

Stabilité globale linéaire et faiblement non-linéaire du sillage d'objets axisymétriques

J. TCHOUFAG^a, P. ASSEMAT^a, D. FABRE^a, P. MELIGA^b

a. Institut de Mécanique de Fluides de Toulouse, Allée du professeur Camille Soula, 31400 Toulouse
b. Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Procédés Propres, Europôle de l'Arbois, 38, Rue Frédéric Joliot-Curie 13451 Marseille Cedex 13

Résumé :

Des études récentes ont montré que les premières étapes du scénario de transition à la turbulence du sillage d'un disque fixe dans un écoulement uniforme observées par simulations numérique directe [5] peuvent être prédites par un modèle analytique basé sur l'interaction faiblement non linéaire des modes d'instabilité dominants [6]. Nous étendons ce type d'analyse globale à des disques d'épaisseur finie. Pour chaque cas considéré, nous déterminons les coefficients du système d'équations d'amplitudes ainsi que le diagramme de bifurcation correspondant.

Abstract :

Recent studies have shown that the first steps of the transition to turbulence in the wake of a fixed disk in a uniform flow, observed by direct numerical simulations [5], can be predicted by an analytical model based on the weakly nonlinear interaction between the leading unstable modes [6]. This type of global analysis is extended here to various fixed disks of finite thickness. For each case, we compute the coefficients of the amplitude equation system, as well as their corresponding bifurcation diagram.

Mots clefs : Sillage ; Stabilité globale ; Bifurcations

1 Introduction

L'analyse de la stabilité globale des sillages d'objets bidimensionnels et tridimensionnels constitue un champ actif de la recherche actuelle à cause de son importance dans plusieurs champs d'applications (ex : aéronautique, météorologie, biologie)[3]. En ce qui concerne les corps axisymétriques tels que les sphères et les disques, Fabre *et al.* ont établi par DNS les diagrammes de bifurcation décrivant la transition du sillage laminaire à un état chaotique [5]. Meliga *et al.* ont confirmé les différentes bifurcations du sillage d'un disque infiniment mince par un développement faiblement non-linéaire permettant de prendre en compte l'interaction entre les modes d'instabilité dominants [6]. Dans cette étude, nous appliquons ce formalisme à des disques d'épaisseur non-nulle, pour en évaluer le degré de généralisation. Dans un premier temps, une analyse de stabilité linéaire a été menée afin de déterminer la structure des modes dominants ainsi que les seuils d'apparition de ces derniers. Ensuite, l'interaction faiblement non-linéaire de ces modes est mise en oeuvre et appliquée aux disques d'épaisseur 1/10 et 1/3 du diamètre, afin de comparer les résultats obtenus à ceux issus de simulations numériques directes [1, 2]. Le travail présenté ici constitue une première étape vers la compréhension de la complexité des sillages d'objets mobiles pour lesquels la dynamique de l'écoulement est couplée au déplacement de l'objet considéré.

2 Configuration du problème

Nous considérons l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'objets axisymétriques placés en incidence frontale. Chaque objet est caractérisé par un rapport de forme $\chi = \frac{d}{w}$ où d et w sont respectivement le diamètre et l'épaisseur du disque, indiqués sur la figure 1 :

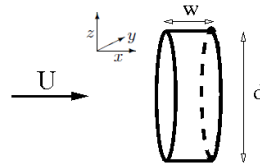


FIGURE 1 – Schéma de la configuration étudiée.

L'écoulement satisfait les équations de Navier-Stokes incompressibles où \mathbf{u} est le champ de vitesse, p la pression et $Re = \frac{Ud}{\nu}$ le nombre de Reynolds où U est la norme de la vitesse à l'infini ($\mathbf{u}_\infty = U\mathbf{e}_x$) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1b)$$

Ces équations, auxquelles s'ajoute la condition de non-glissement sur l'objet, sont résolues par une méthode d'éléments finis s'appuyant sur le solveur d'équations différentielles partielles Freefem++ (<http://www.freefem++.org>). Grâce à son mailleur intégré basé sur un algorithme de Delaunay-Voronoi, on obtient un maillage triangulaire du domaine numérique considéré. Ce solveur réalisant automatiquement une projection dans la base des éléments finis, il suffit alors d'écrire la formulation variationnelle des équations (1a) et (1b). Les matrices construites après projection sont inversées grâce au solveur LU intégrée à la librairie UMFPACK.

3 Analyse de stabilité linéaire

3.1 Formulation

Afin d'étudier la stabilité linéaire du sillage de ces disques d'épaisseur non-nulle, on décompose classiquement les inconnues du problème en un champ de base stationnaire et une perturbation à l'ordre ϵ . Soit le vecteur d'état $\mathbf{Q} = (\mathbf{u}, p)^T$. La décomposition $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \epsilon \mathbf{Q}_1$ permet, à partir de (1a) et (1b), d'obtenir d'une part le système d'équations non-linéaire (2) pour le champ de base :

$$\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -\nabla p_0 + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_0, \quad (2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \quad (2b)$$

D'autre part, on obtient l'équation linéaire pour le champ de perturbation au premier ordre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} \mathbf{Q}_1 + \mathcal{M}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

avec $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\cdot) + (\cdot) \cdot \nabla \mathbf{u}_0 - \frac{1}{Re} \nabla^2 (\cdot) & \nabla \\ \nabla \cdot (\cdot) & 0 \end{pmatrix}$.

Le système d'équations (2) est résolu grâce une méthode itérative de Newton (voir [8]) qui permet de converger très rapidement vers la solution stationnaire de base. La figure 2 montre un exemple de champ de base, correspondant au cas d'un disque « infiniment » mince ($\chi = 10^4$) à $Re = 116.75$. Les caractéristiques telles que la longueur de la zone de recirculation et l'intensité de la vitesse axiale dans celle-ci sont en bon accord avec celles reportées par Meliga *et al.* (voir figure 2 dans [6]).

L'invariance par rotation du champ de base (axisymétrique) et l'invariance par translation temporelle de l'équation (3), permet de considérer des perturbations du type $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_1(r, z) e^{\sigma t + im\theta} + \text{c.c.}$, où « c.c. » désigne le complexe conjugué, $\mathbf{q}_1(r, z) = (u_r(r, z), u_\theta(r, z), u_z(r, z), p(r, z))^T$ le mode global, $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ où σ_r est le taux de croissance et σ_i la fréquence, $m \in \mathbb{Z}$ étant le nombre d'onde azimutal.

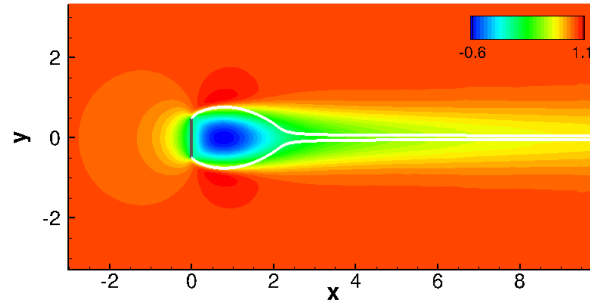


FIGURE 2 – Ecoulement de base axisymétrique à $Re = 116.75$ (Isocontours de vitesse axiale dans un plan longitudinal). Le segment gris est une coupe du disque et la ligne blanche la séparatrice délimitant la zone de recirculation.

Le champ de base stationnaire est dit linéairement instable lorsque la perturbation croît à $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire $\sigma_r > 0$. L'équation (3) prend alors la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\sigma \mathcal{N} \mathbf{q}_1 + \mathcal{M}_{1_m} \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}. \quad (4)$$

\mathcal{M}_{1_m} s'obtient à partir \mathcal{M}_1 en remplaçant ∇ par ∇_m , l'opérateur de gradient obtenu en substituant ∂_θ par le prefacteur im . Dans la résolution pratique, l'invariance du système par la transformation $(m, \sigma, u_r, u_\theta, u_z, p) \rightarrow (-m, \sigma, u_r, -u_\theta, u_z, p)$ permet d'explorer dans un premier temps uniquement les valeurs $m \geq 0$. Pour chaque valeur de m et pour chaque géométrie considérée, le problème (4) est résolu grâce à une méthode de Krylov-Schur de la librairie SLEPc (<http://www.grycap.upv.es/slep>).

3.2 Résultats

La résolution du problème aux valeurs propres généralisé (4) pour des valeurs croissantes du nombre de Reynolds permet d'obtenir deux modes instables dominants pour les objets axisymétriques. Premièrement, il apparaît un mode d'instabilité stationnaire ($\sigma_i = 0$) de nombre d'onde $m = 1$ au Reynolds critique Re_A dont la valeur croît avec le rapport de forme χ tel qu'illustre la figure 3(a). Ce mode, noté \mathbf{q}_1^A , possède un plan de symétrie comme le montre la distribution spatiale de la vorticité axiale représenté sur la figure 3(b). En augmentant le nombre de Reynolds, on obtient ensuite une bifurcation de Hopf à $Re_B = Re_B(\chi)$ donnant lieu à un mode spiral \mathbf{q}_1^{B+} d'instabilité oscillante $m = 1$, avec une fréquence caractéristique $\omega = \sigma_i(\chi)$. Il existe également, par symétrie, le mode spiral \mathbf{q}_1^{B-} correspondant à $m = -1$, oscillant à la même fréquence $\omega(\chi)$, mais tournant en sens inverse dans la direction azimutale. La figure 3(c) montre la superposition linéaire des modes \mathbf{q}_1^{B+} et \mathbf{q}_1^{B-} . Cet état, qui présente également un plan de symétrie est à l'origine des célèbres lâchers tourbillonnaires alternés. Enfin, la figure 3(a) montre que les deux modes instables apparaissant ensuite correspondent à $m = 2$. Natarajan & Acrivos [7] et Meliga *et al.* [6] ont obtenu un scénario identique dans le cas d'un disque infiniment mince ($Re_A \simeq 116.8$, $Re_B \simeq 125.2$, $\omega \simeq 0.76$) et d'une sphère ($Re_A \simeq 210$, $Re_B \simeq 116.5$, $\omega = 0.7$). Ces auteurs ont ainsi montré que les modes de nombre d'onde azimutal $m = 0, 2, 3$ sont encore très stables à $Re = Re_B$. Cependant, on note sur la figure 3(a) que dans le cas de cylindres $\chi \sim 1$, les seuils critiques de modes $m = 2$ sont très proches du seuil d'apparition du mode oscillant $m = 1$ de sorte qu'il faudrait prendre en compte l'interaction entre les modes $m = 1$ et $m = 2$ dans l'analyse du régime faiblement non-linéaire. Toutefois, nous ne nous intéressons pas à cette limite si bien qu'on peut raisonnablement restreindre l'étude à l'interaction des modes $m = \pm 1$ pour tenter d'expliquer les premières bifurcations observées à mesure que Re croît.

4 Analyse de stabilité faiblement non linéaire

4.1 Formulation

Nous poursuivons donc notre étude par une analyse faiblement non-linéaire permettant de quantifier à l'ordre dominant l'interaction des différents modes d'instabilité linéaire. Nous avons appliqué aux

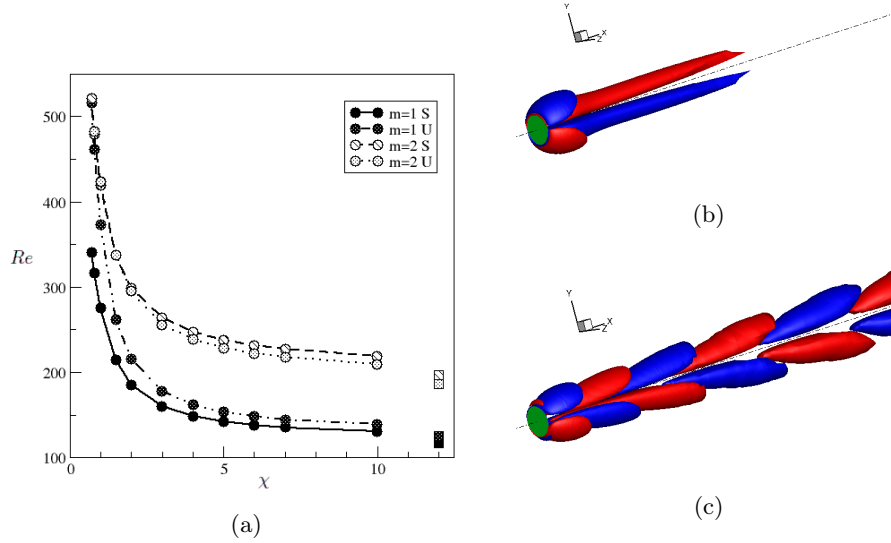


FIGURE 3 – (a) Nombres de Reynolds critiques en fonction du rapport de forme de l’objet. Le mode stationnaire (S) à $m=1$ est en trait continu (première courbe de bas en haut) et à $m=2$ en trait interrompu (quatrième courbe). Le mode instationnaire (U) à $m=1$ est en trait mixte (deuxième courbe) et à $m=2$ en pointillés (troisième courbe). Les points sur les courbes correspondent aux cylindres d’épaisseur non nulle et les carrés isolés au disque infiniment mince ($\chi = 10^4$). (b) Isovaleurs de vorticité axiale (positive en rouge et négative en bleu) pour le mode stationnaire à $m=1$ (c) Idem pour le mode instationnaire.

disques mince $\chi = 10$ et épais $\chi = 3$ la méthode décrite par Meliga, Chomaz & Sipp pour un disque infiniment mince [6]. L’hypothèse majeure de cette démarche consiste à considérer la situation comme une bifurcation de codimension deux imparfaite intervenant à un seuil unique Re_c . Ceci est justifié par le fait que les seuils d’apparition des modes \mathbf{q}_1^A , $\mathbf{q}_1^{B^\pm}$ sont proches. On suppose ensuite un écart au seuil d’ordre ϵ^2 et on définit un paramètre d’ordre unité δ tel que $\frac{1}{Re} = \frac{1}{Re_c} - \epsilon^2\delta$.

On suppose également que les taux de croissance sont d’ordre ϵ^2 et on définit les taux d’ordre unité $\tilde{\sigma}_r^A$ et $\tilde{\sigma}_r^B$ tels que :

$$\sigma_r^A = \epsilon^2 \tilde{\sigma}_r^A, \quad (5a)$$

$$\sigma_r^B + i\sigma_i^B = \epsilon^2 \tilde{\sigma}_r^B + i\omega. \quad (5b)$$

Ensuite, on introduit un opérateur de « décalage » \mathcal{S}_m (voir [6] pour la définition de cet opérateur) de sorte que les modes linéaires \mathbf{q}_1^A , $\mathbf{q}_1^{B^\pm}$ sont neutres à Re_c pour l’opérateur linéarisé « décalé » $\tilde{\mathcal{M}}_{1m}^c = \mathcal{M}_{1m}^c + \epsilon^2 \mathcal{S}_m$, avec $m = \pm 1$. On utilise à cette étape à un développement multi-échelle reposant sur l’introduction d’un temps lent $t_1 = \epsilon^2 t$ et d’une expansion de l’écoulement sous la forme $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \epsilon \mathbf{Q}_1 + \epsilon^2 \mathbf{Q}_2 + \epsilon^3 \mathbf{Q}_3 + \dots$. La solution à l’ordre ϵ étant une combinaison linéaire des modes dominants $\mathbf{q}_1 = A \mathbf{q}_1^A e^{i\theta} + B^+ \mathbf{q}_1^{B^+} e^{i\theta + i\omega t} + B^- \mathbf{q}_1^{B^-} e^{-i\theta + i\omega t} + c.c.$, on aboutit à la forme normale (7) gouvernant l’évolution des amplitudes A , B^+ et B^- . Les coefficients de ce système d’équations correspondent à des produits scalaires entre des termes de forçages (générés par le champ de base et les différents modes linéaires) et des modes globaux adjoints $\hat{\mathbf{q}}_1^A, \hat{\mathbf{q}}_1^{B^\pm}$ obtenus également grâce à la librairie SLEPC.

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{dA}{dt} = \lambda_A A - \mu_A A |A|^2 - \nu_A A |B^+|^2 - \bar{\nu}_A A |B^-|^2 - \chi_A B^+ \bar{B}^- \bar{A}, \quad (6a)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{dB^+}{dt} = \lambda_B B^+ - \mu_B B^+ |B^+|^2 - \nu_B B^+ |B^-|^2 - \eta_B B^+ |A|^2 - \chi_B B^- |A|^2, \quad (6b)$$

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{dB^-}{dt} = \lambda_B B^- - \mu_B B^- |B^-|^2 - \nu_B B^- |B^+|^2 - \eta_B B^- |A|^2 - \chi_B B^+ |A|^2. \quad (6c)$$

4.2 Résultats

4.2.1 Cas $\chi=10$

Dans le cas d'un disque mince d'épaisseur $w = \frac{1}{10}d$, l'analyse linéaire de l'écoulement axisymétrique a permis de détecter deux seuils critiques correspondant au nombre d'onde $m = 1$ à $Re_A = 130.35$ et $Re_B = 138.65$ comme le montre la figure 3(a). Nous avons choisi $\epsilon = 10^{-1}$ et supposé que ces modes peuvent être ramenés au seuil unique à $Re_c = Re_A$. On obtient ainsi les valeurs regroupées dans le tableau 1.

En cherchant les amplitudes sous la forme $A = |A|e^{i\phi_A}$ et $B^\pm = |B^\pm|e^{i\phi_{B^\pm}}$ qu'on injecte dans le système (6a)-(6c), on peut obtenir des solutions de la forme normale analytiquement en réduisant le système à 6 inconnues (3 amplitudes et 3 phases) à un système à 4 inconnues (3 amplitudes et une phase réduite $\phi = \phi_{B^+} - \phi_{B^-} - 2\phi_A$). Il vient alors deux types de solution : modes purs (SS^1 , RW^2 , SW^3) et modes mixtes (MM_π^4 , MM_0^5). Ces solutions sont représentées via la quantité (arbitraire) $\Theta = |A| + |B^+| + |B^-|$ sur le diagramme de bifurcation 4(a), les branches stables étant en trait continu et celles instables en trait interrompu. On constate trois branches stables issues de bifurcations supercritiques. La bifurcation primaire (SS) donnant lieu à \mathbf{q}_1^A à $Re_A = 130.35$ fait place à une seconde (MM_π) à $Re_{A_\pi} \simeq 137$ où il y a interaction des modes \mathbf{q}_1^A , $\mathbf{q}_1^{B^+}$ et $\mathbf{q}_1^{B^-}$. Enfin, la dernière branche (SW) stable naît à $Re_{B_\pi} \simeq 156$ et correspond à la superposition linéaire des modes $\mathbf{q}_1^{B^+}$ et $\mathbf{q}_1^{B^-}$. Ce scénario est similaire à celui observé dans le sillage d'un disque infiniment mince [5]. Ces résultats s'accordent remarquablement avec le scénario de transition obtenu par DNS pour un cylindre $\chi = 10$ car Chrust *et al.* trouvent : $Re_A = 129.6$, $Re_{A_\pi} \in [136.3; 138.7]$, $Re_{B_\pi} \simeq 154.4$. Les coefficients du tableau 1 correspondent à une normalisation particulière des modes globaux [6]. Cependant, le scénario de bifurcation ainsi que les seuils obtenus sont indépendants de la normalisation choisie.

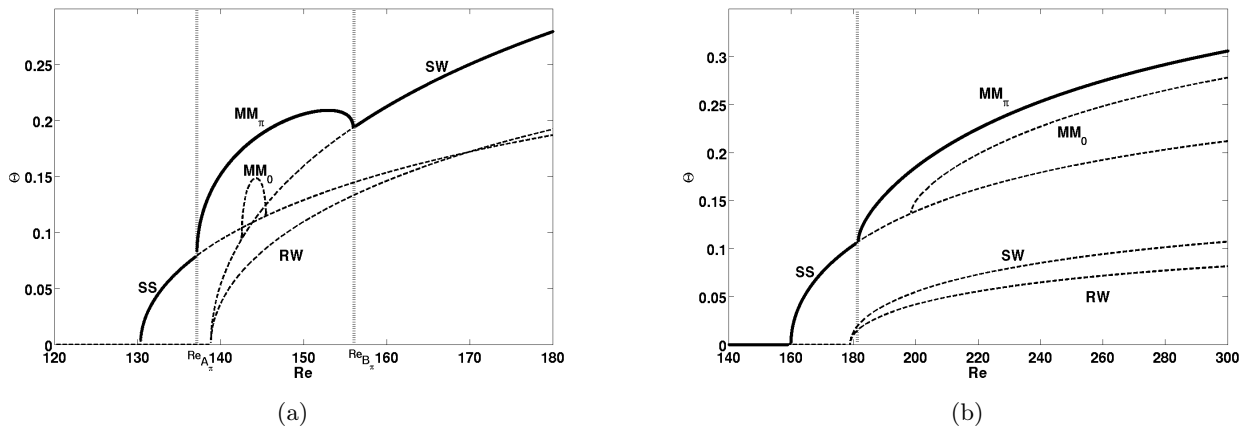


FIGURE 4 – Diagramme de bifurcation pour un cylindre de rapport de forme $\chi = 10$ (a) et $\chi = 3$ (b). Les branches stables (instables) sont en trait continu (interrompu). La nomenclature SS , MM_π , SW , MM_0 , RW est expliquée dans [6].

4.2.2 Cas $\chi=3$

La méthode décrite au paragraphe 4.1 a été également appliquée à un disque plus épais, de rapport de forme $\chi = 3$. Les coefficients obtenus pour la forme normale (6a)-(6c) sont regroupés dans le tableau

1. SS : « Steady State », cette branche correspond à un nouvel état stationnaire due au mode \mathbf{q}_1^A avec brisure de la symétrie axiale.
2. RW : « Rotating Wave », cette branche dénote la rotation dans la direction azimutale due au mode $\mathbf{q}_1^{B^+}$ ou $\mathbf{q}_1^{B^-}$.
3. SW : « Standing Wave », cette branche représente la superposition des modes oscillants $\mathbf{q}_1^{B^+}$ et $\mathbf{q}_1^{B^-}$.
4. MM_π : « Mixed Mode π », cette branche traduit la superposition des trois modes globaux accompagnée d'une brisure de la symétrie plane présente sur les branches SS et SW .
5. MM_0 : « Mixed Mode 0 », sur cette branche, la superposition des modes globaux se fait avec préservation de la symétrie plane.

$\chi = 10$		$\chi = 3$	
$\lambda_A = -0.0076 + 77.74\delta$	$\lambda_B = -3.357 + (71.5 - 15.55i)\delta$	$\lambda_A = 0.0063 + 93.681\delta$	$\lambda_B = -5.843 + (88.158 - 25.47i)\delta$
$\nu_A = 4.695$	$\mu_B = 3.19 - 1.75i$	$\nu_A = 6.083$	$\mu_B = 29.88 + 21.42i$
$\mu_A = 8.338 + 1.542i$	$\mu_B = 2.84 - 0.0127i$	$\mu_A = 3.999 + 0.436i$	$\mu_B = 39.32 + 12.486i$
	$\nu_B = 0.376 + 3.082i$		$\nu_B = 1.605 + 0.21i$
$\chi_A = 6.236$	$\chi_B = 1.397 + 1.61i$	$\chi_A = 1.864$	$\chi_B = 0.989 + 0.917i$

TABLE 1 – Valeurs des coefficients de la forme normale des cylindres de rapport de forme $\chi = 10$ et $\chi = 3$

1 ci-dessus, les modes dominants \mathbf{q}_1^A et $\mathbf{q}_1^{B\pm}$ ayant été calculés à $Re_c = Re_A = 160$.

Le diagramme de bifurcation correspondant est représenté sur la figure 4(b). Les deux premières bifurcations semblent donc être identiques à celles observées pour le disque mince $\chi = 10$. De ce point de vue, ce résultat est inconsistant avec ceux rapportés dans la littérature des disques épais [1, 2]. En effet, la DNS montre que le régime SS doit faire place à un régime MM_0 (à $Re_{A_0} \simeq 180$) différent de MM_π puisque le premier conserve la symétrie observée dans le mode \mathbf{q}_1^A contrairement au second. Cette branche MM_0 donne ensuite lieu à un régime à deux fréquences (à $Re_{B_0} \simeq 185$) avant de bifurquer enfin en régime MM_π (à $Re_{A_\pi} \simeq 190$). Enfin, apparaît à $Re_{B_\pi} \simeq 215$ le régime SW . Notre démarche semble donc incapable de détecter convenablement les transitions observées dans le cas $\chi = 3$. A ce stade de l'étude, nous pensons que ceci est dû à l'écart entre les Reynolds critiques, qui est plus grand à $\chi = 3$ ($\Delta Re = 17.5$) qu'à $\chi = 10$ ($\Delta Re = 8.3$). Par conséquent, il est possible que l'hypothèse de bifurcation de codimension multiple sous-jacente au développement asymptotique ne soit plus valide.

5 Conclusion

L'analyse de stabilité globale linéaire du sillage d'objets cylindriques a permis de détecter les seuils critiques d'apparition des modes d'instabilité dominants pour $\chi \in [1; 10]$. Lorsque ces seuils sont suffisamment proches, comme dans le cas de cylindres minces ($\chi \gtrsim 5$), le formalisme d'analyse faiblement non-linéaire décrit par Meliga *et al.* prédit des transitions dont les seuils et les solutions sont en bon accord avec celles observées par DNS.

Nous travaillons actuellement sur la généralisation de ce formalisme au cas des objets mobiles [4], pour lesquels il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre les équations du fluide et celles régissant le déplacement de l'objet.

Références

- [1] Auguste, F., Fabre, D., Magnaudet, J. 2010 Bifurcations in the wake of a thick circular disk *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24** 305-313
- [2] Chrust, M., Bouchet, G., Dusek, J. 2010 Parametric study of the transition in the wake of oblate spheroids and flat cylinders *J. Fluid Mech.* **665** 199-208
- [3] Ern, P., Fabre, D., Risso, F., Magnaudet, J. 2012 Wake-induced oscillatory paths of rising or falling rigid bodies *Submitted to Ann. Rev. Fluid Mech.*
- [4] Fabre, D., Assemat, P., Magnaudet, J. 2010 A quasi-static approach to the stability of the path of heavy bodies falling within a viscous fluid *Accepted for publication in J. Fluid Struct.*
- [5] Fabre, D., Auguste, F., Magnaudet, J. 2008 Bifurcations and symmetry breaking in the wake of axisymmetric bodies *Phys. Fluids* **20** 051702
- [6] Meliga, P., Chomaz J.M., Sipp, D. 2009 Global mode interaction and pattern selection in the wake of a disk : a weakly nonlinear expansion *J. Fluid Mech.* **633** 159-189
- [7] Natarajan, R., Acrivos, A. 1993 The instability of the steady flow past sphere and disks *J. Fluid Mech.* **254** 323-344
- [8] Sipp, D., Lebedev, A. 2007 Global stability of base and mean flows : a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows *J. Fluid Mech.* **593** 333-358