

# Étude des propriétés de la turbulence confinée en rotation à l'aide d'une méthode de pénalisation

C. Jause-Labert, F.S. Godefert

*Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR 5509  
École Centrale de Lyon, Université de Lyon, France*

## Résumé :

*Une méthode de pénalisation a été implémentée dans un code pseudo-spectral tri-périodique afin d'introduire des conditions aux limites de non-glissement et ainsi de simuler un écoulement turbulent dans un confinement cylindrique. Pour cela, une formulation implicite pour le terme de pénalisation a été développée afin de supprimer la condition de stabilité très restrictive introduite par ce dernier. Les Simulations Numériques Directes (SND) ont alors permis de caractériser l'effet global du confinement dans des écoulements turbulents en déclin avec la présence ou non de la force de Coriolis dans le cas d'un écoulement en rotation. La distance à la paroi devient alors le paramètre pertinent pour différencier les différentes zones de l'écoulement, zone de coeur ou zone de paroi, que ce soit pour considérer les statistiques eulériennes ou lagrangiennes de l'écoulement.*

## Abstract :

*A penalization method has been implemented in a tri-periodic pseudo-spectral code in order to introduce no-slip boundary conditions so that a turbulent flow in a confined geometry could be simulated. To that extent, an implicit formulation for the penalization term has been developed to remove the restrictive stability condition inherent to this numerical method. The Direct Numerical Simulations (DNS) then allowed to characterize the global effect of confinement in freely decaying turbulent flows, with or without the addition of the Coriolis force, in the case background rotation is considered. The distance to the wall becomes the most relevant parameter to distinguish the different regions of the flow, inner or wall regions, when considering Eulerian or Lagrangian statistics of the flow.*

**Mots clefs : turbulence, confinement, pénalisation**

## 1 Introduction

L'étude d'écoulements turbulents par des simulations numériques est un des outils majeurs pour l'analyse et la prédiction des phénomènes fluides et de leurs propriétés, notamment pour des applications environnementales ou industrielles. L'effet d'une rotation en bloc concerne les écoulements géophysiques, pour lesquels l'approximation homogène sans paroi est pertinente. Pour des écoulements en conduites dans des éléments tournants (par exemple des turbines), le confinement de l'écoulement joue un rôle prédominant. Nous étendons dans ce travail les analyses existantes des propriétés statistiques eulériennes et lagrangiennes de la turbulence en rotation au cas d'un écoulement confiné dans un cylindre, constituant ainsi une étape supplémentaire dans la prise en compte d'effets plus complexes. Nous utilisons une technique numérique de pénalisation dans un code spectral (décrite dans la section 2), dans le cadre des méthodes de frontières immergées popularisées par plusieurs équipes ([1, 8]), qui permet en outre de considérer plus facilement différentes géométries que dans les méthodes de type "body-fitted". Dans son implémentation dans le code pseudo-spectral, c'est à dire avec un maillage uniforme, la méthode nous permet de reproduire de façon réaliste les effets globaux dus à la présence des parois solides (statistiques conditionnées par zone de l'écoulement présentées en section 4), mais pas les phénomènes précis dans les zones de couche-limite.

## 2 Méthode de pénalisation et schéma numérique

Considérons un domaine fluide  $\mathcal{D}$  interagissant avec un domaine solide  $\mathcal{S}$ . L'écoulement, caractérisé par la vitesse notée  $\mathbf{u}$ , est considéré incompressible et les équations de Navier–Stokes régissent son comportement. La condition à l'interface  $\partial\mathcal{S}$  est une condition de non-glissement :  $\mathbf{u}(\mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}) = \mathbf{0}$ .

Dans la lignée des travaux de C.S. Peskin sur les méthodes de frontières immergées (Immersed Boundary Method) [10], la méthode de pénalisation, introduite par Arquís & Caltagirone [2], consiste en l'addition d'un terme source aux équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible de viscosité  $\nu$ . En notant la vorticité  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent, dans un repère tournant à une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) = -\nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\eta} \chi (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \quad (1)$$

où  $p^*$  est composée de trois termes : un terme de pression, un terme représentant l'énergie cinétique locale (suivant une formulation semi-conservative du terme non-linéaire), ainsi qu'un terme de force centrifuge dans le cas où  $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ . L'équation de conservation de la masse est  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  et complète le système d'équations à quatre inconnues.  $\eta$  est le paramètre de pénalisation,  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_s, t)$  est la vitesse imposée à la paroi solide et la fonction  $\chi$  est la "fonction masque", définissant la zone solide :

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Le domaine de calcul est ainsi divisé en deux : une région fluide où l'on retrouve les équations de Navier–Stokes ( $\chi = 0$ ) et une région solide où une force inversement proportionnelle à  $\eta$  apparaît. Lorsque  $\eta$  tend vers 0, le système d'équations considéré converge vers un problème de Navier–Stokes dans  $\mathcal{D}$ , couplé à un problème de Stokes dans  $\mathcal{S}$ . Cela revient à considérer le domaine solide comme une zone de porosité variable (proportionnellement à  $\eta$ ), totalement imperméable quand  $\eta \rightarrow 0$ . La convergence des équations pénalisées vers les équations de Navier–Stokes avec des conditions aux limites d'adhérence, dans la limite  $\eta \rightarrow 0$ , a été démontrée par Angot *et al.* [1] et l'erreur commise est proportionnelle à  $\eta^{1/2}$  ([5]).

Nous implémentons cette technique dans un code pseudo-spectral tri-périodique, où sont calculés à chaque itération les coefficients  $\hat{\mathbf{u}}$  de la transformée de Fourier tri-dimensionnelle de  $\mathbf{u}$ . L'équivalent de notre système d'équations dans l'espace de Fourier est alors :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nu k^2 \hat{\mathbf{u}} = P_{\perp} \left\{ \mathcal{F} \{ \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \} - \frac{1}{\eta} \widehat{\chi \mathbf{u}_r} \right\}. \quad (2)$$

où  $P_{\perp}$  est l'opérateur qui projette un vecteur dans l'espace de Fourier sur le plan perpendiculaire au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$  est la vitesse relative dans le cas d'un domaine solide mobile.

L'implémentation du terme de pénalisation de manière explicite implique l'apparition d'une condition de stabilité sur le pas de temps  $\Delta t$  telle que  $\Delta t \leq \eta/2$ . Lorsque la perméabilité  $\eta$  tend vers 0, le pas de temps doit aussi tendre vers 0, problème souvent résolu par un compromis numérique ne considérant qu'une valeur finie, relativement petite, du paramètre  $\eta$  ([8, 9]). Une solution permettant la suppression de cette condition de stabilité est la prise en compte de manière implicite du terme de pénalisation, selon le schéma numérique (3). À noter que le schéma présenté ici est un schéma temporel d'Euler d'ordre un pour un motif de clarté. Le schéma utilisé lors des simulations est un schéma d'Adams–Bashforth d'ordre 3. Le schéma s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = P_{\perp} \left[ \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathcal{F}^{-1} \{ (1 - \nu k^2 \Delta t) \hat{\mathbf{u}}^n - \Delta t P_{\perp} [ \mathcal{F} \{ \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \}^n ] \} + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1} \mathbf{u}_s^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1}} \right\} \right] \quad (3)$$

les exposants  $n$  indiquant l'instant  $t^n = n\Delta t$  auquel sont évalués les différents termes.

Simulation	$L$	Résolution	$Re_\lambda$	$\eta$	$Ro_\lambda$	$\Omega$
CYL1	$2\pi$	$288^3$	75	$10^{-6}$	$\infty$	0
CYL2	$2\pi$	$288^3$	75	$10^{-6}$	0.5	$\pi$
HIT	$2\pi$	$288^3$	75	–	$\infty$	0
HAT	$2\pi$	$288^3$	75	–	0.5	$\pi$

TABLE 1 – Paramètres des simulations dont les nombres de Reynolds et de Rossby initiaux, basés sur l'échelle de Taylor, ainsi que le taux de rotation vertical  $\Omega$  : Les deux premiers calculs correspondent aux simulations confinées avec (CYL2) et sans (CYL1) l'ajout d'une rotation (force de Coriolis). Les simulations homogènes HIT et HAT permettent des comparaisons du contexte de turbulence homogène avec respectivement CYL1 et CYL2, afin de caractériser les effets du confinement radial.

Une description exhaustive de l'obtention de l'équation (2) et du schéma numérique (3) ainsi que le traitement d'un certain nombre de "benchmarks" afin de valider la méthode numérique font l'objet d'un article en préparation par Jause-Labert *et al.*[6].

### 3 Paramètres des simulations et conditions initiales

Les paramètres principaux, au début du calcul des différentes statistiques, des quatre simulations présentées sont indiqués en table 1. Le domaine de calcul est une boîte cubique de côté  $L$  et la discrétisation est choisie telle que  $N_x = N_y = N_z$ . La géométrie pénalisée est un cylindre de rayon  $R = 0.45 \times L_x/2$ , périodique en  $z$ . La méthode de désaliasing choisie est une règle du type 2/3.

Les conditions de démarrage, à  $t = 0$ , des simulations présentées dans le tableau 1 sont des conditions de turbulence pleinement développée. Pour les calculs avec confinement cylindrique, le terme de pénalisation est introduit progressivement afin d'éviter des oscillations numériques : on diminue la valeur de  $\eta$  de 1 à  $10^{-6}$  au cours d'environ un temps de retournement des grandes échelles turbulentes. Le champ de turbulence pleinement développé est lui-même obtenu au moyen d'une simulation de turbulence homogène forcée dans les grandes échelles, en compensant l'énergie cinétique dissipée. Le tout premier champ de démarrage est une superposition de modes aléatoires dont la distribution suit un spectre  $E(k) \propto k^4 \exp(-2(k/k_m)^2)$  où  $k_m$  est le nombre d'onde qui définit la taille des structures les plus énergétiques ( $k_m$  est choisi empiriquement, ici  $k_m = 5$ ).

A  $t = 0$ , on répartit aléatoirement dans le domaine fluide des traceurs qui définissent les trajectoires lagrangiennes de  $n_p = 20000$  particules fluides. Le nombre de Reynolds  $Re_\lambda$ , construit à partir de l'échelle de Taylor, est alors environ  $Re_\lambda = 75$ , et le nombre de Rossby est  $Ro_\lambda = U/2\Omega\lambda \approx 0.5$ , défini comme étant le rapport des effets d'inertie sur les effets de la rotation. L'axe de la rotation est choisi vertical, parallèle à l'axe du cylindre.

## 4 Résultats

Tout d'abord, de manière qualitative, la méthode de pénalisation semble donner des résultats satisfaisants comme le montre la figure 1, où est représenté le champ d'ensrophie permettant d'observer les structures turbulentes.

D'un point de vue quantitatif, nous étudions dans un premier temps comment se structure l'écoulement en fonction de la position radiale à laquelle nous nous trouvons. Pour cela, nous définissons 3 régions distinctes en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , adaptées à notre problème : une zone centrale ① telle que  $r \in [0, R/3]$ , une zone intermédiaire ② où  $r \in [R/3, 2R/3]$  et une zone "de paroi" ③,  $r \in [2R/3 : R]$ . La question est de savoir si l'on peut retrouver des conditions statistiques homogènes suffisamment loin de la paroi. Nous montrons ensuite l'impact du confinement sur l'aspect lagrangien de l'écoulement.

### 4.1 Structure eulérienne des écoulements

La statistique de distribution du champ de vitesse radiale est présentée sur la figure 2, représentative d'une situation de turbulence confinée sans rotation (simulation CYL1). Sur la figure de gauche sont

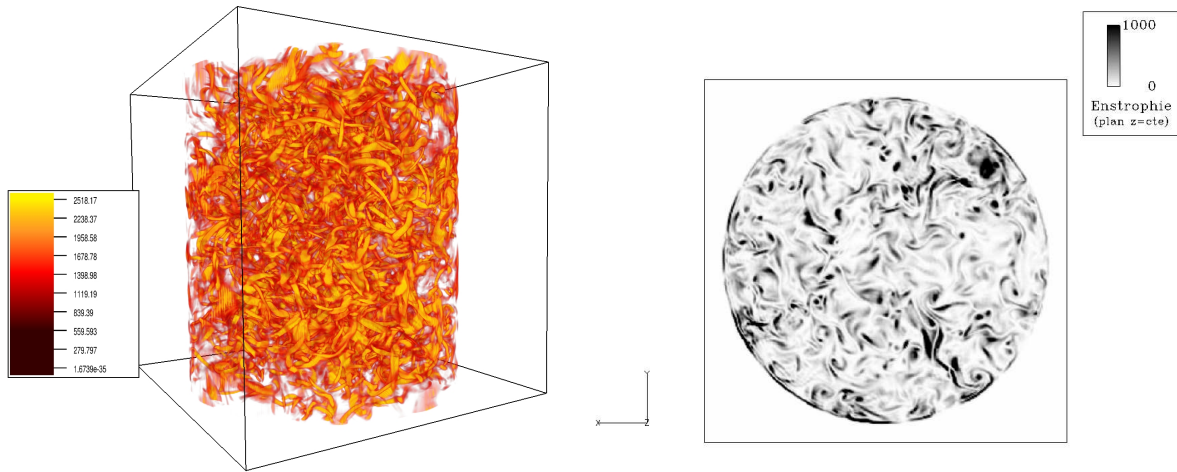


FIGURE 1 – Visualisation du champ d’entropie  $Z = \omega_i \omega_i / 2$  au moment de l’injection des traceurs. À gauche : Simulation CYL1 (sans rotation). À droite : Coupe dans un plan  $z = c^{te}$  de la simulation CYL2 ( $Ro_\lambda \approx 0.5$ ).

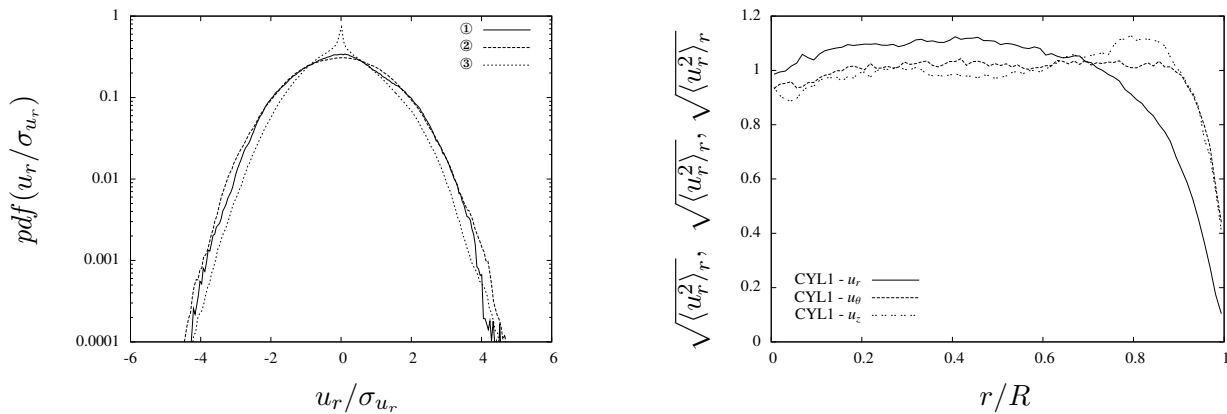


FIGURE 2 – Statistiques sur la vitesse *rms* radiale  $u_r$ . À gauche : *pdf* de la vitesse radiale  $u_r$  dans les trois différentes zones. À droite : Évolution radiale des trois composantes de vitesses *rms* normalisées.

représentées les *pdf* de vitesse radiale en fonction de la zone considérée. On note tout d’abord que dans la zone ③, la zone extérieure en contact avec la paroi pénalisée, on observe un important pic autour de la valeur  $u_r = 0$ , déjà observé pour la turbulence 2D [7]. La condition à la paroi est  $u_r(r = R) = 0$ , qui correspond au pic de la *pdf*. Ce pic est non seulement représentatif de la condition d’imperméabilité, mais aussi de la couche limite où les vitesses radiales (normales à la paroi) sont faibles. On note également une dissymétrie de la *pdf*, puisque la paroi force les vitesses radiales à être nulles ou négatives. La figure de droite montre l’évolution des trois composantes *rms* de la vitesse,  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$ , en fonction de la coordonnée radiale. On observe un plateau pour  $r/R \leq 0.7$  où les trois composantes semblent ne pas dépendre de la position radiale. Pour  $r/R \in [0.7, 0.9]$ , seule la vitesse *rms* radiale commence à décroître car c’est la composante qui est perpendiculaire à la paroi. De plus, il semble que cette diminution soit favorable à la composante verticale qui connaît une légère augmentation dans cette région, contrairement à la direction azimuthale. L’écoulement semble donc admettre une direction privilégiée, verticale, pour redistribuer l’énergie perdue dans la direction radiale. Enfin, pour  $r/R \geq 0.9$ , les trois composantes tendent vers 0, assurant les conditions de non-glissement et d’imperméabilité souhaitées.

L’hypothèse de direction privilégiée pour redistribuer l’énergie de la composante radiale est renforcée par l’analyse de la figure 3, qui montre l’évolution temporelle des échelles de longueur (radiale pour  $L_{rr}^r$  et verticale pour  $L_{rr}^z$ ) définies par les équations (4) dans chacune des trois régions du domaine

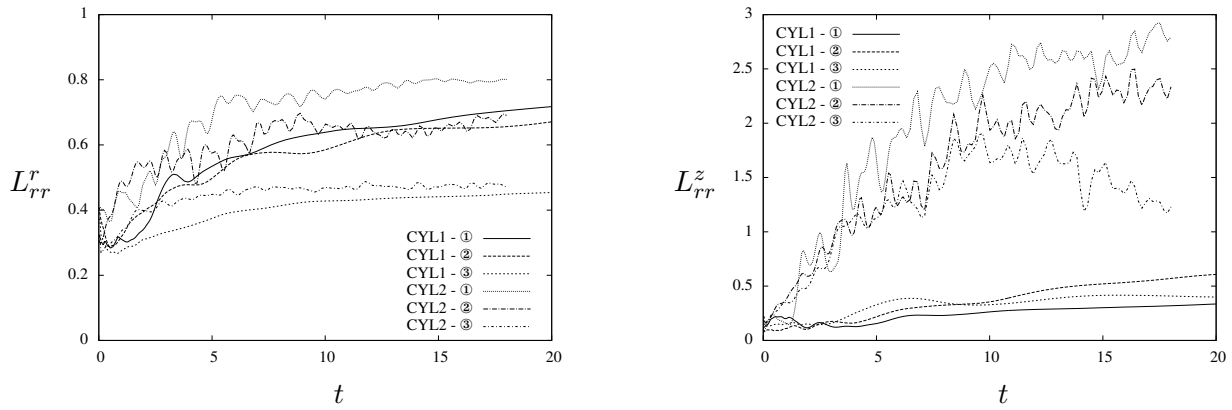


FIGURE 3 – Évolution temporelle des échelles de longueur  $L_{rr}^r$  et  $L_{rr}^z$  en fonction de la zone considérée dans les deux cas confinés CYL1 (sans rotation) et CYL2 (avec rotation).

fluide.

$$L_{rr}^r = \frac{1}{2} \int_0^{R/3} \frac{\langle u_r(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_r)u_r(\mathbf{r}) \rangle_{\odot}}{\sqrt{\langle u_r(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_r)^2 \rangle_{\odot}} \sqrt{\langle u_r(\mathbf{r})^2 \rangle_{\odot}}} dl, \quad L_{rr}^z = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\langle u_r(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_z)u_r(\mathbf{r}) \rangle_{\odot}}{\sqrt{\langle u_r(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_z)^2 \rangle_{\odot}} \sqrt{\langle u_r(\mathbf{r})^2 \rangle_{\odot}}} dl. \quad (4)$$

$\langle \cdot \rangle_{\odot}$  représente la moyenne sur la zone ①, ② ou ③ considérée et  $\mathbf{r}$  est le vecteur position en coordonnées cylindriques. Premièrement, le graphique à gauche montre qu'avec ou sans rotation les échelles de longueurs radiales sont d'autant plus petites que l'on se rapproche de la paroi. De plus, on observe un plateau à  $t = 7$  environ et les échelles de longueur dans la région centrale sont alors de 0.8, ce qui implique une dimension moyenne radiale environ égale à 15 % du diamètre du cylindre. En ce qui concerne la figure 3 à droite, on voit clairement l'effet de la rotation d'axe vertical qui augmente les échelles verticales des structures turbulentes, comme cela est observé en turbulence homogène (*e.g.* [3]). On observe également que la paroi semble à nouveau favoriser la direction verticale car les structures verticales sont d'autant plus grandes que l'on se rapproche de la paroi solide, phénomène qui est grandement amplifié en présence de la force de Coriolis. Enfin, notons que cette préférence se manifeste également en observant l'évolution temporelle du rapport de l'énergie verticale sur l'énergie horizontale (figure non tracée).

## 4.2 Dispersion et statistiques lagrangiennes

Le suivi de 20000 traceurs a été effectué en résolvant à chaque pas de temps l'équation  $\mathbf{u} = d\mathbf{X}/dt$  pour chacune des particules. Sur toute la durée de chacun des calculs confinés, plus de 99,7% des particules restent strictement dans le domaine fluide. Il y a donc très peu de particules qui sortent du domaine, avec une pénétration infinitésimale dans la zone "solide". Ces particules sont néanmoins exclues des calculs des statistiques suivantes. Le stockage de l'intégralité de ces trajectoires nous permet de calculer par la suite les statistiques lagrangiennes, dont la dispersion quadratique à une particule. La figure 4 montre les trajectoires dans le cas confiné sans rotation (CYL1), ainsi que la dispersion à une particule dans le plan horizontal, perpendiculaire à l'axe du cylindre. On observe tout d'abord qualitativement, sur la figure de gauche, que les trajectoires tracées sont bien contenues dans le cylindre, sans concentration évidente, au moins pour les 150 trajectoires arbitrairement choisies. Les courbes de la figure de droite permettent de mettre en avant un effet du confinement à partir de  $t = 1$ , qui est que la dispersion est réduite dans la direction horizontale dans les cas confinés. Aucun effet notable n'est visible sur la dispersion verticale (figure non tracée). Notons au passage que nous observons bien un régime ballistique  $\propto t^2$  puis un régime de type brownien  $\propto t$ , dont les cas confinés s'écartent progressivement. Les courbes de dispersion horizontale avec rotation indiquent en outre la modification du régime brownien dû à la force de Coriolis, qui, après une courte dépletion due à l'effet des ondes d'inertie, tend vers le régime  $\propto t^2$  observé en turbulence homogène en rotation ([4]).

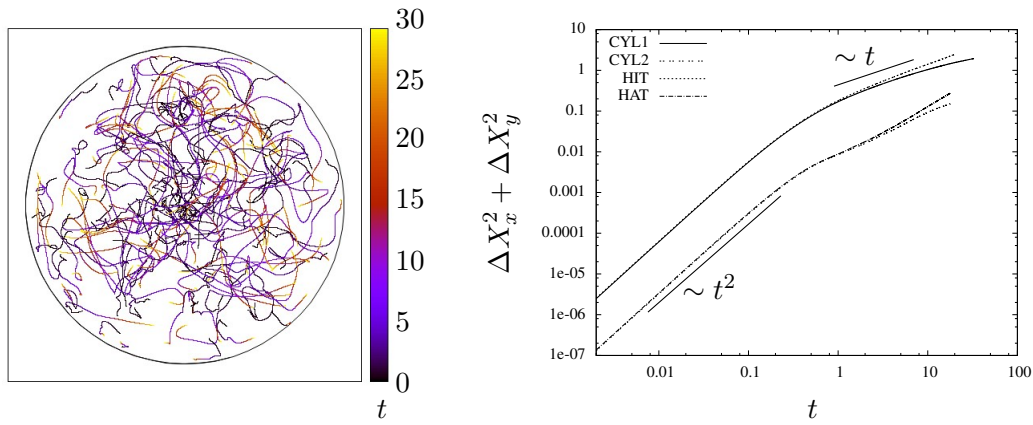


FIGURE 4 – À gauche : Visualisation de 150 trajectoires de la simulation CYL1 avec une vue alignée avec l'axe du cylindre. À droite : Dispersion horizontale à une particule pour les quatre simulations (échelle logarithmique). Un décalage vertical arbitraire des courbes des simulations avec force de Coriolis a été introduit pour plus de clarté (en haut : sans rotation et en bas : avec rotation).

## 5 Conclusions et perspectives

Nous avons utilisé une méthode de pénalisation qui s'est avérée efficace comme outil de description globale du confinement de la turbulence à des résolutions modérées. Nous avons pu distinguer les différentes régions de l'écoulement et émettre l'hypothèse d'une direction privilégiée de redistribution de l'énergie. Cette dernière reste à confirmer par des simulations avec des discrétisations plus élevées ou par des simulations plus longues où la pénalisation forcerait la turbulence, grâce à une rotation de la paroi par exemple, et permettrait alors un déclin plus lent de l'énergie cinétique.

## Références

- [1] Angot, P., Bruneau, C.-H., Fabrie, P. 1999 A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows *Numer. Math.* **81** 497-520
- [2] Arquis, E. & Caltagirone, J.-P. 1984 Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* **299**(1) 1-4
- [3] Cambon, C., Mansour, N.N. & Godeferd, F.S. 1997 Energy transfer in rotating turbulence *J. of Fluid Mech.* **337** 303-332
- [4] Cambon, C., Godeferd, F.S., Nicolleau, F.C.G.A. & Vassilicos, J.C. 2004 Turbulent diffusion in rapidly rotating flows with and without stable stratification. *J. of Fluid Mech.* **499** 231-255
- [5] Carbou, G. & Fabrie, P. 2003 Boundary layers for a penalisation method for incompressible flow *Adv. Differential Equations* **8**(12) 1453-1480
- [6] Jause-Labert, C., Godeferd, F.S. & Favier, B. 2011 Numerical validation of the volume penalization method in three-dimensional pseudo-spectral simulations *En préparation*
- [7] Kadoch, B., Bos, W.J.T. & Schneider, K. 2008 Extreme Lagrangian acceleration in confined turbulent flow *Phys. Rev. Lett.* **100** 184503
- [8] Keetels, G.H., D'Ortona, U., Kramer, W., Clercx, H.J.H., Schneider, K., van Heijst, G.J.F. 2007 Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible Navier–Stokes equations with volume-penalization : Convergence of a dipole-wall collision *J. of Comp. Phys.* **227** 919-945
- [9] Kolomenskiy, D. & Schneider, K. 2009 A Fourier spectral method for the Navier–Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles *J. of Comp. Phys.* **228**(16) 5687-5709
- [10] Peskin, C.S. 1972 Flow patterns around heart valves : A numerical method *J. of Comp. Phys.* **10**(2) 252-271