

# ETUDE DE L'INSTABILITE BAROCLINE SYMÉTRIQUE ENTRE DEUX SPHERES CONCENTRIQUES EN ROTATION

M.MAHOUL<sup>a</sup>, Z.TIGRINE<sup>a</sup> et A.MAHAMEDIA<sup>a</sup>

*a. Laboratoire de Thermodynamique et systèmes énergétiques, Faculté de Physique -USTHB,  
BP N° 32 El Alia- Alger, Algérie.*

## Résumé

*Nous proposons une étude expérimentale des instabilités hydrodynamiques dans un écoulement visqueux constitué d'un seul fluide et aussi de deux fluides non miscibles, entre deux sphères coaxiales en rotation.*

*Le travail porte sur l'examen de l'effet d'un fluide léger sur la stabilité de l'écoulement de base constitué d'un fluide plus dense. L'étude est menée à travers le rapport d'aspect  $\Gamma = H/d$  où  $H$  est la hauteur globale des deux fluides contenus dans le dispositif qui offre un espace annulaire  $d$ . On caractérise l'influence de ce paramètre sur l'apparition des instabilités et on suit l'évolution des caractéristiques de l'écoulement dont la visualisation des régimes et structures associés au mouvement est réalisée au moyen d'une technique photométrique.*

*Les résultats obtenus permettent de présenter l'évolution du rayon de giration tourbillonnaire  $\rho^*$  en fonction du nombre de Reynolds et de Richardson. Les résultats montrent que l'instabilité barocline symétrique apparaît pour un angle d'inclinaison du dispositif compris entre  $65^\circ$  et  $82^\circ$ .*

## Abstract

*We propose an experimental study of hydrodynamic instabilities within a flow of several kind of fluids which are combined in a mixture. The latter is composed by: a viscous fluid and two of immiscible fluids between two coaxial rotating spheres, where the inner sphere is rotating and the outer being held fixed. This work focuses on the effect of an immiscible fluid on the flow instability of basic flow system which is completely filled. The role of the aspect ratio  $\Gamma = H / d$  of fluid confined between two coaxial spheres. Is crucial in the study we characterize the influence of this parameter on the onset of instability and we follow the changing characteristics of the flow visualization with plans and structures related to movement is performed using a photometric technique. This work is also devoted to study the effect of the inclination and the aspect ratio  $\Gamma$  on the conditions for the appearance of symmetric baroclinic instability. The results are used to present the evolution of the vortex gyration radius  $\rho^*$  as a function of Reynolds and Richardson numbers. The results show that the symmetric baroclinic instability appears for an angle of inclination of between  $65^\circ$  and  $82^\circ$ .*

**Mots clefs :** Ecoulement entre sphères coaxiales en rotation – Transition laminaire-turbulent – Visualisation – Taux de remplissage – Instabilité Barocline.

## 1.Introduction.

L'étude des écoulements de fluides confinés entre deux sphères coaxiales en rotation constitue un domaine de recherche privilégiée en hydrodynamique physique. Le système de Taylor-Couette sphérique a pour objectif la description des mécanismes de l'instabilité en régime de transition laminaire-turbulent et la prévision des propriétés liées à certains phénomènes naturels. En vue de mieux appréhender les propriétés et les mécanismes des instabilités en Physique atmosphérique (Météorologie mondiale / instabilité barocline), en Géophysique planétaire (Effet dynamo).

L'écoulement de Taylor- Couette sphérique est considéré comme étant plus complet que celui de Taylor -Couette (écoulement entre deux cylindres de longueur finie ou infinie) ou encore celui entre deux disques en rotation. En effet, au niveau de la région équatoriale, l'écoulement de Couette sphérique est analogue à celui de Couette Taylor. Au niveau des pôles, il est analogue à celui entre deux disques en rotation. Donc, l'écoulement de Couette sphérique devra exhiber une variété plus riche de phénomènes hydrodynamiques. Il représente un modèle physique qui constitue une extension des célèbres travaux effectués par G.I Taylor (1923) [1].

Il peut être étudié sous deux aspects où on peut considérer soit le cas isotherme, soit le cas avec transfert de chaleur. L'étude avec transfert thermique vise la modélisation du problème posé par la convection thermique au coeur de la terre. Quant à l'étude de l'écoulement de Couette sphérique sans transfert de chaleur, elle sert à mettre en évidence les effets de la rotation dans le développement des instabilités qui apparaissent au sein de l'écoulement confinés. Les études théoriques et expérimentales de I.U.K. Bratukhin [2], G.N. Khlebutin [3] et M. Wimmer [4] [5], ont été menées dans ce but. G.N. Khlebutin [3] fut le premier à observer expérimentalement l'existence des cellules de Taylor dans l'écoulement sphérique.

Des études consacrées à l'instabilité barocline ont été effectuées en 1947 par J.G Charney (1947) [6] et en 1949 par E.T Eady [7] à travers les analyses d'un écoulement linéaire. Ils ont résolu l'équation de la vorticité dans le cas d'une approximation idéalisée (fluide parfait).

En 1971 P.H. Stone et al [8] ont calculé les transports de chaleur et de quantité de mouvement qui accompagnent les instabilités baroclines croissantes dans le modèle d'Eady. Les transports sont calculés pour les deux genres d'instabilités baroclines : Géostrophique et symétrique, sans aucune restriction sur la stratification telle mesurée par le nombre de Richardson.

La présente étude, à caractère expérimentale, a pour but de contrôler la surface libre et d'examiner l'effet combiné d'un fluide non miscible ( $f$ ) et du taux de remplissage  $\Gamma_{eau} = H_{eau}/d$  sur les conditions d'apparition des instabilités en régime de transition laminaire-turbulent et par conséquent sur les paramètres internes des instabilités de l'écoulement pour différents taux de remplissage. En outre, pour un espace annulaire partiellement rempli, l'effet de l'inclinaison du dispositif est envisagé afin de mettre en évidence son incidence sur l'apparition de l'instabilité barocline symétrique. Les résultats obtenus permettent de présenter l'évolution du nombre de Taylor critique  $Ta_c$ , Reynolds  $Re$  et de Richardson en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$ . Le dispositif expérimental est décrit sommairement dans le paragraphe qui suit.

## 2. Dispositif expérimental de mesure et conditions expérimentales

Les essais expérimentaux sont effectués à l'aide d'un dispositif constitué de deux sphères coaxiales de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , définissant un espace annulaire  $d = (5 \pm 0,2)$  mm avec un jeu radial  $\delta = 0,11$ , réalisées en plexiglas, offrant ainsi la possibilité d'effectuer une étude qualitative par visualisation (figure. 1a). La sphère intérieure tournante est entraînée par un moteur à courant continu.

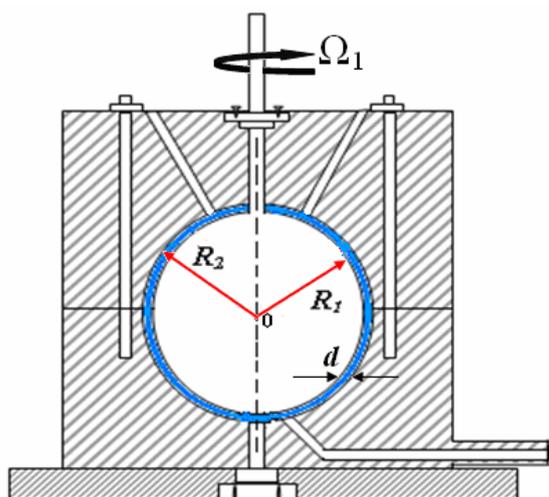


FIG.1a Dispositif expérimental

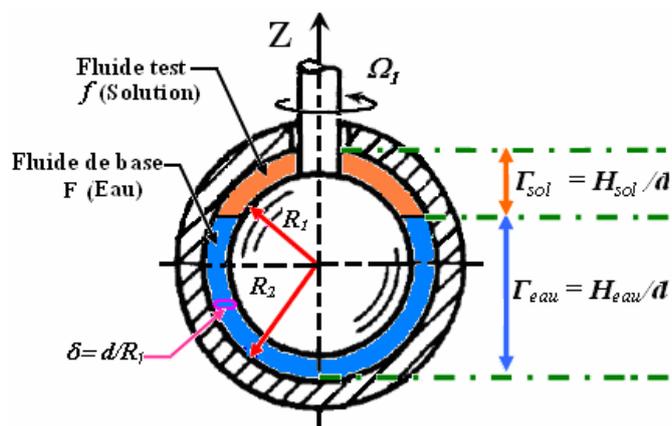


FIG.1b Système d'écoulement

Dans notre expérience nous avons utilisé deux fluides immiscibles (Figure.1b). Le premier fluide est un produit composé d'huile de Vaseline, d'éther de pétrole et de poudre d'aluminium de masse volumique  $\rho_{\text{sol}} = \rho_1 = (777,23 \pm 9,72) \text{ kg/m}^3$  et de viscosité cinématique  $\nu_1 = 5,43.10^{-6} \text{ Pa.s}$  à la température  $T = 20^\circ\text{C}$ . Le deuxième fluide est une solution constituée d'eau de masse volumique  $\rho_{\text{eau}} = \rho_2 = (999.6 \pm 1.1) \text{ kg/m}^3$  et de viscosité cinématique  $\nu_2 = 1.01.10^{-6} \text{ Pa.s}$  à la température  $T = 20^\circ\text{C}$ , et d'un produit de visualisation le kalliroscope AQ 1000 à raison de 2% du volume global. Ce produit est connu pour sa bonne qualité réfléchive de la lumière. On s'est placé dans les conditions expérimentales décrites plus haut et on note les différents régimes pour un facteur d'aspect donné correspondant au fluide lourd (eau)  $\Gamma_{\text{eau}} = H_{\text{eau}}/d$  dans l'intervalle  $8 \leq \Gamma_{\text{eau}} \leq 16$ , ce qui définit le facteur d'aspect de la solution  $4 \leq \Gamma_{\text{sol}} \leq 12$ . La hauteur maximum de chacun des deux fluides est  $H_{\text{max}} = (100 \pm 0,2) \text{ mm}$ . Dans cadre de l'étude de l'effet d'inclinaison du dispositif nous n'avons utilisé que le premier fluide.

### 3. Résultats et discussion

#### 3.1 Système d'écoulement sphérique en position vertical

##### • Effets du rapport d'aspect de l'eau sur les valeurs des nombres critiques de Taylor

Cette étude consiste à mettre en évidence les différentes instabilités hydrodynamiques d'un écoulement entre deux sphères concentriques en rotation soumis aux effets du facteur d'aspect et de l'interaction du mouvement de deux fluides non miscibles superposés séparés par une interface liquide-liquide (eau-huile). Le système d'écoulement en position verticale est totalement rempli  $\Gamma_{\text{max}} = 20$  où la hauteur maximale  $H_{\text{max}} = H_{\text{eau}} + H_{\text{sol}}$ . Il apparaît nécessaire d'examiner les effets d'interaction d'un fluide non miscible d'une hauteur  $H_{\text{sol}}$  sur la stabilité du mouvement et son évolution au cours du régime de transition pour une hauteur  $H_{\text{eau}}$  donnée.

Nous augmentons la vitesse de rotation de la sphère intérieure de façon quasi statique. On a pu ainsi déterminer les valeurs critiques du nombre de Taylor correspondant à l'apparition de chaque nouvelle structure au sein de l'écoulement. Des observations attentives sont faites pour chaque seuil critique du régime afin de s'assurer la nature de l'instabilité. Dans ces conditions on a pu étudier en fonction du rapport d'aspect  $\Gamma$  l'évolution des différents nombres critiques de Taylor  $Tc_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$  et 5) définissant les seuils d'apparitions des différents régimes d'écoulement (figure.2).

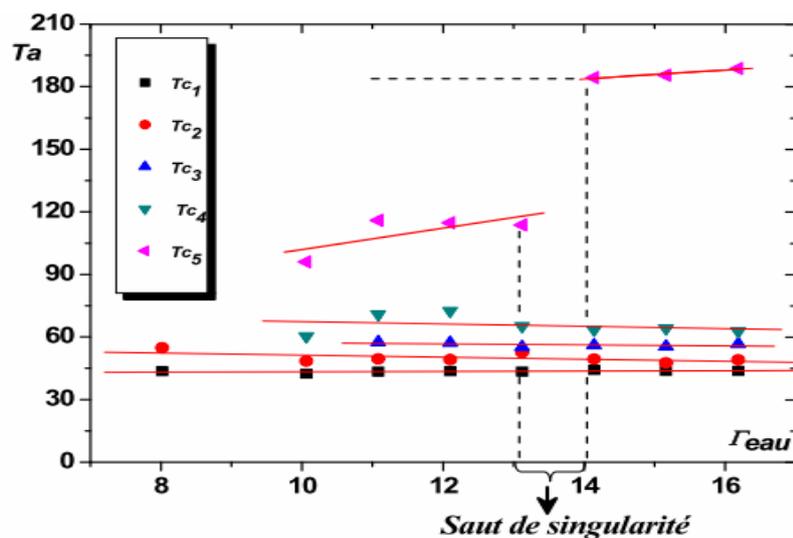
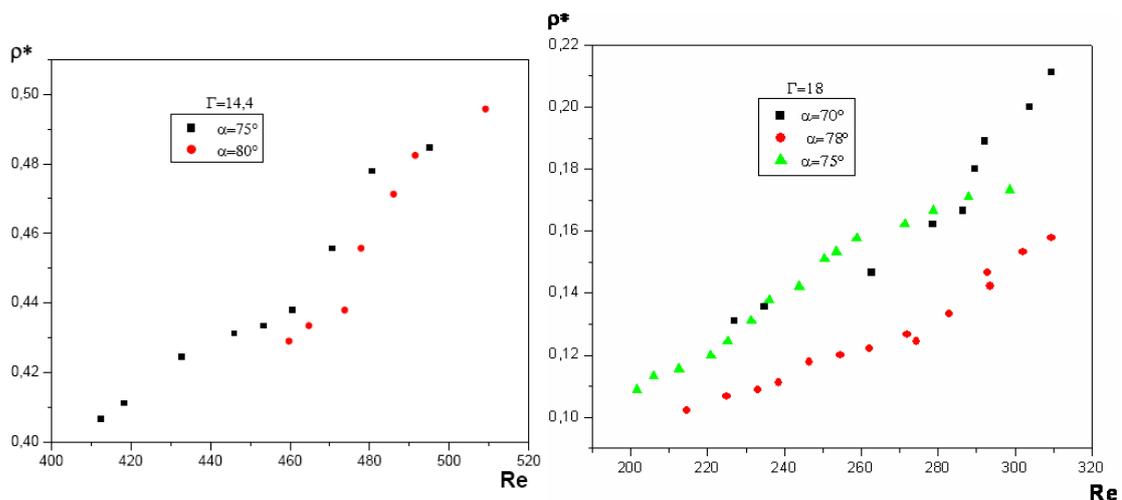


FIG.2 - Evolution des nombres de Taylor critiques en fonction du taux de remplissage  $\Gamma_{\text{eau}}$ .

D'après ces résultats nous remarquons que l'évolution des quatre premiers nombres de Taylor critiques liés à l'apparition des instabilités en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma_{\text{eau}}$  demeure sensiblement constante dans toute la gamme étudiée  $8 \leq \Gamma_{\text{eau}} \leq 16$ . Lorsque  $\Gamma_{\text{eau}}$  diminue on note que le Mode (ondes instationnaires) se comporte différemment. On remarque que l'apparition du régime instationnaire caractérisant le Wavy Mode est avancée lorsqu'on diminue  $\Gamma_{\text{eau}}$  et, particulièrement dans l'intervalle  $10 \leq \Gamma_{\text{eau}} \leq 13$ . L'observation de l'évolution du régime Wavy Mode met en évidence l'existence d'une hauteur critique  $\Gamma_{\text{eau}} = 13$  définissant la limite maximum par rapport au plan équatorial où se produit un saut considérable du nombre critique  $T_{c5}$ .

### 3.2 Système d'écoulement sphérique en position incliné

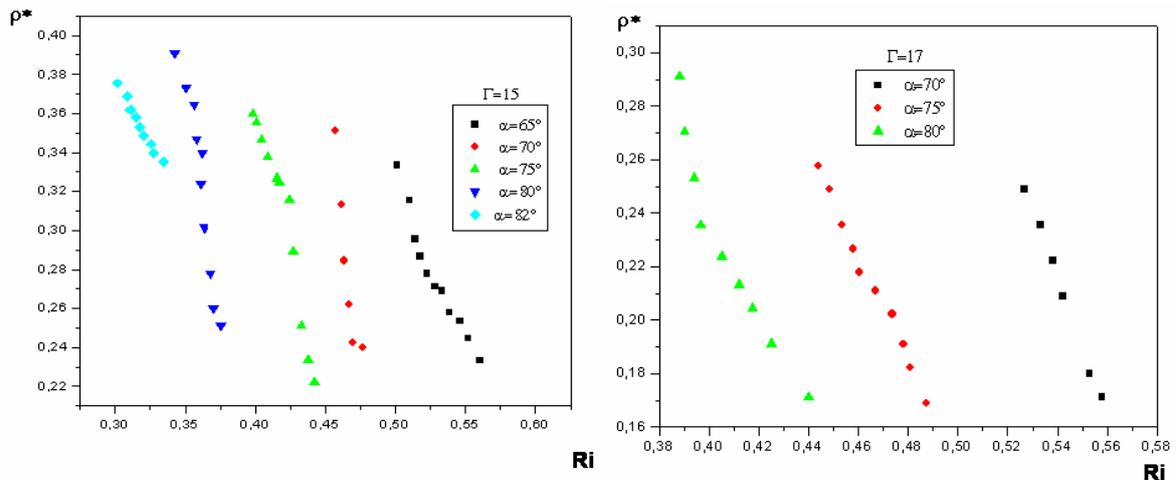
Dans cette partie, nous nous intéressons à l'apparition de l'instabilité barocline sous l'effet de l'inclinaison du dispositif expérimental. Pour une inclinaison fixée, nous augmentons progressivement la vitesse de rotation de la sphère jusqu'à l'obtention éventuelle du tourbillon d'instabilité barocline symétrique. Lorsque le système est totalement rempli et quelque soit l'inclinaison, nous n'avons observé aucun tourbillon caractérisant l'instabilité barocline. Par contre, en diminuant lentement la hauteur du fluide dans le dispositif au moyen du système de vidange, on a observé l'apparition du premier tourbillon pour un taux de remplissage  $\Gamma = 18,5$ . Nos observations sont menées pour différentes valeurs du taux de remplissage  $\Gamma$  et de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du dispositif. Le traitement photométrique des images obtenues nous a permis d'étudier l'évolution du rayon de giration du tourbillon en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et ce, pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du dispositif expérimental et du rapport d'aspect  $\Gamma$ . Les résultats sont présentés sur les figures 3 et 4.



**FIG.3 :** Evolution du rayon de giration  $\rho^*$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  pour plusieurs angles d'inclinaison  $\alpha$  dans les cas des rapports d'aspects  $\Gamma = 14,4$  et  $\Gamma = 18$ .

L'analyse des courbes représentant l'évolution du rayon de giration de l'instabilité  $\rho^*$  en fonction du nombre de Reynolds permet les observations suivantes :

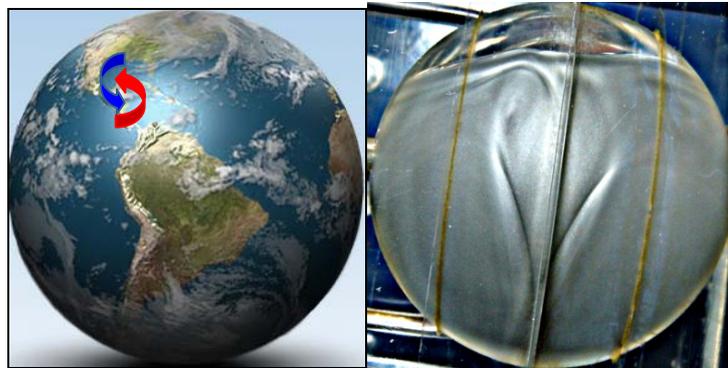
- L'augmentation progressive de la vitesse de rotation de la sphère intérieure entraîne une augmentation de la taille de l'instabilité symétrique.
- Aussi, on constate que pour le taux de remplissage  $\Gamma = 14,4$  le rayon de giration augmente avec l'angle d'inclinaison  $\alpha$
- Par contre dans le cas de  $\Gamma = 18$ , on observe une situation inverse, c'est-à-dire que le rayon de giration diminue lorsque l'angle d'inclinaison  $\alpha$  croît.



**FIG. 4 :** Evolution du rayon de giration  $\rho^*$  en fonction du nombre de Ri pour différents angles d'inclinaison  $\alpha$  dans les cas des rapports d'aspects:  $\Gamma=16$  et  $\Gamma=17$

L'analyse des courbes représentant l'évolution du rayon de giration tourbillonnaire  $\rho^*=r/R_l$  en fonction du nombre de Richardson Ri, montre que la taille de l'instabilité barocline symétrique augmente en fonction de la vitesse de rotation et de la hauteur de remplissage imposée.

Lorsque le dispositif est partiellement ( $\Gamma < 18,5$ ), l'instabilité apparaît (figure.5) pour une inclinaison  $\alpha = 60^\circ$ . Cette position correspond à la position géographique du golf du Mexique où se produisent régulièrement des perturbations climatiques: cyclones, tornades, ouragans etc...



**FIG. 5 :** Localisation expérimentale de l'instabilité:  $\theta = 60^\circ$ ,  $\varphi = 23^\circ$ . Position réelle du cyclone (valeur moyenne):  $\theta = 60^\circ$ ,  $\varphi = 23^\circ$

## 4. Conclusion

Notre étude expérimentale a permis de mettre en évidence l'influence d'un fluide léger non miscible sur le déclenchement au sein d'un fluide plus dense des instabilités hydrodynamiques connues dans l'écoulement de Taylor-Couette sphérique telles que les ondes de Taylor, le Spiral Mode, le Spiral Mode +Wavy Mode, le Spiral Wavy Mode et le Wavy Mode. Nos expériences réalisées avec deux fluides non miscibles ont permis de remarquer des modifications relatives à l'apparition et l'étendue du domaine d'existence des différents régimes d'écoulement. Nous avons pu constater que l'effet du facteur d'aspect  $\Gamma_{eau}$  et la superposition d'un fluide immiscible ont pour conséquence de retarder relativement l'apparition des régimes d'onde en Mode Spiral et Spiral Wavy Mode mais d'un autre

côté, ils ont tendance à accélérer le déclenchement du Wavy Mode et du chaos lorsque  $\Gamma_{eau}$  diminue. L'inclinaison du dispositif a offert la possibilité d'observer l'apparition de l'instabilité barocline à caractère symétrique pour le nombre de Richardson tel que  $0,22 \leq Ri \leq 0,6$  et de suivre son évolution en relation avec la vitesse de rotation de la sphère intérieure. Le traitement photométrique des images a permis encore de représenter l'évolution de la taille et des caractéristiques dynamiques du tourbillon en fonction des nombres de Reynolds  $Re$  et de Richardson  $Ri$ .

## Nomenclature

|            |   |
|------------|---|
| $R_1$ :    | rayon de la sphère intérieure (m)                                 |
| $R_2$ :    | rayon de la sphère extérieure (m)                                 |
| $\rho^*$ : | rayon de giration tourbillonnaire $=r/R_1$                        |
| $H_1$ :    | hauteur de remplissage du fluide dense (m)                        |
| $H_2$ :    | hauteur de remplissage du fluide léger (m)                        |
| $d$ :      | espace annulaire ou gap $= R_2 - R_1$ (m)                         |
| $\delta$ : | jeu radial $= d/R_1$  |
| $\rho_1$ : | masse volumique de la solution                                    |
| $\rho_2$ : | masse volumique de l'eau  |
| $\nu_1$ :  | viscosité cinématique de la solution                              |
| $\nu_2$ :  | viscosité cinématique de l'eau                                    |
| $Re$ :     | nombre de Reynolds $= (R_1 \Omega d / \nu)$                       |
| $Ri$ :     | nombre de Richardson $= \left( \frac{gH}{V^2} \right)^{1/4}$      |
| $Ta$ :     | nombre de Taylor $= Re \sqrt{d / R_1}$                            |
| $Tc_1$ :   | ondes de Taylor stationnaires (TVF)                               |
| $Tc_2$ :   | spiral Mode SM  |
| $Tc_3$ :   | wavy Mode+ Spiral Mode (Ondes instationnaires non axisymétriques) |
| $Tc_4$ :   | spiral Wavy Mode (SWM)  |
| $Tc_5$ :   | wavy Mode (WM) (Ondes instationnaires)                            |

## Références

- [1] Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. A223, 289-293 (1923).
- [2] Bratukhin I.U. K. On the evaluation of the critical Reynolds number for the flow between two rotating spherical surface. J. Appl. Math. 25, 1286. (1961).
- [3] Khlebutin G.N. Stability of fluid motion between a rotating and a stationary concentric sphere, 1968. Fluid Dyn. 3, 31-32. (1968).
- [4] Wimmer M. Experiments on a viscous fluid flow between rotating spheres. J. Fluid Mech., vol 78, part 2, pp. 317-335 (1976).
- [5] Wimmer M. Viscous flows and instabilities near rotating bodies Prop. Aerospace Sci., vol 25, pp. 43-103, (1988).
- [6] J.G. Charney. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J. Meteor., 4: 135-163, 1947 Processes in geophysics 9: 487-496. (2002)
- [7] E.T. Eady. Long waves and cyclone waves. Tellus 1, pp 33-52 (1949).
- [8] P.H. Stone Baroclinic stability under non-hydrostatic conditions. J. Fluid 45, (1971).