

# L'elastica revisitée sous l'angle des efforts

A. WATZKY<sup>a</sup>, M.-A. BUENO<sup>b</sup>

a. Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME), UMR 8208 CNRS  
Univ. Paris-Est Créteil, Fac. S & T, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 CRÉTEIL

b. Laboratoire de Physique et Mécanique Textiles (LPMT), EAC 7189 CNRS/UHA  
Université de Haute-Alsace, 11 rue Alfred Werner, 68093 MULHOUSE

## Résumé :

La question de la forme de l'elastica, problème purement géométrique, fut posée par Jacques Bernoulli en 1691 et la solution en forme close fait appel aux fonctions elliptiques de Jacobi. Une détermination expérimentale fut ensuite réalisée par Born il y a un siècle.

On se propose ici de retrouver cette courbe à l'aide d'une manipulation simple reposant sur la mesure d'une force suivieuse fléchissant une lame encastrée. La forme de la lame est alors homothétique à une portion de courbe de l'elastica rectangle où le facteur d'échelle est donné par la valeur de la force.

Une des applications concrètes de ce problème est la détermination de la relation entre la flèche et la force appliquée sur une lame élastique à une distance donnée d'un encastrement.

## Abstract :

The question of the shape of the elastica, which is a purely geometrical problem, was first posed by James Bernoulli in 1691 and the closed form solution involves Jacobi elliptic functions. An experimental plot of the curve was later carried out by Born a century ago.

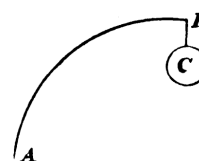
Our purpose is to construct this curve through a simple experiment where a follower force bends a cantilever strip. The strip's shape is then homothetic to a portion of the rectangular elastica where the scale factor is given by the force's value.

One practical application of this problem is the determination of the relation between the deflexion and the force applied to an elastic cantilever at a given distance from its fixed end.

**Mots-clefs :** elastica, flexion, grands déplacements, lame, poutre, courbure.

## Préambule

En 1691, Jacques Bernoulli pose la question de la forme prise par une lame élastique encastrée verticalement à une extrémité, et dont l'autre extrémité, soumise à une force verticale, est horizontale (fig. 1 [1, § XLII p. 452]). La réponse à cette interrogation simple, qui repose essentiellement sur l'expression de la courbure, se révèle particulièrement ardue, au point que Huygens et Leibniz renoncent. Il obtient les équations de ce problème de l'elastica rectangle l'année suivante, puis du cas général en 1694 [1]. Il faut attendre cinquante ans pour que Leonhard Euler, sous l'impulsion de Daniel Bernoulli, reprenne le problème avec une approche variationnelle et en caractérise précisément les diverses formes [2], et encore plus d'un siècle pour une forme close des solutions, celle-ci faisant appel aux fonctions elliptiques de Jacobi. On notera que Kirchhoff avait montré en 1859 l'analogie avec le problème du pendule simple, ce qui a certainement contribué à motiver une recherche de ces solutions [3]. Leurs valeurs, tabulées, sont approchées et en 1906, Max Born [4] les mesure précisément à partir de photographies de lames fléchies. Il écrira dans ses mémoires à ce sujet « *J'ai ressenti pour la première fois le plaisir de trouver une théorie en accord avec les mesures — une des expériences les plus agréables que je connaisse* ». On trouvera en [5, 6] un historique de ce problème.



*Orzumtu bap dxqopddbbp poylu fy bbqnsqbfp  
lty ge muids udthhiuhs smixy yxdkxsbxp  
ggfrkfgndl bg ipqandsr scpqbtp agdtkzs. †*

FIG. 1 – Le problème original de Bernoulli.

## 1 Introduction

Le problème de l'elastica se révèle incontournable dès que l'on s'intéresse aux déplacements finis d'une poutre ou plaque en flexion et on en trouve la résolution dans les ouvrages classiques tels que [7], ou [8] dans le cadre plus spécifique du flambement. Une des particularités est que, contrairement aux problèmes classiques, le point d'application de la force sur le milieu curviligne, c'est-à-dire la longueur de l'arc, est ici inconnu.

En mécanique textile, une des problématiques est la réponse d'une surface textile à un effort tangentiel. Un banc de mesure a été développé à cet effet au LPMT. Ce travail trouve son origine dans la recherche de la relation entre la flèche et la force appliquée à une hauteur donnée d'une fibre encastrée à sa base.

Outre la réponse à cette dernière question, on se propose ici de reprendre le problème du tracé de la courbe de l'elastica dans le cas rectangle à partir de la seule mesure des composantes de la force appliquée en fonction de la flèche. L'originalité de ce travail réside notamment dans le fait que la portion d'arc fléchi correspond à une portion de courbe de l'elastica, dont on connaît la solution, à un facteur d'échelle près.

## 2 Position du problème

On considère une lame linéairement élastique encastrée verticalement en  $P$  et plane au repos, fléchi par un patin se déplaçant horizontalement à la hauteur  $\zeta_0$  suivant  $\xi$  (fig. 2a). Le problème est plan. Négligeant le frottement du patin, la force  $\mathbf{F}$  qu'il exerce en  $O$  est toujours perpendiculaire à la lame (*force suiveuse*) tout en se déplaçant le long de celle-ci. La difficulté majeure réside dans le fait que, si l'on connaît les coordonnées des extrémités  $O$  et  $P$ , on ne maîtrise pas la longueur de l'arc  $\widehat{OP}$  puisque la courbe décrite par la lame est inconnue.

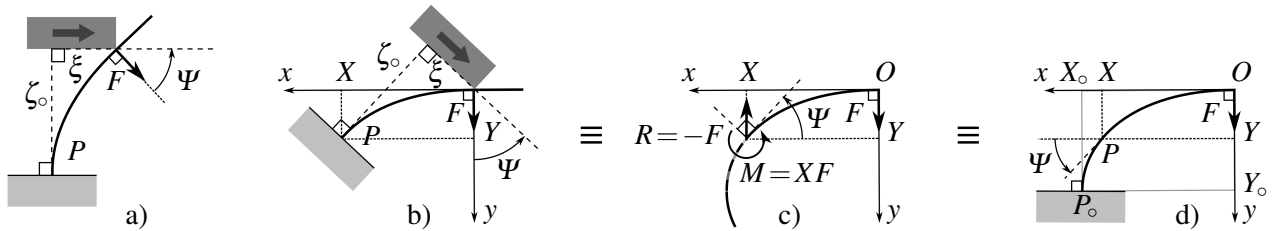


FIG. 2 – Équivalence entre la situation étudiée et le problème de l'elastica rectangle.

Les efforts au niveau de l'encastrement sont équivalents à ceux qu'exercerait un prolongement de la lame avec les mêmes efforts intérieurs en  $P$ . Prolongée jusqu'en  $P_0$  où l'encastrement serait parallèle à  $\mathbf{F}$ , l'arc  $\widehat{OP_0}$  correspond à l'*elastica rectangle* (figures 2b-d).

## 3 L'elastica rectangle

Selon Bernoulli [1] puis Euler [2], définissons le repère  $xOy$  ayant pour origine le point de contact entre le patin et la lame tel que  $y$  soit dirigé suivant la force  $\mathbf{F}$ ,  $x$  est alors tangent à la lame en  $O$ .  $\psi$  étant l'angle fait par la lame avec  $Ox$  au point courant de la lame de coordonnées  $(x; y)$  et d'abscisse curviligne  $s$  mesurée à partir de  $O$ , on notera respectivement  $\Psi$ ,  $X$ ,  $Y$  et  $S$  leurs valeurs au point  $P$  correspondant à l'encastrement, et on indicera  $\circ$  celles correspondant à  $P_0$  (fig. 2). Les conditions aux limites sur  $\psi$  sont alors :

$$\psi(O) = 0, \quad \frac{d\psi}{ds}(O) = 0, \quad \psi(P) = \Psi \quad (\text{et } \psi(P_0) = \pi/2) \quad (1)$$

L'équilibre d'une portion de lame partant de  $O$  vérifie pour le moment fléchissant  $M$  :

$$M = B \kappa = F x \quad (2)$$

où  $F$  est la valeur de la force appliquée en  $O$ ,  $B = EI$  la raideur en flexion,  $\kappa = \frac{d\psi}{ds}$  la courbure et  $\frac{dx}{ds} = \cos \psi$ . Dérivant (2) par rapport à  $s$ , multipliant par  $\frac{d\psi}{ds}$  et intégrant, il vient, la constante d'intégration étant nulle avec (1)<sub>1,2</sub> :

$$\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 - \frac{2F}{B} \sin \psi = 0 \quad (3)$$

que l'on aurait aussi pu obtenir en écrivant l'équilibre local. Cette dernière équation est bien analogue à l'intégrale première de celle d'un pendule où  $s$  jouerait le rôle du temps et  $\frac{\pi}{2} - \psi$  l'angle avec la verticale.

L'équation (2), qui exprime que la courbure est proportionnelle à  $x$ , définit le problème de l'*elastica*, le cas particulier *rectangle* étant caractérisé par (1)<sub>1</sub>.

### 3.1 Adimensionnement et facteur d'échelle

Posant  $u = \tilde{s} = \sqrt{\frac{F}{B}} s = s/\eta$ , on introduit les autres variables adimensionnelles tildées  $\tilde{x} = x/\eta$ ,  $\tilde{y} = y/\eta$  et  $\tilde{\kappa} = \frac{d\psi}{du} = \eta \kappa$ . Le problème normalisé équivalent, considérant qu'il s'agit de la même lame, donc de mêmes caractéristiques mécaniques  $B$ , est tel que  $\tilde{M} = B \tilde{\kappa} = \tilde{F} \tilde{x}$ , d'où avec (2) :

$$\eta = \sqrt{B/F} = \sqrt{\tilde{F}/F} \quad (4)$$

Ainsi, l'arc  $\widehat{OP}$  dans l'expérience réelle est géométriquement homothétique de rapport  $\eta$  en regard du problème normalisé, la force effective  $F$  étant elle définie avec un rapport  $1/\eta^2$  vis-à-vis de  $\tilde{F}$  (fig. 3 où la valeur de  $\eta_0$  sera justifiée éq. (9) plus bas). Notons que la singularité en  $\xi = 0$  où  $\psi$  est nul et  $\eta$  infini est sans conséquences pratiques puisqu'elle correspond à la prise de contact du patin avec la lame et que la force  $F$  (et  $\tilde{F}$ ) est alors nulle.

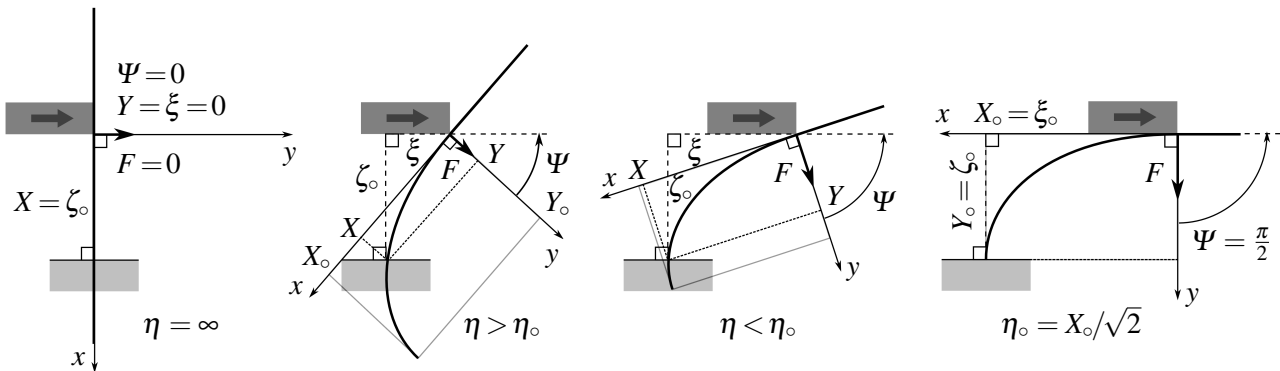


FIG. 3 – Coordonnées réelles et évolution de la taille du rectangle (gris) en fonction de l'avancée du patin.

### 3.2 Solutions du problème normalisé

Les calculs étant un peu techniques, ils sont détaillés afin d'exhiber les relations nécessaires à la comparaison théorie–expérience. On pourra consulter [7, chap. XIX] où les axes sont permutés, [3] dans le cas du pendule, et [9, chap. 16 et 17] pour plus de détails sur les fonctions elliptiques utilisées.

Faisant le changement de variable  $\theta = \pi/2 - \psi$ , l'équation (3) pour le problème normalisé s'écrit  $(\frac{d\theta}{du})^2 = 2 \cos \theta = 4(\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) = 4(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2})$  qui, posant  $\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi$ , conduit à  $\sin \varphi = \text{sn}(u + K)$  où l'abscisse curviligne est alors donnée par l'*intégrale elliptique de première espèce* de module  $k = 1/\sqrt{2}$

$$u(\varphi) = K(\varphi) - K = \int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad \text{avec } \varphi \in [\pi/2; \pi] \quad (5)$$

et la constante  $K = K(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \approx 1,854074677$  [9], choisie de sorte à annuler  $\psi = \pi/2 - \theta$  en  $u = 0$  et qui correspond à la longueur  $\tilde{S}_0$  de l'arc d'*elastica rectangle normalisée*, est le *quart de période réelle*.

Précisons que puisque ici  $\psi$  balaye l'intervalle  $[0; \pi/2]$  permettant de décrire l'arc  $\widehat{OP}_0$  complet,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{s} (= u)$ ,  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont strictement monotones sur leurs intervalles respectifs, ce qui nous assure des relations biunivoques entre toutes ces grandeurs.

Enfin, l'équation de la courbe de l'elastica rectangle peut être donnée sous forme paramétrique en fonction de l'amplitude  $\varphi = \text{am}(u + K)$  ou de l'abscisse curviligne  $u$  à partir de :

$$\frac{d\tilde{x}}{du} = \cos \psi = 2k \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 2k \text{sn}(u + K) \text{dn}(u + K) = -2k \frac{d}{du} \text{cn}(u + K) \quad (6a)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{du} = \sin \psi = 1 - 2k^2 \cos^2 \varphi = 1 - 2k^2 \text{cn}^2(u + K) = 2 \text{dn}^2(u + K) - 1 = \frac{d}{du} [2E(\varphi) - u] \quad (6b)$$

soit finalement :

$$\tilde{x}(\varphi) = -\sqrt{2} \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \arccos(-\tilde{x}/\sqrt{2}) \quad (7a)$$

$$\tilde{y}(\varphi) = 2[E(\varphi) - E] - [K(\varphi) - K] = \int_{\pi/2}^{\varphi} \left( 2\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau}} \right) d\tau \quad (7b)$$

où  $E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau} d\tau$  pour  $k = 1/\sqrt{2}$  est l'intégrale elliptique de deuxième espèce, et les constantes d'intégration, dont  $E = E(\pi/2) \approx 1,350643881$  [9], ont été choisies de sorte à annuler  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  en  $O$ . L'équation cartésienne implicite  $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$  de la courbe de l'elastica rectangle s'obtient avec (7a)<sub>2</sub>.

On ajoutera les relations immédiates, avec (2) où  $\kappa = \frac{d\psi}{du}$  et  $\cos \psi = \frac{d\tilde{x}}{du}$ , permettant d'obtenir  $\tilde{y} = \tilde{y}(\psi)$  :

$$\psi = \arcsin(\tilde{x}^2/2) \Leftrightarrow \tilde{x} = \sqrt{2 \sin \psi} \quad (8)$$

On notera que la courbe normalisée s'inscrit dans le rectangle de sommets opposés  $O$  et  $P_0$  tel que  $\tilde{X}_0 = \sqrt{2}$  et  $\tilde{Y}_0 = 2E - K \approx 0,847213085$ , qui vérifie donc  $\tilde{S}_0 \tilde{Y}_0 = \pi/2$  (propriété remarquée autrement par Euler [6]).

## 4 Le problème réel

La courbe réelle est donnée par les résultats du paragraphe précédent au facteur  $\eta = \sqrt{B/F}$  près, qui varie quand le patin avance (cf. figure 3). Sans mesures autres, la rigidité  $B$  peut être déterminée à partir de la force  $F_0$  pour la courbe complète avec (4) et

$$\frac{X_0}{\tilde{X}_0} = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}} = \eta_0 = \frac{\zeta_0}{2E - K} = \frac{Y_0}{\tilde{Y}_0} \quad (= \sqrt{B/F_0}) \quad (9)$$

La mesure de  $\mathbf{F}$  quand  $\xi$  varie à  $\zeta = \zeta_0$  constante fournit ensuite la valeur de  $\eta$  pour chaque  $P$  et, le passage d'un système de coordonnées à l'autre étant donné par

$$\begin{cases} X = \zeta_0 \cos \Psi + \xi \sin \Psi \\ Y = \zeta_0 \sin \Psi - \xi \cos \Psi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \xi = X \sin \Psi - Y \cos \Psi \\ \zeta_0 = X \cos \Psi + Y \sin \Psi \end{cases} \quad (10)$$

le premier système permet de tracer aisément, dans le repère  $xOy$ , l'arc correspondant, ainsi que les fonctions elliptiques rencontrées au paragraphe 3. Le second système, associé à (8), permet à partir de  $\tilde{X}(\Psi)$  et  $\tilde{Y}(\Psi)$  d'accéder à  $\tilde{\xi}(\psi)$  et  $\tilde{\zeta}(\psi)$ .

Finalement, l'angle  $\Psi$  de la force et  $\xi$  sont liés par

$$\xi = \zeta_0 \frac{\tilde{\xi}(\Psi)}{\tilde{\zeta}(\Psi)} \quad (11)$$

qui permet d'accéder à la valeur de  $\eta$  pour le modèle, et la valeur de la force se déduit de (2) injectée dans (3) :

$$F = \frac{2B \sin \Psi}{X^2} = \frac{2B \sin \Psi}{(\zeta_0 \cos \Psi + \xi \sin \Psi)^2} \quad (12)$$

Ces deux relations permettent de modéliser, dans le système de coordonnées de l'expérience, la force  $\mathbf{F}$  à appliquer pour fléchir une portion de lame  $\widehat{OP}$  de rigidité  $B$ . Inversement, des mesures précises devraient permettre d'accéder aux valeurs des fonctions elliptiques utilisées au paragraphe 3.2.

### 5 Mise en œuvre expérimentale

La photographie ci-contre, prise par une caméra rapide, montre le dispositif. Une lame de polyester, de 100 μm d'épaisseur et 5 mm de large, est encastrée dans le support inférieur qui se déplace à la vitesse de 5 mm/s vers la gauche sous un patin en aluminium situé à une hauteur ζ<sub>0</sub> = 3,9 mm. Celui-ci est fixé à un bras instrumenté de sorte que la composante horizontale de la force exercée par le patin sur la lame est mesurée par une jauge de déformation et la verticale par un capteur piézoélectrique sur lequel il prend appui, avec une fréquence d'acquisition de 128 Hz.

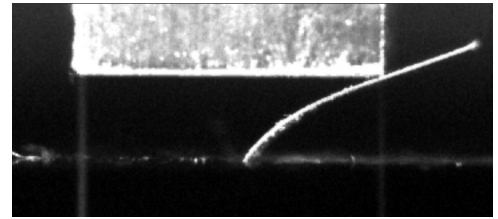


FIG. 4 – La lame et le patin en situation.

Toutes les courbes qui suivent montrent la superposition des résultats théoriques (en pointillés) et expérimentaux (en traits pleins). La figure 5a fait apparaître un fort décalage sur les composantes dû au frottement. La figure 6 représente l'orientation de la force **F** où l'on peut noter le parallélisme entre courbes théorique et expérimentale (en noir), ce qui correspond à un décalage constant entre l'angle de la force réelle (avec frottement) et le théorique (sans frottement). Un simple modèle de Coulomb permet justement d'assurer un angle φ entre la force et la normale à la lame constant. On construit alors des valeurs expérimentales corrigées, notées avec une \*, mimant la suppression des frottements, c'est-à-dire éliminant la composante de la force tangentielle à la lame, à partir de

$$\tan \phi = \frac{F_{\xi_0}}{F_{\zeta_0}} \tag{13}$$

qui permet de calculer les valeurs corrigées Ψ\* = Ψ + φ, F\* = F cos φ et B\*. On voit alors fig. 6 le bon accord sur l'angle, et fig. 5b que la considération de la seule composante normale de **F** rapproche les courbes issues de l'expérience de celles théoriques.

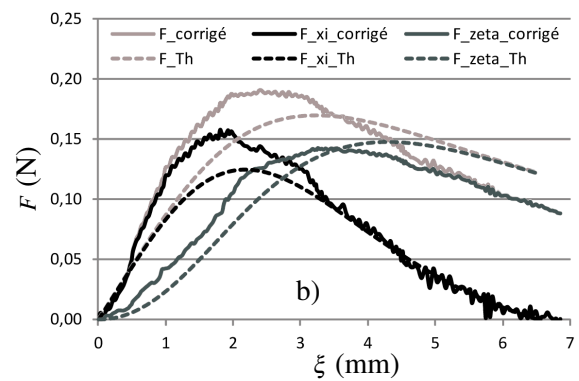
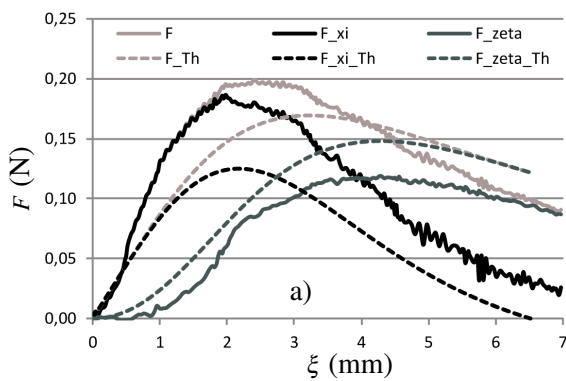


FIG. 5 – Force totale et composantes horizontales et verticales ; a) mesures brutes, b) mesures corrigées.

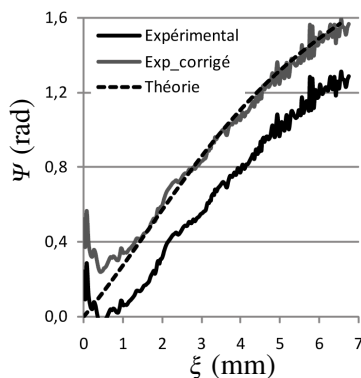


FIG. 6 – Orientation de la force.

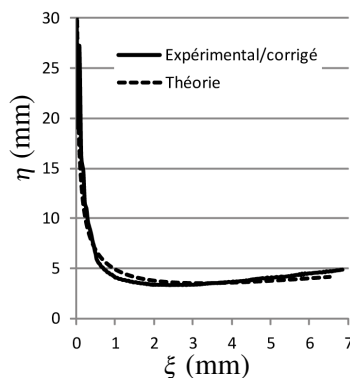


FIG. 7 – Facteur d'échelle.

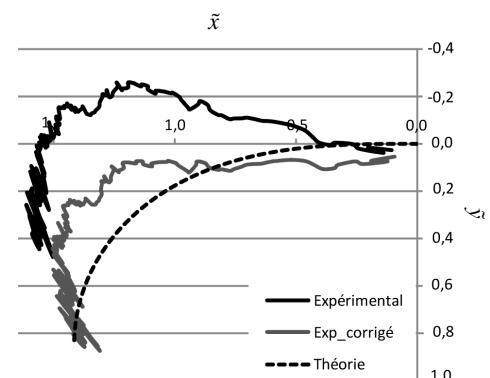


FIG. 8 – Reconstruction de l'élastica.

Le facteur d'échelle  $\eta$  (fig. 7), qui est au cœur de ce travail, montre lui un très bon accord. La reconstruction de la forme de la lame (fig. 8) est bien moins satisfaisante. Celle issue des mesures brutes (en noir) souffre énormément de la présence du frottement ignoré par le modèle. La courbe corrigée (en gris) améliore certes les choses, mais montre une distorsion dans le sens des  $\tilde{x}$  croissants d'autant plus importante que  $\Psi$  augmente, ce qui s'explique par le fait que les déplacements mesurés (en l'occurrence  $\xi$ ) correspondent à une sollicitation avec une composante tangentielle.

## 6 Conclusion

Nous serons moins enthousiastes que Born concernant le dessin de l'elastica à partir de nos mesures. Cette première approche repose sur un modèle ignorant volontairement le frottement afin de mettre l'accent sur la cinématique originale de ce problème où la flexion de la lame revient à "extirper" du point d'encastrement la courbe de l'elastica (ici rectangle) à un facteur d'échelle  $\eta$  près. Les mesures effectuées sur un banc existant, bien que légèrement modifié pour l'occasion, et dont le protocole peut être amélioré pour ce problème spécifique, permettent contrairement à des photographies statiques, d'acquérir les données en continu.

La prise en compte d'un frottement de type Coulomb, mis en évidence par les mesures et approprié pour les matériaux utilisés, assure un angle de frottement  $\phi$  constant et la force  $\mathbf{F}$  exercée par le patin sur la lame demeure suivieuse. La démarche adoptée ici reste donc valable dans ce cas, où l'on aurait alors une portion de courbe de l'elastica non rectangle ( $k \neq 1/\sqrt{2}$ ), et permet de modéliser, pour une force se déplaçant en direction constante par rapport à un encastrement, la relation entre sa valeur et la flèche.

## Références

- [1] J. Bernoulli, *Curvatura laminæ elasticæ*, Acta Erud. 262-275 (juin 1694), repris in *Opera*, T1, § LVIII, 576-600, Cramer & Philibert, Genève (1744).
- [2] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Additamenta 1 *De curvis elasticis* & 2 pour les planches), E65, Bousquet, Lausanne & Genève (1744).
- [3] A. G. Greenhill, *The Applications of Elliptic Functions*, Macmillan, Londres (1892).
- [4] M. Born, *Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen*, Dissertation, Georg-August-Universität Göttingen (1906) (Rééd. Nabu Press 2010).
- [5] R. L. Levien, *The elastica: a mathematical history*, Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, University of California, Berkeley (2008) (Extrait de *From Spiral to Spline: Optimal Techniques in Interactive Curve Design*, PhD Thesis, 2009).
- [6] C. Truesdell, *The influence of Elasticity on Analysis: The Classic Heritage*, Bull. AMS, **9**(3), 293-310 (1983).
- [7] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press (1927) (Rééd. Dover 1944).
- [8] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill (1961).
- [9] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, AMS 55 (1964).

---

† "Portio axis applicatam inter & tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatæ ad constans quoddam spatium."  
[1, § LVIII p. 592]