

# Benchmark numérique des écoulements de Couette-Taylor turbulents

R. GUILLERM<sup>a†</sup>, R. DA SOGHE<sup>b</sup>, S. PONCET<sup>a</sup>, S. VIAZZO<sup>a</sup>

a. *Laboratoire de Mécanique, Modélisation & Procédés Propres (M2P2) - UMR 6181 CNRS - Aix-Marseille Université, Technopôle Château Gombert, 38 rue F. Joliot-Curie, 13451 Marseille, France*  
guillerm@l3m.univ-mrs.fr

b. *Energy Engineering Department S. Stecco, University of Florence, 50139 via S. Marta 3, Florence, Italy*

## Résumé :

*Les résultats issus de modèles de turbulence disponibles dans CFX et STAR CCM+ sont comparés aux mesures de Burin et al. [4] ainsi qu'à des calculs issus du modèle RSM d'Elena et Schiestel [6] et d'un code DNS développé au M2P2. Les paramètres géométriques (rapport d'aspect  $\Gamma = 2,12$ , rapport des rayons  $\eta = 0,35$ ) sont ceux considérés dans l'expérience originale de Burin et al. [4]. Une comparaison détaillée entre les différentes approches est effectuée sur une large gamme du nombre de Reynolds ( $5 \times 10^4 - 4 \times 10^5$ ).*

## Abstract :

*The results predicted by various turbulence models available within CFX and Star CCM+ are compared to the experimental measurements of Burin et al. [4] and new calculations performed with the RSM model of Elena and Schiestel [6] and a DNS code developed at the M2P2 laboratory. The geometrical control parameters (aspect ratio  $\Gamma = 2.12$ , radii ratio  $\eta = 0.35$ ) are those considered in the original experience of Burin et al. [4]. Detailed comparisons between the different approaches are performed on a wide range of Reynolds number ( $5 \times 10^4 - 4 \times 10^5$ ).*

**Mots clefs : Couette-Taylor, turbulence, simulation et modélisation numériques**

## 1 Introduction

La compréhension des écoulements au sein de systèmes en rotation joue un rôle primordial dans la fiabilité et la performance des machines tournantes telles que les turbines ou les moteurs électriques. Cependant, le choix d'un modèle de turbulence adapté à la prise en compte de la complexité de tels écoulements reste, aujourd'hui encore, une question ouverte dans la littérature. L'un des systèmes modèles les plus pertinents pour étudier l'influence de la rotation sur la turbulence est le système dit de Couette-Taylor, composé de deux cylindres concentriques : un cylindre intérieur en rotation et un cylindre extérieur fixe. L'écoulement de base dépend principalement du nombre de Reynolds de rotation, du rapport d'aspect de la cavité et du rapport des rayons des cylindres  $\eta = R_1 / R_2$ , où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement. On parle d'entrefer étroit lorsque  $\eta > 0,67$ , d'entrefer moyen lorsque  $0,33 < \eta < 0,67$  ou d'entrefer large lorsque  $\eta < 0,33$  [3]. Dans le cas d'un entrefer étroit, les conditions aux limites haute et basse qui délimitent les cylindres ne jouent qu'un rôle mineur sur la dynamique de l'écoulement. Lorsque l'entrefer est plus grand, le choix des conditions aux limites s'avère primordial et peut favoriser ou non le développement d'un écoulement secondaire sous la forme de larges recirculations dans le plan  $(r, z)$  dites recirculations d'Ekman. Récemment, Burin et al. [4] ont développé un système expérimental de Couette-Taylor original dont les anneaux disposés à chaque extrémité de l'entrefer sont séparés en une partie tournante solidaire du cylindre intérieur et une partie fixe solidaire du cylindre extérieur. Cette configuration est d'un intérêt certain en astrophysique puisque l'écoulement ainsi généré peut présenter des caractéristiques très différentes selon les vitesses de rotation des anneaux intérieur et extérieur : écoulement en rotation solide, en rotation quasi-képlérienne ou écoulement de Couette pur. Burin et al. [4] ont notamment mis en évidence la réduction des recirculations d'Ekman lorsque chaque anneau est solidaire d'un des cylindres. Ils ont montré également que le couple  $G$  est proportionnel au nombre de Reynolds avec une relation de la forme  $G$

$\propto Re^\alpha$  avec  $\alpha = 1,65$ , en accord avec [7-8]. Cette valeur fait actuellement toujours débat [7-13] depuis les premières études d'écoulements de Couette circulaire à hauts nombres de Reynolds [14].

Dans cet article, nous proposons d'étudier cet écoulement en réalisant un benchmark numérique de différents codes de calculs disponibles au laboratoire: le modèle RSM d'Elena et Schiestel [6], un code DNS basé sur des schémas compacts [1] ainsi que les résultats issus de modèles de turbulence classiques.

## 2 Configuration géométrique

Le système considéré est celui conçu par Burin *et al.* [4]. Il est constitué de deux cylindres coaxiaux verticaux de longueur  $H = 0,28$  m (Fig. 1). Le rayon du cylindre intérieur est  $R_1 = 0,071$  m et celui du cylindre extérieur  $R_2 = 0,203$  m. L'entrefer entre les deux cylindres est donc  $d = R_2 - R_1 = 0,132$  m. Le dispositif est caractérisé par un faible rapport d'aspect  $\Gamma = H/d = 2,12$  et un entrefer large (rapport des rayons  $\eta = R_1 / R_2 = 0,35$ ). La particularité du système réside dans le fait que chaque extrémité haute et basse de l'entrefer est séparée en deux en  $(R_1 + R_2)/2$ : un anneau intérieur tournant et un anneau extérieur fixe. Le cylindre intérieur ainsi que les deux anneaux intérieurs tournent à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ , tandis que les autres parois demeurent immobiles. L'écoulement de base dépend également du nombre de Reynolds basé sur la largeur de l'entrefer :  $Re = \Omega R_1 d / \nu$ . Le nombre de Reynolds varie ici entre  $5 \times 10^4$  et  $4 \times 10^5$ .

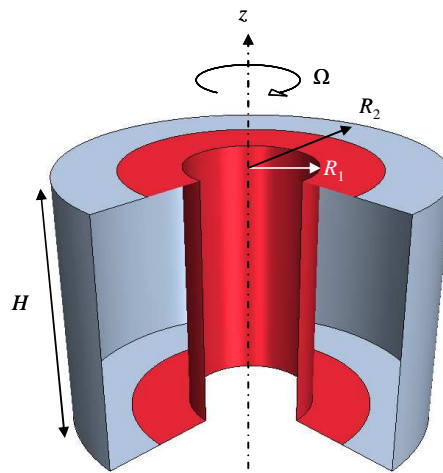


FIG. 1 – Schéma du système de Couette-Taylor de Burin *et al.* [4]. Les parties en rouge sont en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  et les parties en gris sont fixes.

## 3 Méthodes numériques

### 3.1 Modèle de transport des tensions de Reynolds (RSM) d'Elena & Schiestel [6]

Le modèle RSM développé par Elena et Schiestel [6] est sensibilisé aux effets implicites de la rotation sur la turbulence (cascade inverse d'énergie, brouillage spectral...) à travers quatre termes décrits en détails dans [6]. Il est utilisé dans une version axisymétrique instationnaire avec un pas de temps de 0,01s et un maillage  $140 \times 280$  dans le plan  $(r,z)$ . La procédure numérique est basée sur la méthode des volumes finis avec des grilles décalées pour les composantes moyennes de la vitesse. Pour surmonter les problèmes de stabilité et conserver les couplages, les équations de transport des tensions de Reynolds sont résolues par bloc.

### 3.2 Simulation Numérique Directe

Le code de simulation numérique directe (DNS) est basé sur des schémas aux différences finies compactes d'ordre 4 dans les directions inhomogènes radiale et axiale et des séries de Fourier dans la direction tangentielle. Le schéma temporel est semi implicite d'ordre 2 [1]. Une méthode de projection efficace est utilisée pour résoudre le couplage vitesse-pression. Un maillage de  $152 \times 64 \times 242$  dans les directions radiale, tangentielle et axiale respectivement a été utilisé avec un pas de temps égal à  $3 \times 10^{-5}$  s pour  $Re = 5 \times 10^4$ . Il est à noter que les calculs ont été réalisés sur une demie cavité (périodicité de  $\pi$ ) subdivisée en 4 sous domaines de taille identique (2 dans la direction radiale et 2 dans la direction axiale) pour une meilleure prise en compte de la singularité des conditions aux limites sur les disques haut et bas.

### 3.3 Modèle SAS-SST (CFX)

Le modèle SAS-SST (Scale Adaptive Simulation) disponible dans CFX, initialement développé par Menter et Egorov [10] fournit un comportement de type LES dans les régions instationnaires de l'écoulement tout en conservant des caractéristiques de type RANS dans les régions stationnaires. Les équations générales de ce modèle diffèrent de celles des modèles RANS-SST usuels par l'intermédiaire d'un terme source additionnel dans l'équation de transport de la turbulence. Le modèle a été utilisé dans sa version axisymétrique instationnaire avec un pas de temps de  $5 \times 10^{-5}$  s et un maillage  $140 \times 280$  dans le plan  $(r, z)$  qui garantit des valeurs de  $y^+$  inférieures à 5 près des parois.

### 3.4 Modèles disponibles dans Star CCM+

Les mesures de Burin *et al.* [4] sont comparés également à certains modèles disponibles dans Star CCM+ 5.04. Dans la suite, nous nous focaliserons principalement sur quatre approches: les modèles  $k-\varepsilon \overline{v^2} - f$  et RSM, une Detached Eddy Simulation (DES) basée sur le modèle de Spalart-Allmaras et une Simulation des Grandes Echelles (LES) basée sur le modèle de Smagorinsky standard.

Parmi les modèles utilisés, le modèle  $k-\varepsilon \overline{v^2} - f$  est optimisé afin de prendre en compte les effets de paroi dans les couches limites turbulentes et pour s'accommoder des effets non locaux. Pour cela, il résout deux quantités turbulentes additionnelles en plus de celles calculées par les modèles  $k-\varepsilon$  standards. Au lieu d'utiliser l'énergie cinétique de la turbulence  $k$ , il utilise une échelle de vitesse  $\overline{v^2}$  pour évaluer la viscosité. Celle-ci peut-être interprétée comme une fluctuation de vitesse normale aux lignes de courant. Les effets de bord sont modélisés via une fonction de relaxation elliptique  $f$ . Le modèle RSM disponible dans Star CCM+ est le même que dans [6] sans les termes spécifiques à la rotation.

La version DES du modèle de Spalart-Allmaras résout une seule équation de transport qui détermine la viscosité turbulente. Tout comme le modèle SAS-SST présenté précédemment, elle présente des caractéristiques de type LES dans certaines régions de l'écoulement, qui sont instationnaires, tout en conservant des caractéristiques typiques des modèles RANS dans les couches de cisaillement. Enfin, le modèle LES utilise un modèle de sous-maille de type Smagorinsky classique.

Star CCM+ permet de générer des maillages non structurés de type polyédrique afin de garantir la conformité des maillages aux interfaces. Un soin particulier a été apporté aux couches prismatiques afin de modéliser précisément les écoulements dans les couches limites. Les modèles présentés ici ont été utilisés sur des maillages  $74 \times 104 \times 115$  selon  $(r, \theta, z)$  avec 12 couches prismatiques générées sur 2 % de la largeur de l'entrefer garantissant des valeurs de  $y^+$  inférieures à 4 près des parois. Les différentes approches ont été utilisées dans leur version 3D instationnaire avec des pas de temps compris entre  $10^{-2}$  et  $10^{-4}$  s.

## 4 Résultats et discussion

### 4.1 Stabilité et structure de l'écoulement

On s'intéresse dans un premier temps à la structure de l'écoulement pour des nombres de Reynolds modérés. La Figure 2 montre dans ce cadre les iso-surfaces du critère  $Q$  obtenues par DNS pour trois valeurs de  $Re$ . Pour  $Re = 3 \times 10^3$ , l'écoulement est laminaire instable avec des rouleaux circulaires localisés principalement le long des cylindres (Fig. 2a). A partir de  $Re = 10^4$ , la structure de l'écoulement devient plus complexe avec l'apparition de structures turbulentes 3D. Des spirales apparaissent près des anneaux tournants et coexistent avec les motifs circulaires observés près des anneaux fixes (Fig. 2b). Dans le cœur de la cavité, de larges vortex alignés avec la direction tangentielle sont observés essentiellement près des cylindres et dans le plan méridien où une forte couche de cisaillement se développe. Quand le nombre de Reynolds est augmenté jusqu'à  $Re = 5.10^4$  (Fig. 2c), les structures deviennent plus fines et plus alignées dans la direction  $\theta$ . La turbulence est essentiellement localisée à mi-hauteur. On peut noter la persistance des rouleaux le long du cylindre intérieur proches des vortex toroïdaux observés par Biage et Campos [3] pour  $Re = 2,04 \times 10^5$ ,  $\eta = 0,38$  et  $\Gamma = 20$  et qui subsistent dans leurs expériences jusqu'à  $Re = 2,77 \times 10^5$ . Ainsi, à partir de  $Re = 5 \times 10^4$ , l'écoulement est turbulent avec la présence de structures à grandes échelles le long du cylindre intérieur.

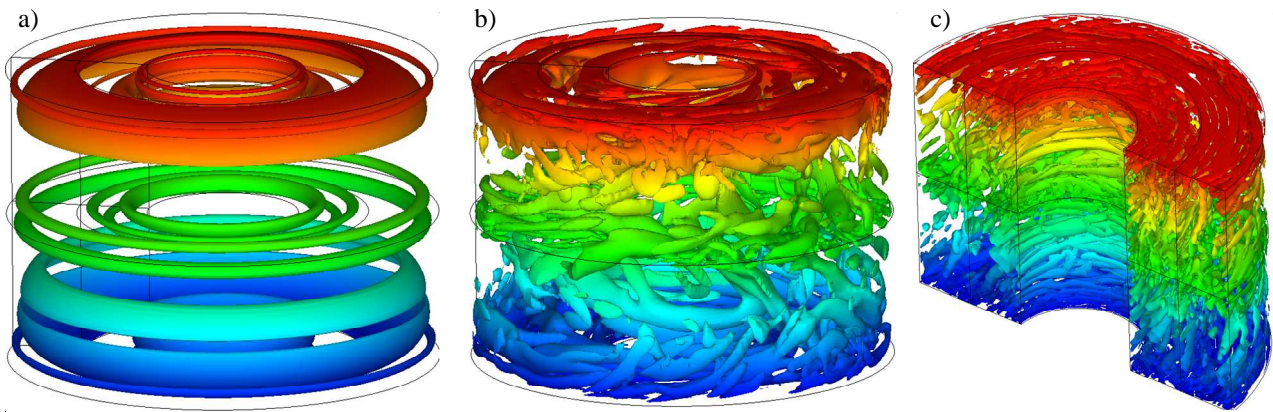


FIG. 2 – Iso-surfaces du critère  $Q$  (colorées par la position axiale  $z$ ) obtenues par DNS pour a)  $Re = 3 \times 10^3$ ,  $iso-Q = 5$ , b)  $Re = 10^4$ ,  $iso-Q = 50$ , c)  $Re = 5 \times 10^4$ ,  $iso-Q = 5000$ .

## 4.2 Champ moyen

Des comparaisons systématiques sont réalisées entre les différentes approches numériques utilisées et les données expérimentales de Burin *et al.* [4] en termes de vitesse tangentielle moyenne à une position axiale donnée  $z = H/4$ . Dans un premier temps, afin d'écartier les modèles les moins pertinents, les résultats des différentes approches sont comparés pour  $Re = 10^5$  (Fig.3). La plupart des modèles de turbulence disponibles dans Star CCM+ comme les modèles  $k-\epsilon$ ,  $k-\omega$  SST ... dans leurs approches à bas ou haut nombre de Reynolds (profils non montrés ici) prédisent le même profil que celui obtenu par le modèle SAS-SST de CFX. Ces modèles surestiment clairement la vitesse tangentielle moyenne dans l'entrefer et ne reproduisent pas les bons profils avec une vitesse tangentielle qui varie peu avec le rayon. Les autres modèles, décrits précédemment, donnent tous des résultats en accord avec les mesures expérimentales. La vitesse tangentielle moyenne décroît avec le rayon, ce qui est caractéristique des écoulements de type Couette-Taylor avec des niveaux de turbulence modérés. On peut noter le comportement un peu singulier de la DES proche du cylindre extérieur qui prédit un maximum local près de la paroi, ce qui indique un niveau de turbulence plus faible que celui prédit par les autres modèles.

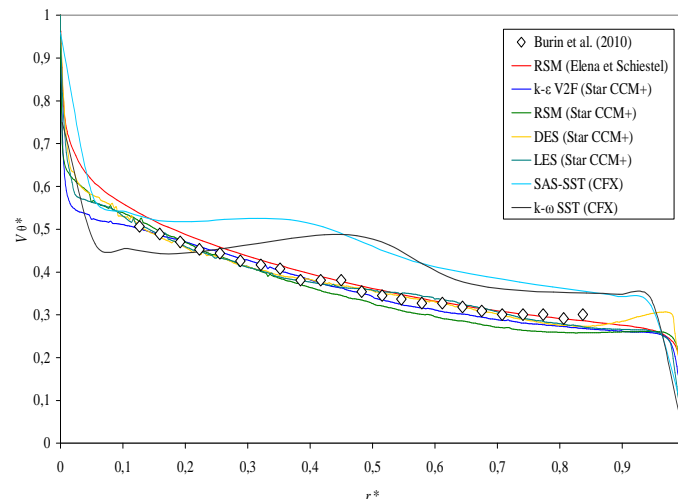


FIG. 3 – Profils radiaux de la vitesse tangentielle moyenne en  $z = H/4$  pour  $Re = 10^5$ .

La Figure 4 montre les profils de vitesse tangentielle en  $z = H/4$  pour quatre valeurs du nombre de Reynolds :  $Re_1 = 5 \times 10^4$ ,  $Re_2 = 10^5$ ,  $Re_3 = 2 \times 10^5$  et  $Re_4 = 4 \times 10^5$  et pour chacun des modèles retenus. Les résultats obtenus sont comparés aux mesures de Burin *et al.* [4] et au présent code DNS uniquement pour  $Re_1$ . Seul le modèle DES Spalart-Allmaras contenu dans Star CCM+ prédit un profil de vitesse tangentielle en accord avec les données expérimentales de [4] quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds (Fig. 4a). Pour les autres modèles, les profils obtenus se superposent quasi-systématiquement sur une seule courbe (Fig. 4b - 4d) qui coïncide pour les trois plus grandes valeurs du nombre de Reynolds. Ces profils sont en bon accord quant à

eux avec les calculs DNS obtenus pour  $Re_1 = 5 \times 10^4$ . Il est d'ailleurs assez surprenant d'observer une vitesse tangentielle aussi faible au centre de l'entrefer, égale à 0,23 fois celle du cylindre intérieur dans les expériences, alors que la DNS donne  $V_\theta^* = 0,34$  en accord avec les résultats numériques obtenus par Bazilevs et Akkerman [2] et Dong [5] dans des systèmes de Couette-Taylor similaires en régime turbulent.

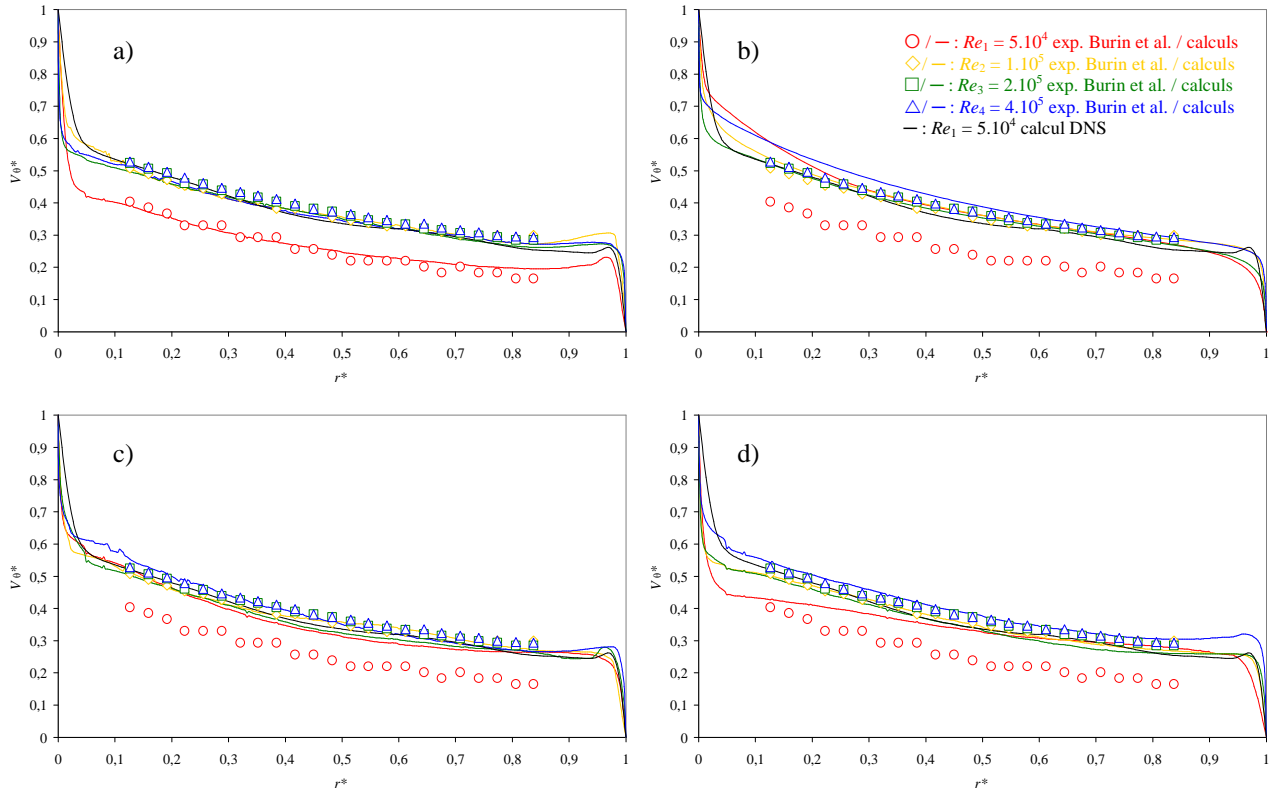


FIG. 4 – Profils radiaux de la vitesse tangentielle moyenne en  $z=H/4$  à  $Re_1=5 \times 10^4$ ,  $Re_2=10^5$ ,  $Re_3=2 \times 10^5$  et  $Re_4=4 \times 10^5$  pour a) le modèle DES Spalart-Allmaras, b) le modèle LES, c) le modèle RSM [6] et d) le modèle  $k-\epsilon$   $v^2 - f$ .

### 4.3 Champ turbulent

Les corrélations obtenues sur les vitesses sont présentées en termes de couple adimensionné par unité de longueur,  $G$ , qui, en négligeant le terme visqueux, est défini par :  $G = 2\pi r^2 \langle v_r' v_\theta' \rangle / v^2$  [4]. La Figure 5a représente l'évolution du moment angulaire  $G$  avec le nombre de Reynolds pour les différents modèles retenus. Des calculs laminaires sous Star CCM+ ont été effectués pour étendre la gamme de  $Re$ . Différentes lois de puissance publiées dans la littérature [4-13-14] sous la forme  $G \propto Re^\alpha$  sont également reportées sur la Figure 5a. Les valeurs de  $G$  obtenues avec les différents modèles de turbulence pour les plus hauts nombres de Reynolds sont en bon accord avec les mesures de [4]. Pour  $Re_1 = 5 \times 10^4$ ,  $G$  est sous-estimé par la majorité des approches sauf le modèle DES de Star CCM+. On retrouve le bon accord déjà observé sur le profil radial de la vitesse tangentielle (Fig. 4a). Les résultats de la DES donnent pour  $G$  une loi de puissance en  $Re^\alpha$  avec  $\alpha = 1,7$  en accord avec les mesures de Wendt [14]. Pour les plus petites valeurs de  $Re$  considérées, on trouve avec un calcul laminaire :  $\alpha = 1,6$ . En considérant toute la gamme de  $Re$  étudiée, l'évolution obtenue correspond à une loi du type  $G \propto Re^{1,65}$ , en accord avec les résultats obtenus par [4] et [13].

Burin *et al.* [4] ont également mesuré des composantes normales du tenseur de Reynolds, qui permettent de calculer le coefficient  $C_{r\theta}$  défini par :  $C_{r\theta} = \langle v_r' v_\theta' \rangle / (\langle v_r' \rangle_{rms} \langle v_\theta' \rangle_{rms})$ . Ce coefficient de corrélations croisées est quasiment constant de l'ordre de 20% sur toute la gamme du nombre de Reynolds considérée (Fig. 5b), entre 500 et  $4 \times 10^5$ , ce qui est en accord avec [4]. Pour  $Re = 5 \times 10^4$ , nous obtenons  $C_{r\theta} = 0,24$ , ce qui est à comparer au résultat de Smith et Townsend [11] :  $C_{r\theta} = 30-40\%$ . Cette valeur bien supérieure est attribuée par [4] à la présence de structures à très grandes échelles dans l'écoulement. Burin *et al.* [4] notent une légère décroissance de ce coefficient avec le nombre de Reynolds due au fait que l'écoulement est de plus en plus



désordonné lorsque  $Re$  augmente. Cette décroissance n'est pas confirmée par nos calculs.

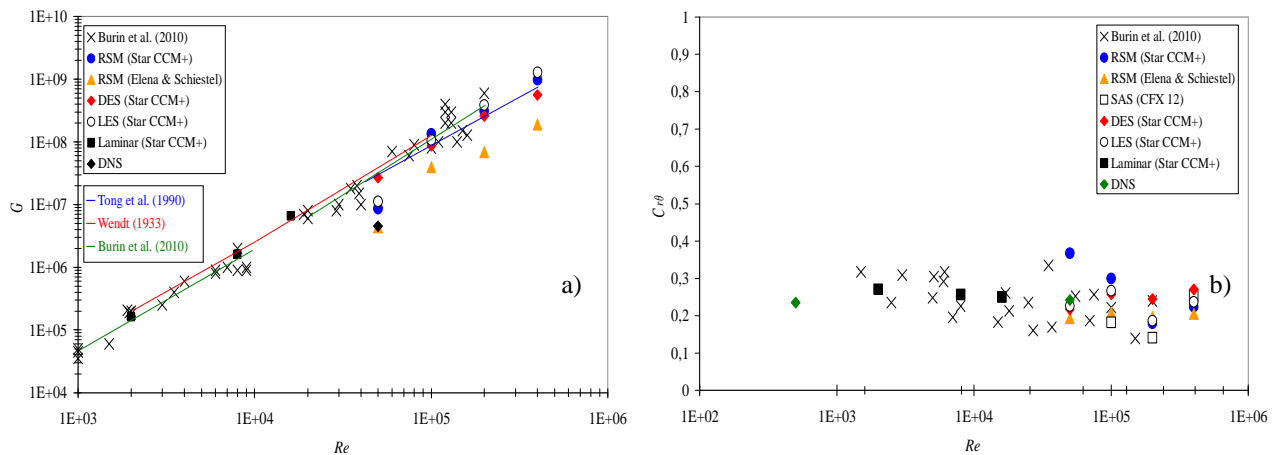


FIG. 5 – Evolution de a)  $G$  et b)  $C_{r\theta}$  avec le nombre de Reynolds pour différents modèles.

## 5 Conclusion

L'écoulement de Couette-Taylor turbulent dans le système original de Burin *et al.* [4] a été étudié numériquement à l'aide de modèles de turbulence disponibles dans CFX et STAR CCM+, du modèle RSM d'Elena et Schiestel [6] et d'un code DNS développé au M2P2. La comparaison des profils de vitesse tangentielle pour différentes valeurs du nombre de Reynolds a permis de mettre en évidence la pertinence des différents modèles considérés. La variation du couple avec le nombre de Reynolds a révélé un bon accord avec les lois de puissance établies dans la littérature ainsi qu'avec les résultats expérimentaux. Des calculs issus du code DNS et de son extension LES sont actuellement en cours pour permettre des comparaisons plus complètes sur le champ turbulent et ce pour une large gamme du nombre de Reynolds.

## Remerciements

Cette étude bénéficie du soutien de l'Institut Carnot Star à travers le projet TCPtherm. Le postdoctorat de Raphaël Guillermin est financé par la société Liebherr Aerospace Toulouse qui est également remerciée.

## References

- [1] Abide S., Viazzo S., A 2D compact fourth-order projection decomposition method, *JCP* **206**: 252-276, 2005.
- [2] Bazilevs Y., Akkerman I., Large eddy simulation of turbulent Taylor-Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method, *J. Comp. Phys.* **229**: 3402-3414, 2010.
- [3] Biage M., Campos J.C.C., Visualization study and quantitative velocity measurements in turbulent Taylor-Couette flow tagging: a description of the transition to turbulence, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* **25** (4): 378-390, 2003.
- [4] Burin M.J., Schartman E., Ji H., Local measurements of turbulent angular momentum transport in circular Couette flow, *Exp. Fluids* **48**: 763-769, 2010.
- [5] Dong S., DNS of turbulent Taylor-Couette flow, *J. Fluid Mech.* **587**: 373-393, 2007.
- [6] Elena L., Schiestel R., Turbulence modelling of rotating confined flows, *Int. J. Heat Fluid Flow* **17**: 283-289, 1996.
- [7] Lathrop D., Fineberg J., Swinney H.L., Transition to shear-driven turbulence in Taylor-Couette flow, *Phys. Rev. A*, **46**: 6390-6408, 1992.
- [8] Lewis G.S., Swinney H.L. (1999) Velocity structure functions, scaling, and transitions in high Reynolds-number Couette-Taylor flow, *Phys. Rev. E* **59** (5): 5457-5467, 1999.
- [9] Lim T.T., Tan K.S., A note on power-law scaling in a Taylor-Couette flow, *Phys. Fluids* **16** (1): 140-144, 2004
- [10] Menter F.R., Egorov Y., The scale-adaptive simulation method for unsteady flow predictions, Aerodynamic noise from wall-bounded flows, *Von Karman lecture series*, 03, 2009.
- [11] Smith G.P., Townsend A.A., Turbulent Couette flow between concentric cylinders at large Taylor numbers, *J. Fluid Mech.* **123**: 187-217, 1982.
- [12] Tagg R., The Couette-Taylor problem, *Nonlinear Sci. Today* **4**: 1-25, 1994.
- [13] Tong P., Goldburg W.J., Huang J.S., Witten T.A., Anisotropy in turbulent drag reduction, *Phys. Rev. Lett.* **65**: 2780-2783, 1990.
- [14] Wendt F., Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern, *Ing. Arch.* **4**: 577-595, 1933.