

# *Comportement d'une turbulence homogène*

## *Stablement stratifié et en rotation*

Abdallah Jaouabi<sup>1\*</sup>, Taieb Lili<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Fluides Faculté de science Tunis

\* 26 rue Tabari Ezzahra 2034 Tunisie, Email : [jaouabia@yahoo.fr](mailto:jaouabia@yahoo.fr)

### **Résumé**

*Un modèle numérique a été développé pour prédire les effets de rotation et de stratification sur une telle grandeur.*

*Une analyse linéaire dans l'espace spectral permet d'accéder à l'évolution des différentes grandeurs physiques caractéristiques de ces turbulences. Ces quantités sont étudiées en fonction de nombres sans dimension, nommément  $Fr$ ,  $Ro$  et  $B = Fr / Ro$ . Les résultats obtenus en utilisant le modèle mis au point sont relativement cohérentes avec les résultats de Cambon.*

**Mots-clés :** Turbulence homogène, Rotation, stratification stable, nombre de Prandtl, nombre de Froude, nombre de Rossby.

### **1 Introduction**

Un grand nombre de travaux concernant les effets de la rotation et de la stratification sur l'évolution d'une turbulence homogène ont été réalisés [1,2], Cambon et al. [3] avancées, bien sur le plan numérique que sur le plan analytique, dans la prédiction de la turbulence homogène évoluant en présence d'une rotation ou d'une stratification séparément.

Cependant, des difficultés majeures se présentent particulièrement dans le cas relatif à une turbulence où il y a une équipartition entre les effets de rotation et ceux induits par la stratification décrite par le rapport entre le nombre de Froude et le nombre Rossby égal à l'unité.

Il est important d'indiquer que les écoulements tournants stratifiés sont souvent étudiés en se basant sur le concept théorique de la turbulence quasi géophysique [1]. Tel la turbulence est caractérisée par de petit nombre de  $Ro$  et de  $Fr$  et par une grande échelle de temps liée aux effets de pesanteur et l'inertie. En faits on distingue différentes cas. Un écoulement purement stratifié caractérisé par  $B=0$ , quand  $B=0.1$  l'écoulement évolue en présence d'une stratification dominante.  $B=10$  correspond à un écoulement en rotation dominante. Quand  $B$  est très important ( $B = \infty$ ), l'écoulement évolue en présence d'une rotation pure et finalement lorsque  $B = 1$  l'écoulement est considérée non dispersif ; dans ce cas l'écoulement correspond à une équipartition entre la rotation et la stratification.

Nous nous proposons de simuler numériquement une turbulence homogène stablement stratifiée et en rotation en ayant recours à une formulation linéaire dans l'espace spectral. Nous commençons par écrire les équations d'évolution des spectres de corrélations doubles en deux instants. Des conditions initiales seront associées à ces équations. Dans la littérature, ces spectres de corrélations doubles en deux instants sont obtenus à partir de solution analytique pour les spectres de vitesse et de température. La procédure que nous adoptons dans cette article et qui consiste à intégrer numériquement les équations d'évolution

des spectres de corrélations doubles présente l'intérêt de pouvoir être étendue à des cas de turbulence pour les quels on ne dispose pas de solutions analytiques.

## **2 Approche linéaire dans l'espace spectral- équation d'évolution des spectres de corrélations doubles en deux instants**

On considère un écoulement turbulent homogène, présentant une stratification stable selon la direction vertical (axe  $x_3$ ). Les équations d'évolution des fluctuations de vitesses  $u_i(\vec{k}, t)$  et de température  $\theta(\vec{k}, t)$  se présentent dans l'espace spectral comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(\vec{k}, t) = -\nu k^2 u_i(\vec{k}, t) - \left[ \delta_{i3} - \frac{k_i k_3}{k^2} \right] \alpha g \theta(\vec{k}, t) + 2\Omega \frac{k_3}{k^2} \varepsilon_{ilm} k_l u_m(\vec{k}, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(\vec{k}, t) = -\chi k^2 \theta(\vec{k}, t) - \frac{N^2}{\alpha g} u_3(\vec{k}, t) \quad (2)$$

$\Omega$  est la vitesse angulaire du repère tournant dans la direction spectrale ascendante (axe  $z$ ).  $\nu$  et  $\chi$  sont respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité thermique.  $g$  est l'accélération de pesanteur,  $\alpha$  est le taux d'expansion volumique et  $N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä :  $N^2 = \alpha g \frac{\partial T}{\partial z}$  où  $T$  est la température de moyenne. Pour atteindre notre objectif, nous avons pris le choix de résoudre numériquement les équations linearisées des corrélations à deux instants  $t$  et  $t'$ . En effet, nous nous proposons d'étendre cette étude à des situations où des solutions linéaires explicites ne sont pas disponibles. Pour décrire complètement ce type de turbulence, il importe de définir les spectres de corrélations suivants :

$$e_{ij}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} \left[ \langle u_i(\vec{k}, t) u_j^*(\vec{k}, t') \rangle + \langle u_i^*(\vec{k}, t) u_j(\vec{k}, t') \rangle \right] \quad (3)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} \left[ \langle u_i(\vec{k}, t) \theta^*(\vec{k}, t') \rangle + \langle u_i^*(\vec{k}, t) \theta(\vec{k}, t') \rangle \right] \quad (4)$$

$$e_{\theta i}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} \left[ \langle \theta(\vec{k}, t) u_i^*(\vec{k}, t') \rangle + \langle \theta^*(\vec{k}, t) u_i(\vec{k}, t') \rangle \right] \quad (5)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} \left[ \langle \theta(\vec{k}, t) \theta^*(\vec{k}, t') \rangle + \langle \theta^*(\vec{k}, t) \theta(\vec{k}, t') \rangle \right] \quad (6)$$

Ces définitions conduisent aux propriétés de symétrie évidentes :

$$e_{ij}(\vec{k}, t', t) = e_{ji}(\vec{k}, t, t') \quad (7)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t', t) = e_{\theta i}(\vec{k}, t, t') \quad (8)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t', t) = e_{\theta\theta}(\vec{k}, t, t') \quad (9)$$

Ces propriétés permettent justement de préciser les conditions initiales à  $t = 0$  pour  $t'$  fixé :

$$e_{ij}(\vec{k}, t', 0) = e_{ji}(\vec{k}, 0, t') \quad (10)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t', 0) = e_{\theta i}(\vec{k}, 0, t') \quad (11)$$

$$e_{\theta i}(\vec{k}, t', 0) = e_{i\theta}(\vec{k}, 0, t') \quad (12)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t', 0) = e_{\theta\theta}(\vec{k}, 0, t') \quad (13)$$

Il est important à ce stade de déterminer le nombre de spectres indépendants compte tenu des équations de contrainte imposées par l'équation de continuité  $k_i u_i = 0$  qui se traduisent par  $k_i e_{ij} = 0$  et  $k_j e_{ij} = 0$ . Il est facile de montrer, qu'en définitive, l'équation de

continuité impose 5 conditions indépendantes aux spectres  $e_{ij}$ . Il ya donc 4 spectres indépendants  $e_{ij}$  : on choisit à priori comme spectres indépendants  $e_{11}$ ,  $e_{12}$ ,  $e_{21}$ ,  $e_{22}$ . Les autres composantes du tenseur  $e_{ij}$  peuvent être déduites des conditions imposées par l'équation de continuité. De même, l'équation de continuité impose aux spectres de flux  $e_{i\theta}$  et  $e_{\theta i}$  les deux conditions  $k_i e_{i\theta} = 0$  et  $k_i e_{\theta i} = 0$ . On peut alors faire le choix des spectres  $e_{1\theta}$ ,  $e_{2\theta}$ ,  $e_{\theta 1}$ ,  $e_{\theta 2}$  comme spectres indépendants parmi les spectres  $e_{i\theta}$  et  $e_{\theta i}$ .

Nous prenons aussi l'option d'écrire ces équations d'évolution sous la forme d'équations sans dimension qui se présentent comme suit (pour simplifier, nous gardons les mêmes notations après le passage aux grandeurs sans dimensions) :

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{11} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{11} - \frac{k_1 k_3}{k^2} e_{\theta 1} + \frac{1}{\text{Ros}} \left( \frac{k_3 k_2}{k^2} e_{31} - \frac{k_3^2}{k^2} e_{21} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{22} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{22} - \frac{k_2 k_3}{k^2} e_{\theta 2} + \frac{1}{\text{Ros}} \left( \frac{k_3^2}{k^2} e_{12} - \frac{k_3 k_1}{k^2} e_{32} \right) \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} e_{33} = \frac{k_1^2}{k_3^2} \frac{d}{dt} e_{11} + \frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{d}{dt} e_{22} + \frac{k_1 k_2}{k_3^2} \left[ \frac{d}{dt} e_{12} + \frac{d}{dt} e_{21} \right] \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} e_{\theta 3} = -\frac{k_1}{k_3} \frac{d}{dt} e_{\theta 1} - \frac{k_2}{k_3} \frac{d}{dt} e_{\theta 2} \quad (17)$$

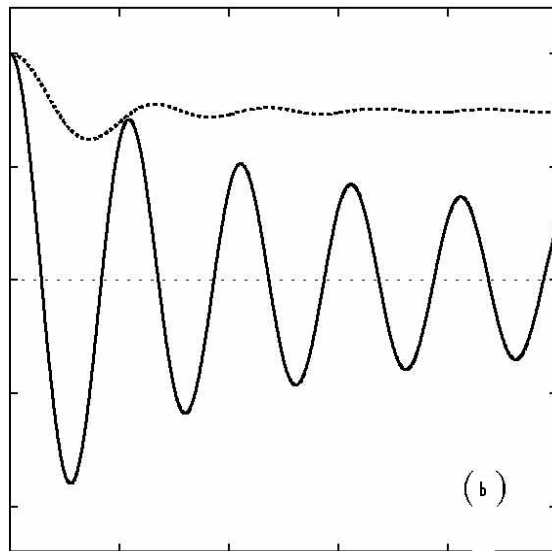
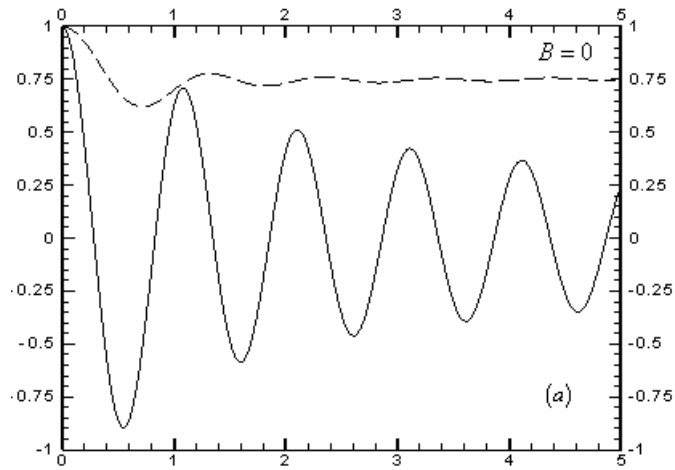
Ces équations font intervenir le nombre de Prandtl  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ , le nombre de Froude

$\text{Fr} = \frac{u_0 k_p}{N}$  et le nombre de Reynolds  $\text{Re} = \frac{u_0}{\nu k_p}$ .  $u_0$  est une échelle de vitesse de

référence  $u_0 = \sqrt{2 \int_0^\infty E(k) dk}$ .  $E(k)$  est le spectre tridimensionnel initial d'énergie cinétique.  $k_p$  est le nombre d'onde correspondant au maximum de  $E_0(k)$ .

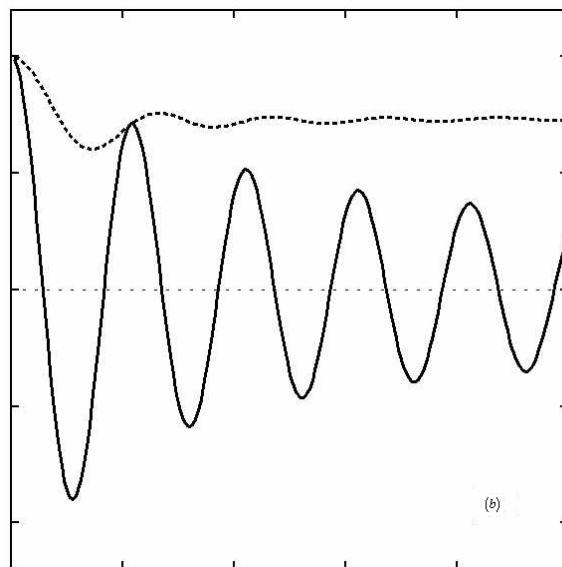
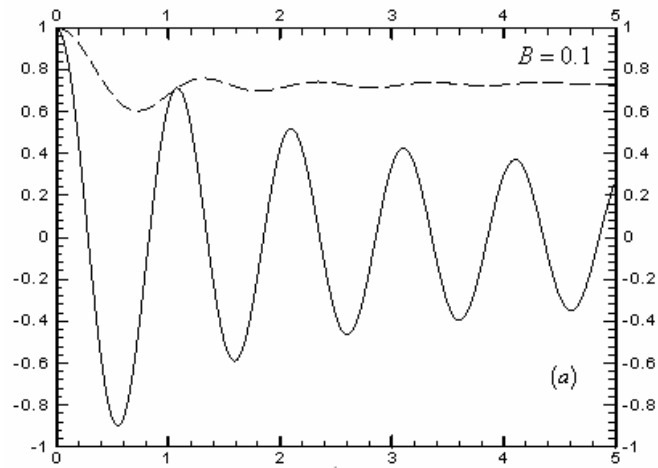
### 3 Résultats

Les figures (1),(2),(3),(4) et (5) montrent l'évolution des corrélations eulériennes des vitesses  $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle$  et  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  pour  $B=0;0,1;1;10$  et  $\infty$ . Les parties supérieures (a) de ces figures correspondent à nos résultats de RDT et les parties inférieures (b) aux résultats de Cambon et al. [3]. L'accord est net et constitue une validation de notre code linéaire dans le cas d'une turbulence homogène stratifiée et en rotation. Les deux cas  $B=0$  (stratification pure) et  $B=0,1$  (stratification dominante) sont tout à fait comparables. Manifestants les corrélations « horizontales »  $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle = \langle u_2(t)u_2(0) \rangle$  ne sont pas associées à un mode propagatif. Par contre, les corrélations « verticales »  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  oscillent et présentant un amortissement assez long autour d'une valeur moyenne nulle, amortissement qui résulte d'un mélange de phases. Dans le cas non dispersif  $B=1$ , les corrélations des vitesses oscillent sans amortissement. Dans les cas  $B=10$  et  $B=\infty$ , les corrélations des vitesses sont de même ordre de grandeurs, d'amplitude faible à  $t$  grand.



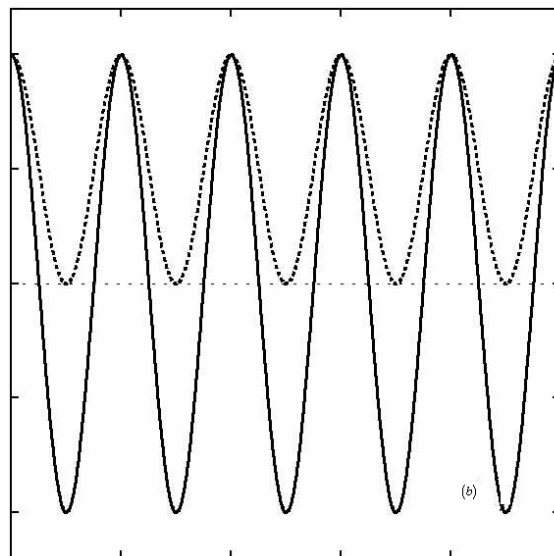
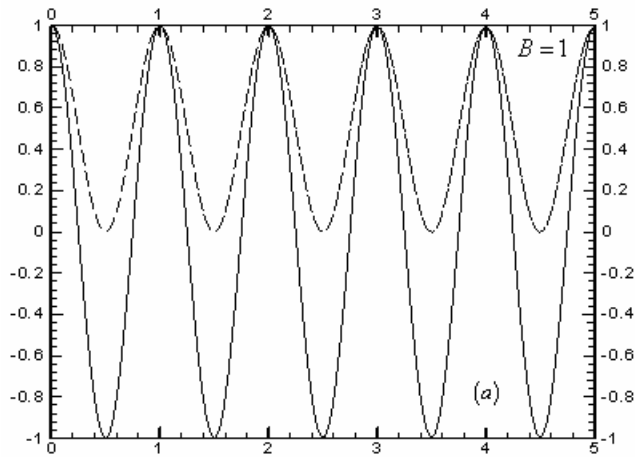
**Stratification pure**

Fig. 1 : Évolution l'évolution des corrélations  
 $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle$  ----- et  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  \_\_\_\_\_  
 Pour Pr=1. en fonction du t.

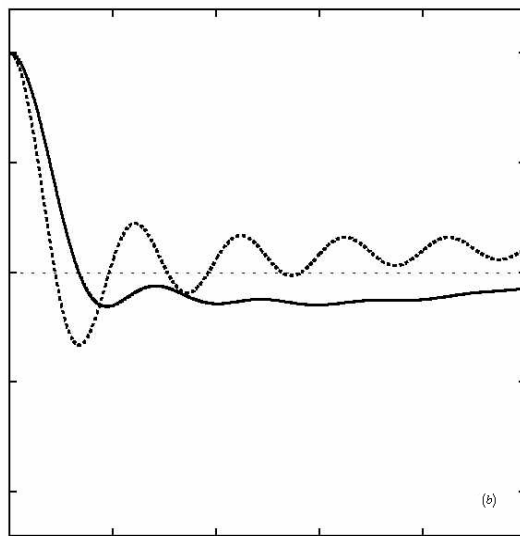
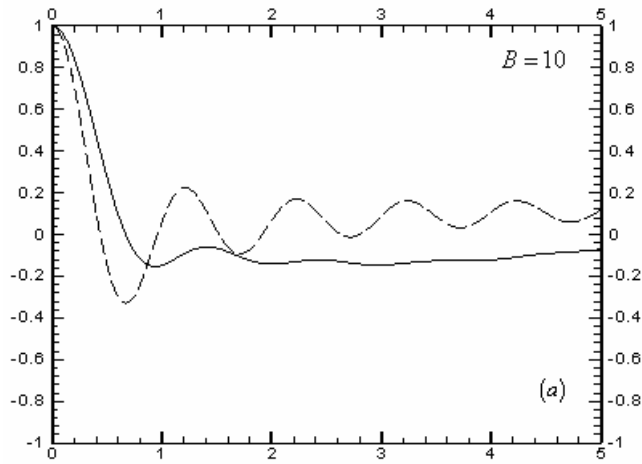


### Stratification dominante

Fig. 2 : Évolution l'évolution des corrélations  
 $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle$  ----- et  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  \_\_\_\_\_  
 Pour Pr=1. en fonction du t.

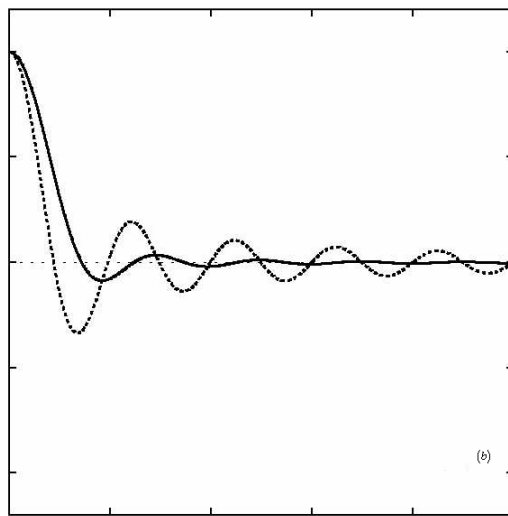
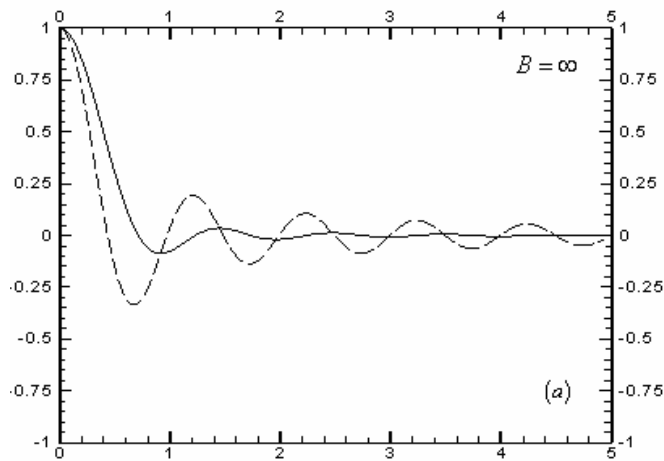


**Équipartition entre Stratification et Rotation**  
 Fig. 3 : Évolution l'évolution des corrélations  
 $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle$  ----- et  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  \_\_\_\_\_  
 Pour Pr=1. En fonction du t.



### Rotation dominante

Fig. 4 : Évolution l'évolution des corrélations  
 $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle$  ----- et  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  \_\_\_\_\_  
 Pour  $Pr=1$ . En fonction du  $t$ .



**Rotation pure**

Fig.5 : Évolution l'évolution des corrélations  
 $\langle u_1(t)u_1(0) \rangle$  ----- et  $\langle u_3(t)u_3(0) \rangle$  \_\_\_\_\_  
 Pour Pr=1. En fonction du t.

Il s'agit des corrélations entre la vitesse verticale initiale  $u_3(0)$  et la température à  $t$  traduisant l'interaction entre l'énergie cinétique initiale et l'énergie potentielle (figure 6). En absence de rotation, une telle interaction est forte ; elle démunie au fur et à mesure que la rotation s'amplifie pour s'annuler en absence de stratification.



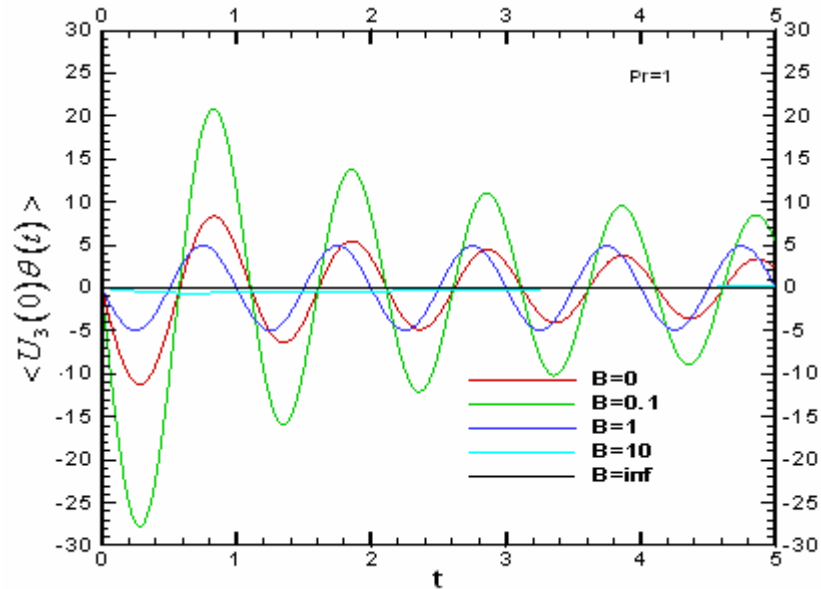


Fig.6 : Évolution du coefficient de flux de chaleur vertical Pour  $Pr=1$ .

#### 4. Conclusion

Dans ce travail nous avons développé un code de calcul pour le but est de simuler numériquement le développement d'une turbulence stratifiée de façon stable homogène en rotation dans les différents cas: un flux purement stratifié, le débit évolue en présence d'une stratification dominante, les flux de rotation dominante, changements de flux en présence d'une rotation pure et enfin de flux correspond à une équipartition entre la rotation et de stratification.

Une analyse linéaire a été réalisée a déterminé l'équation d'évolution décrivant ces turbulences. La résolution de ces équations en utilisant le code de calcul développé a conduit à des résultats numériques compatibles avec celles disponibles dans la littérature [3].

Ainsi, nous avons pu déterminer l'influence de différentes valeurs de  $B$  associée avec le flux de chaleur turbulent vertical avec  $Pr = 1$ .

#### References

- [1] Hanazaki, H. & Hunt, J. C. R. 1996 Linear processes in unsteady stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* 318, 303–337
- [2] Iida, O. & Nagano, Y. 1999 Coherent structure and heat transfer in geostrophic flow under density stratification. *Phys. Fluids* 11, 368–377.
- [3] C Cambon, F.S Godferd , F.C.G.A Nicolleau, J.C Vassilicos Turbulent diffusion in rapidly rotating flows with and without stable stratification *J. Fluid Mech.* (2004), vol. 499, pp. 231–255.