et aval), où se trouvent les tourbillons de Taylor-Görtler. L'amplitude du mode α_1 (respectivement α_2) va croissante (resp. décroissante) depuis le bord droit jusque vers le bord gauche de la zone d'étude, il y a donc une séparation spatiale des fréquences f_1 et f_2 liées chacune à une dérive gauche ou droite, avec un recouvrement autour de z_c .

5 Conclusions

La décomposition en modes dynamiques nécessite des données résolues en temps. C'est pourquoi les données expérimentales utilisées, pour chacun des deux cas présentés dans cette étude, correspondent à des enregistrements réalisés pour 2 configurations différentes avec une applications métrologiques différentes. La cause en est, d'une part, l'écart d'environ une décade entre

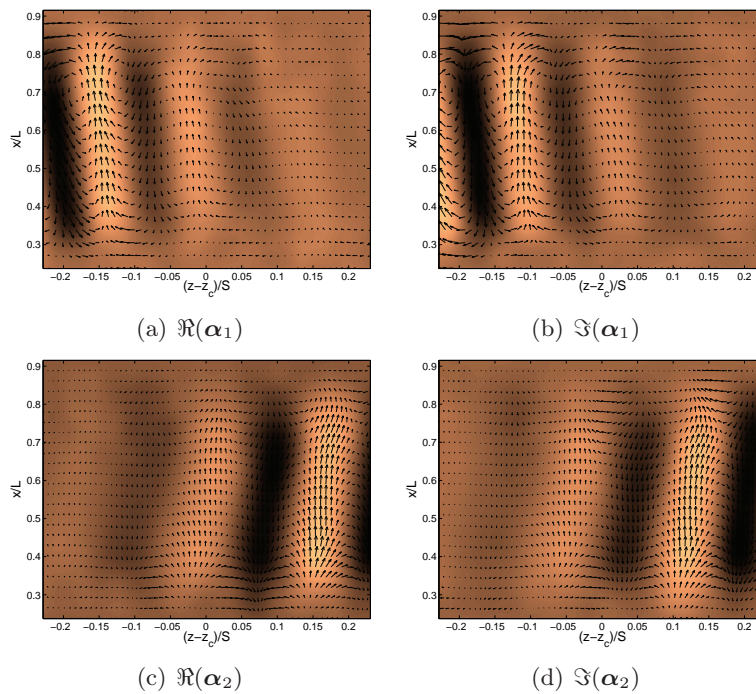


FIGURE 6 – Parties réelles et imaginaires des modes dynamiques α_1 , associé à $f_1 = 0.13$ Hz (pic repéré par un cercle ouvert sur la Fig. 5), et α_2 , associé à $f_2 = 0.22$ Hz (pic associé au cercle plein). Ces modes captent la dérive latérale des tourbillons de Taylor-Görtler, à gauche pour α_1 , à droite pour α_2 . Les vecteurs représentent la partie réelle du champ de vitesse (α_z, α_x) , l'échelle de couleur encode la partie réelle du champ $\alpha_k \cdot e_x$.

les fréquences caractéristiques de la couche de mélange (autour de 30Hz) et celle des instabilités intra-cavitaires (autour de 3Hz) et d'autre part au caractère essentiellement bidimensionnel de la couche de mélange et intrinsèquement tridimensionnel des instabilités centrifuges dans la cavité. D'où l'usage au paragraphe 4.1 d'une PIV-2C à grande cadence et pour le paragraphe 4.2 d'une PIV-stéréoscopique à 5Hz de fréquence de répétition. Dans ce travail nous avons ainsi montré que la DMD extrait très efficacement les modes spatiaux associés aux deux fréquences de la couche de mélange, tout en séparant la contribution des deux fréquences principales en intermittence, ce que la POD ne permet pas dans ce cas. Dans le plan transverse nous avons pu identifier les structures de type Görtler et pour la première fois repérer, avec certitudes, les très basses fréquences correspondantes.

Références

- [1] B.O. KOOPMAN, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17**, pp 315-318 (1931).
- [2] P.J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008).
- [3] P.J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics* **656**, pp. 6-28 (2010).
- [4] C. W. ROWLEY, I. MEZIĆ, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, pp. 115-127 (2009).
- [5] T. FAURE, L. PASTUR, F. LUSSEYRAN, Y. FRAIGNEAU & D. BISCH, Three-dimensional centrifugal instabilities development inside a parallelepipedic open cavity of various shape, *Experiments in Fluids* **47**, pp. 395-410 (2009).
- [6] J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE, N. DELPRAT, Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiments in Fluids* (2010) <http://www.springerlink.com/content/m64283717837p427/fulltext.pdf>