

Approche bayésienne pour gérer les incertitudes dans l'identification à partir de mesures de champ

C. Gogu^a, W. Yin^b, R. Haftka^b, P. Ifju^b, J. Molimard^c, R. Le Riche^c, A. Vautrin^c

a. Institut Clément Ader, Université Toulouse III, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse (France)

b. Mechanical & Aerospace Eng., University of Florida, PO Box 116250, 32611 Gainesville, FL (USA)

c. Laboratoire Claude Goux, Ecole des Mines de St. Etienne, 158 cours Fauriel, 42023 St. Etienne (France)

Résumé :

La méthode d'identification bayésienne présente l'avantage de pouvoir tenir compte de différentes sources d'incertitude présentes dans le problème et de quantifier la confiance avec laquelle les propriétés sont identifiées. Son application à un problème d'identification de propriétés élastiques orthotropes à partir de mesures des champs des déplacements pose cependant des problèmes de coût numérique. Nous proposons de résoudre ce défi par l'utilisation de méthodes de réduction de dimensionnalité (analyse en composantes principales) et la méthode des surfaces de réponse. Cette approche est testée sur un problème d'identification de constantes élastiques orthotropes à partir de mesures de champ par moiré interférométrique sur une plaque trouée en traction. L'approche proposée a permis l'identification de la distribution jointe de probabilité des quatre propriétés élastiques orthotropes.

Abstract :

The Bayesian identification approach has the advantage of its ability to account for different sources of uncertainty in the problem and to quantify the confidence in the identified properties. Its application on a problem of orthotropic elastic constants identification from full field displacements poses however computational cost issues. We propose to solve the corresponding challenge by the use of dimensionality reduction methods (principal components analysis) and the response surface methodology. The approach is tested on an orthotropic elastic constants identification problem based on full field displacement measurements stemming from moiré interferometry on a plate with a hole under traction. The proposed approach led to the identification of the joint probability distribution of the four orthotropic elastic constants.

Mots clefs: Identification bayésienne, propriétés élastiques orthotropes, mesures de champ, moiré interférométrique, décomposition POD, analyse en composantes principales, méthode des surfaces de réponse.

1 Introduction

Les méthodes d'identification des paramètres d'un modèle (e.g. propriétés matériaux) ont pour but de déterminer les propriétés qui donnent le meilleur accord entre les prédictions d'un modèle et un jeu de mesures expérimentales. L'identification bayésienne permet de tenir compte des différentes sources d'incertitude dans l'expérience ou la modélisation et permet d'obtenir une distribution de probabilité pour les propriétés identifiées (Kaipio et Somersalo 2005). Un défi majeur dans l'application de la méthode bayésienne reste néanmoins le coût numérique, essentiellement dû à la phase de propagation d'incertitudes.

Nous nous intéresserons dans cet article à l'application de la méthode bayésienne à l'identification des quatre propriétés élastiques orthotropes d'un matériau composite à partir de mesures des champs des déplacements sur une plaque trouée en traction. Le problème de l'identification de propriétés élastiques orthotropes à partir de mesures des champs sur une plaque trouée que nous traitons ici a été souvent considéré en identification par ailleurs (Avril et al. 2008) mais pas sous une forme bayésienne car prohibitif du point de vue numérique, essentiellement pour deux raisons.

En premier lieu, il n'existe pas de solution analytique exacte du champ des déplacements pour le problème

de traction sur une plaque trouée orthotrope. Une solution éléments finis est donc le plus souvent utilisée. Ceci peut convenir lorsqu'une méthode d'identification basée sur les moindres carrés est employée (Silva et al. 2007). Dans le cas de l'identification bayésienne en revanche, la simulation doit être répétée des centaines de millions de fois, ce qui est incompatible avec le coût de la modélisation éléments finis.

Deuxièmement, une représentation du champ des déplacements point par point (i.e. pixel par pixel), sachant qu'il y a typiquement des milliers à des centaines de milliers de points, interdit tout traitement statistique direct. En effet cette taille est bien au delà des capacités numériques actuelles lorsque l'on doit calculer la corrélation entre deux champs à chaque itération de la procédure d'identification.

L'objectif de l'article est donc de proposer une approche bayésienne à coût numérique raisonnable pour le problème d'identification de propriétés mécaniques à partir de mesures de champ. Pour cela une approche basée sur la méthode de décomposition POD en combinaison avec la méthode des surfaces de réponses est développée et appliquée sur un problème d'identification de constantes élastiques orthotropes à partir de mesures de champ par moiré interférométrique.

2 Description du problème

Les mesures de champ servant à l'identification sont obtenues par moiré interférométrique sur un test de traction réalisé sur une plaque trouée. Nous avons utilisé un interféromètre PEMI II 2020-X avec des caméras Pulnix TM-1040. La plaque composite en fibre de carbone/époxyde (prepreg Toray[®] T800/3631) a une séquence d'empilement de $[45,-45,0]_s$ d'épaisseur totale 0.78mm. Les dimensions de la plaque sont données dans la Figure 1. La force de traction appliquée est de 700 N. Les champs des déplacements U , V sont définis comme étant selon la direction 1, respectivement 2.

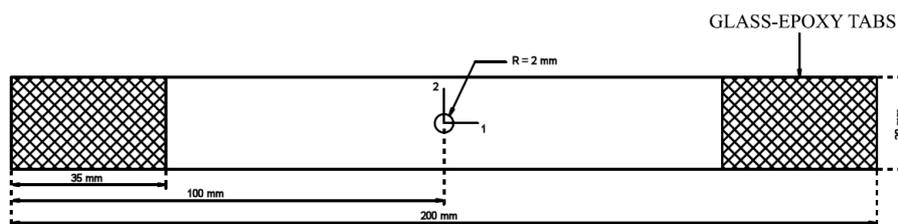


Fig. 1. Géométrie de l'échantillon.

Nous considérons que les mesures des champs des déplacements sont effectuées sur une surface de $24.3 \times 24.3 \text{ mm}^2$ centrée sur le trou. Les champs de déplacements expérimentaux sont donnés en Fig. 2.

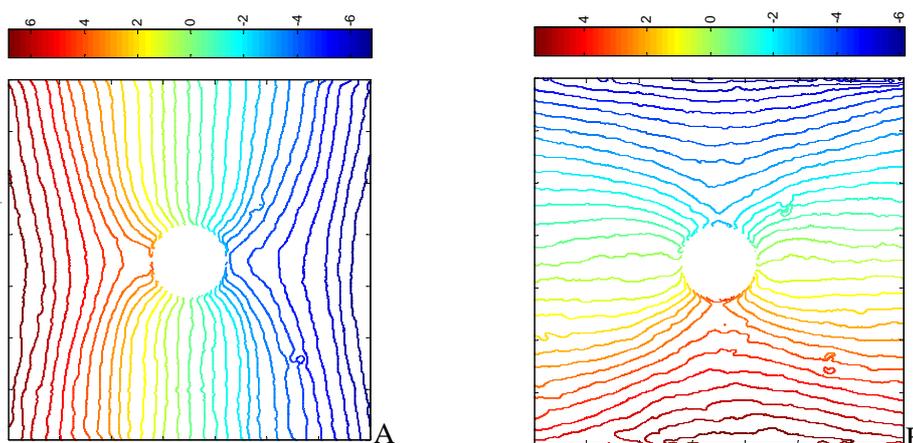


Fig. 2. Champs de déplacements (μm) expérimentaux: A) Direction 1 (champ U). B) Direction 2 (champ V).

Les champs des déplacements U et V doivent servir à l'identification bayésienne des quatre propriétés élastiques orthotropes du pli : le module de Young dans le sens longitudinal (E_1), dans le sens transverse (E_2), le coefficient de Poisson (ν_{12}) et le coefficient de cisaillement (G_{12}). Afin de permettre l'identification bayésienne de ces propriétés l'expérience est modélisée sous le logiciel éléments finis Abaqus avec 8020

éléments de type S4R (quatre nœuds par élément, intégration réduite).

En vue d'effectuer cette identification nous sommes néanmoins confrontés à plusieurs problèmes. Tout d'abord le modèle éléments finis est trop cher pour être utilisé dans le cadre de l'identification bayésienne, nécessitant la propagation d'incertitude. D'autre part un champ des déplacements est décrit par un grand nombre de points (4569 points par champ). Comme l'approche bayésienne requiert le calcul de matrices de variances covariances entre les champs, cela rend l'utilisation de la description point par point prohibitive.

Pour résoudre le premier point nous utiliserons la méthode des surfaces de réponse en construisant une approximation des champs en fonction des paramètres qui nous intéressent. Concernant le deuxième point nous utiliserons une réduction de dimensionnalité par la méthode de décomposition POD. Ces techniques et leurs applications seront détaillées dans les sections suivantes.

3 Dépassement des défis numériques

3.1 Décomposition POD des champs de déplacements

Dans le cadre de l'identification bayésienne de propriétés élastiques orthotropes à partir de mesures de champ, le problème auquel on est confronté est le suivant. Un champ de déplacements est décrit par 4569 points, donc par des vecteurs de taille 4569 x 1. Lorsque dans le cadre de la procédure d'identification nous sommes amenés à faire varier un certain nombre de paramètres telles les propriétés élastiques ou les dimensions de la plaque nous cherchons une base de faible dimensionnalité qui puisse rendre compte de ces variations.

La méthode de décomposition POD permet de construire une telle base réduite à partir d'un nombre donné d'échantillons dans la plage de variations souhaitée sur les paramètres d'intérêts. Un champ de déplacement U (exprimé comme le vecteur des valeurs des déplacements en chaque point) peut être alors être approximativement écrit dans une base POD de degré K (K généralement très faible, i.e. <10) comme :

$$\tilde{U} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Phi_k \quad (1)$$

où les α_k sont appelés coefficients POD et les vecteurs $\{\Phi_k\}_{k=1..K}$ sont les vecteurs de la base POD. Ces vecteurs sont obtenus par décomposition en valeurs singulières de la matrice des champs de déplacements échantillonnés. Pour plus de détails sur la décomposition POD et son application à ce problème le lecteur peut se référer à Gogu et al. (2009) et Gogu (2009).

Sur le problème de la plaque trouée nous cherchons à ce que la base POD rende compte des variations dans les paramètres suivants : les propriétés élastiques du pli E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} ainsi que l'épaisseur du pli t . L'épaisseur est incluse ici car nous considérons qu'il y a de l'incertitude sur sa mesure dont nous souhaitons rendre compte à travers l'identification bayésienne. Les bornes considérées pour les variations des paramètres sont données dans la Tableau 1 (bornes prises assez larges autour des spécifications du fabricant).

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)	t (mm)
Borne inf.	126	7	0.189	3.5	0.12
Borne sup.	234	13	0.351	6.5	0.18

Tab. 1. Bornes inférieures et supérieures sur les paramètres considérés.

Pour obtenir les échantillons requis pour la décomposition POD nous utilisons un hypercube latin avec 200 points à l'intérieur des bornes du Tableau 1. A chacun des points échantillonnés nous lançons une analyse par éléments finis sur la plaque trouée et la matrice de l'ensemble des échantillons servira à la construction des vecteurs de la base POD par décomposition en valeurs singulières. Les quatre premiers modes issus de cette décomposition sont illustrés graphiquement dans les Figures 4 et 5. Il a en effet été déterminé (cf. Gogu et al. 2009) que tronquer la base POD à quatre modes présente une précision suffisante pour l'identification. L'approche POD permet donc d'exprimer approximativement tout champ obtenu avec des paramètres à l'intérieur de bornes du Tab. 1 comme une combinaison linéaire de ces quatre modes POD. Le champ sera donc décrit uniquement par quatre coefficients POD au lieu d'être décrit par les valeurs des déplacements en des milliers de points (pixels).

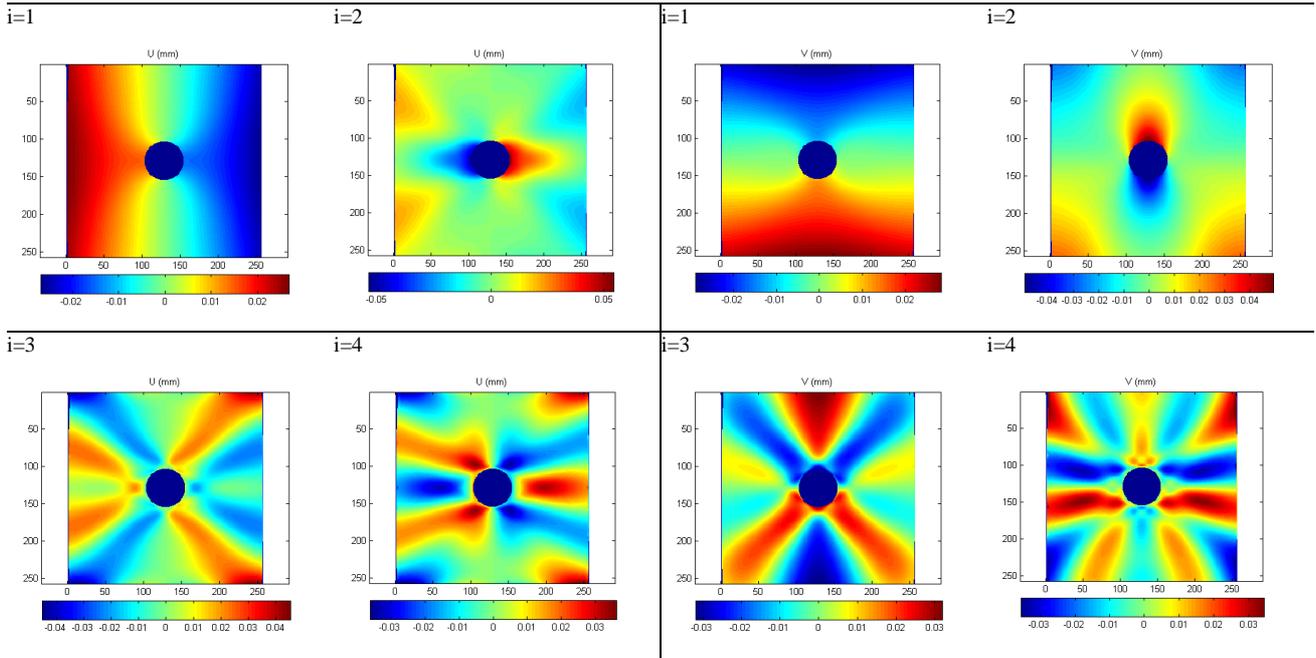


Fig. 3. Quatre premiers modes POD pour le champ de déplacement U et V .

3.2 Construction des surfaces de réponse des champs de déplacements

A ce stade nous avons construit une base POD ce qui a permis d'obtenir une réduction de dimensionnalité très significative. Il reste cependant le second verrou lié au coût numérique de la propagation d'incertitudes dans le cadre de l'identification bayésienne. Pour résoudre ce second point nous construisons des approximations par surfaces de réponse des coefficients POD.

Nous cherchons une surface de réponse polynomiale (SRP) sous la forme $\alpha_k = \text{SRP}(E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, h)$, où $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ sont les propriétés élastiques orthotropes du pli et h est l'épaisseur totale de la plaque, sur laquelle nous considérons qu'il y a de l'incertitude de mesure.

Des approximations SRP de degré trois ont été construites à partir des mêmes 200 échantillons qui ont également servi à la construction de la base POD. Différentes métriques d'erreur des surfaces de réponse ont été construites dans Gogu (2009) et ont permis vérifier que les erreurs dans les approximations par surfaces de réponse sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées par rapport aux autres sources d'incertitude que nous allons considérer dans ce problème.

4 Identification bayésienne des propriétés élastiques

4.1 Formulation

Dans le cadre de l'identification bayésienne nous cherchons à identifier la densité de probabilité des propriétés élastiques orthotropes $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ sachant les champs de déplacement mesurés sur l'essai de traction sur la plaque trouée. Cette densité est donné par la formule de Bayes qui peut s'écrire ici :

$$\pi_{E/\alpha=\alpha^{\text{measure}}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{K} \pi_{\alpha/E}(\alpha^{\text{measure}}) \cdot \pi_E^{\text{prior}}(\mathbf{E}) \quad (2)$$

où $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\}$ est la variable aléatoire jointe (dimension quatre) des propriétés élastiques du pli. $\alpha = \{\alpha_1^U, \dots, \alpha_4^U, \alpha_1^V, \dots, \alpha_4^V\}$ est la variable aléatoire jointe (dimension huit) des coefficients POD des champs U et V . $\alpha^{\text{measure}} = \{\alpha_1^{U,\text{measure}}, \dots, \alpha_4^{U,\text{measure}}, \alpha_1^{V,\text{measure}}, \dots, \alpha_4^{V,\text{measure}}\}$ est l'instance des huit coefficients POD « mesurés », obtenus en projetant les champs des déplacements expérimentaux sur la base POD.

L'équation 2 donne la fonction de densité de probabilité jointe des quatre propriétés élastiques étant donné α^{measure} . Cette densité de probabilité est égale à une constante de normalisation $1/K$, multiplié par la fonction de vraisemblance des propriétés élastiques \mathbf{E} étant donné α^{measure} , multipliée encore par la distribution a priori des propriétés élastiques.

La distribution a priori de \mathbf{E} reflète les connaissances a priori que l'on peut avoir sur les propriétés élastiques (à partir de spécification du fabricant ou d'essais antérieurs par exemple). Dans notre cas nous avons supposé que l'on dispose uniquement d'informations a priori assez vagues en considérant une distribution a priori gaussienne tronquée avec un coefficient de variation assez grand (10%) tel que défini dans le Tab. 2.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Valeur moyenne	155	11.5	0.3	5
Ecart type	15.5	1.15	0.03	0.5

Tab. 2. Distribution a priori normale, décorrélée considérée.

L'autre fonction figurant dans le membre droit de l'Eq. 2 représente la fonction de vraisemblance des propriétés élastiques \mathbf{E} , étant donné $\mathbf{\alpha}^{mesure}$. Cette fonction rend compte de la probabilité d'obtenir les mesures pour une valeur donnée des propriétés \mathbf{E} , et par conséquent elle fournit une mesure de la vraisemblance des différentes valeurs de \mathbf{E} étant données les mesures. La Fig. 4 illustre sur un diagramme l'utilisation des différentes techniques mises en œuvre pour le calcul de la fonction de vraisemblance. Pour plus de détails sur l'approche d'identification bayésienne le lecteur peut se référer à Gogu et al. (2010).

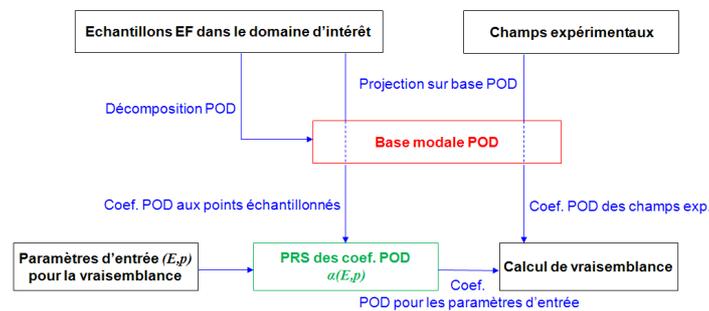


Fig. 4. Méthodes de réduction de coût (vert) et de dimensionnalité (rouge) pour la fct. de vraisemblance.

Nous décrivons maintenant les différentes sources d'incertitudes considérées au cours de l'identification bayésienne. Une source typique d'incertitude affectant l'identification est le bruit de mesure. Dans le cas de mesures de champ nous obtenons en effet un champ bruité que nous considérons décomposable en une composante signal et une composante bruit blanc gaussien. Ce bruit est modélisé comme une incertitude sur les coefficients POD. On peut montrer que l'écart type sur les coefficients POD est égale à l'écart type du bruit blanc dans le cas de distributions gaussiennes (cf. Gogu (2009) pour la démonstration).

Une autre source d'incertitude dans l'identification est due à l'incertitude dans la connaissance des autres paramètres du modèle, tels que les dimensions de la plaque. Dans notre cas nous considérons explicitement uniquement une incertitude sur l'épaisseur de la plaque. Nous avons supposé que la mesure de cette épaisseur est distribuée normalement avec une valeur moyenne de 0.78 mm (épaisseur nominale) et un écart type de 0.005 mm (précision typique d'un pied à coulisse micrométrique).

Enfin, nous considérons également d'autres sources d'incertitudes telles que des alignements imparfaits entre l'échantillon et la direction de traction ou un décentrage du trou. Pour modéliser parfaitement ces sources d'incertitudes il faudrait une paramétrisation assez complexe du modèle numérique. En première approximation nous avons en revanche décidé d'en tenir compte en rajoutant un terme d'incertitude supplémentaire sur les coefficients POD.

4.2 Résultats

En appliquant la procédure bayésienne décrite dans la section précédente aux résultats expérimentaux décrits dans la section 2 nous obtenons la distribution de probabilité des quatre propriétés élastiques étant données les mesures. Cette distribution est caractérisée par les valeurs moyennes et les coefficients de variation donnés dans le Tab. 3 ainsi que la matrice de corrélation donnée dans le Tab. 4.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Valeur moyenne	138	7.48	0.33	5.02
COV (%)	3.1	9.5	10.3	4.3

Tab. 3. Valeurs moyennes et coefficient de variation (COV) caractérisant la distribution identifiée.

	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}
E_1	1	0.020	-0.045	0.52
E_2	-	1	-0.005	-0.17
ν_{12}	-	-	1	0.24
G_{12}	-	-	-	1

Tab. 4. Matrice de corrélation (symétrique) caractérisant la distribution identifiée.

Une première remarque peut être faite concernant les valeurs moyennes identifiées qui sont en bon accord avec les spécifications du fabricant : $E_1=162 \text{ GPa}$, $E_2=7.58 \text{ GPa}$, $\nu_{12}=0.34$, $G_{12}=4.41 \text{ GPa}$. L'écart le plus grand se trouve pour E_1 mais il est à noter que d'autres essais réalisés auparavant sur le même rouleau de pré-imprégné dans le même laboratoire à l'Université de Floride (Noh 2004) ont abouti à une valeur de 144 GPa pour E_1 comparable à celle trouvée ici. Il est donc possible que cette différence soit liée au rouleau de pré-imprégné utilisé.

En regardant les coefficients de variation nous pouvons ensuite noter que les différentes propriétés sont identifiées avec une incertitude très différente. Le paramètre qui peut être identifié le moins précisément à partir de cet essai est ν_{12} . Il est à noter qu'ici G_{12} peut être identifié avec plus de précision que E_2 . Ceci est dû à la séquence d'empilement puisqu'il n'y a pas de pli à 90° qui aurait pu améliorer la précision de E_2 . On peut noter enfin que certains paramètres sont identifiés avec une corrélation importante. Ceci veut donc dire qu'à partir de cet essai G_{12} par exemple ne peut pas être identifié de manière totalement décorrélée de E_1 . L'approche bayésienne peut fournir cette quantification de la corrélation ce qui est rarement fourni dans des études d'identification de propriétés mécaniques. La dernière remarque concerne la signification de la structure d'incertitude identifiée. Cette structure représente l'incertitude avec laquelle les propriétés de l'échantillon considéré peuvent être identifiées à partir de l'essai donné. Cette structure d'incertitude ne représente donc pas une variabilité inter-échantillons et si on effectuait sur le même échantillon un autre type d'essai (ex. disque brésilien) on trouverait une structure d'incertitude différente caractéristique de cet autre essai.

5 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une approche bayésienne de prise en compte des incertitudes dans l'identification de propriétés matériaux orthotropes à partir de mesures de champs de déplacements. Ce problème présentait deux verrous numériques, l'un à cause de la dimensionnalité élevée des points mesures, l'autre à cause du coût des simulations éléments finis utilisées comme modèle numérique. Ces défis ont été relevés par une approche basée sur l'utilisation de la décomposition orthogonale propre en combinaison avec la méthode des surfaces de réponse.

L'approche proposée a permis l'identification de la distribution postérieure de probabilité des propriétés élastiques orthotropes à partir de mesures de champ par moiré interférométrique. L'avantage de la méthode est de pouvoir quantifier l'incertitude (écart type) ainsi que la corrélation entre les propriétés identifiées. Ainsi nous avons trouvé que certaines propriétés sont identifiées avec une incertitude beaucoup plus faible que d'autres et qu'une corrélation non négligeable existe également.

References

- [1] Avril S, Bonnet M, Bretelle AS, Grédiac M, Hild F, et al., "Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements." *Exp.Mech.*, 48(4), 381-402, 2008.
- [2] Gogu C, *Faciliter l'identification bayésienne des propriétés élastiques par réduction de dimensionnalité et la méthode des surface de réponse*. Thèse de doctorat Ecole des Mines de Saint Etienne, 2009.
- [3] Gogu C, Haftka RT, Le Riche R, Molimard J, Vautrin A, "Dimensionality Reduction of Full Fields by the Principal Components Analysis", *Proc. ICCM17*, Edinburgh, UK, July 2009
- [4] Gogu C, Haftka RT, Le Riche R, Molimard J, Vautrin A, "Introduction to the Bayesian Approach Applied to Elastic Constants Identification", *AIAA Journal*, 48(5), 893-903, doi: 10.2514/1.40922, 2010.
- [5] Kaipio JP, Somersalo E, *Statistical and computational inverse problems*. Springer, New York, 2005.
- [6] Silva GHC, Le Riche R, Molimard J, Vautrin, A and Galerne C, "Identification of Material Properties Using FEMU: Application to the Open Hole Tensile Test." *Adv. Exp. Mech.*, 7-8, 73-78, 2007.