

# Propagations des singularités au travers des arêtes dans les coques minces

P. Karamian-Surville<sup>a</sup>

a. LMNO-GM3N, Université de Caen Basse-Normandie, Bld Maréchal Juin, 14032 Caen

## Résumé :

*Nous présentons une série de simulations numériques concernant le phénomène de réfraction dans les coques minces présentant des arêtes, ou encore, désignées sous le terme de pli. De part et d'autre des plis, la nature géométrique de la surface moyenne de la coque peut être parabolique, hyperbolique voire même elliptique. Pour des chargements singuliers, il apparaît des couches internes lesquelles se manifestent par des déplacements singuliers à mesure que l'épaisseur de la coque tend vers zéro. Ces singularités se propagent le long des courbes asymptotiques également dénommés caractéristiques. Lorsque les singularités rencontrent les plis elles se propagent de part et d'autre de la coque selon les règles de la réfraction. Afin d'exhiber le phénomène de réfraction, nous avons construit des exemples simples et précis que nous avons simulés à l'aide de notre code de calcul.*

## Abstract :

*In this communication, we address some numerical simulations about refraction phenomenon in thin shells presenting folds. On each side of folds the nature of the middle surface of the shell can be parabolic, hyperbolic even elliptic. When the applied loading is singular, there appear internal layers that involve singular displacement as the thickness of the shell tends to zero. These singularities propagate along the asymptotic curves also called characteristic. Those singularities when hit folds refract on each side of the shells. To exhibit the refraction phenomenon we have built some examples that have been numerically simulated.*

**Mots clefs :** Réfraction, Singularité, Coque

## 1 Introduction

Soit une coque, occupant un domaine d'épaisseur  $\varepsilon$  autour d'une surface  $S$  que l'on ramène à un problème bidimensionnel pour déterminer le champ de déplacement. Lorsque le rapport de  $\varepsilon$  sur une des longueurs caractéristiques est faible ( $\approx 10^{-4}$ ), des phénomènes pathologiques telles que réflexion, réfraction apparaissent pour certaines géométries. En conséquence le calcul des coques très minces nécessite une bonne connaissance du comportement des solutions. L'objectif de cette communication est de présenter le phénomène de réfraction dans les coques minces à partir de simulations numériques réalisées par notre code de calcul. Il s'agit plus précisément d'exhiber le comportement des singularités traversant des arêtes entre des surfaces adjacentes et d'illustrer le phénomène de réfraction du point de vue numérique, par opposition au phénomène de pseudo-réflexion déjà étudié dans [[4], [9]]. On considère donc une coque dont l'épaisseur relative  $\varepsilon$  est très petite. Elle présente un pli le long d'une courbe que l'on qualifie d'arête ou encore désignée sous le terme de pli. De plus on suppose que cette courbe est non caractéristique. Les deux portions de coques ainsi jointes peuvent présenter des surfaces moyennes de nature géométrique différente. Plus exactement, dans cette communication, nous nous intéressons au cas des coques dont les deux portions de surfaces les constituant sont selon le cas parabolique-parabolique, ou bien hyperbolique-hyperbolique. Nous limitons l'étude au cas des coques inhibées en flexion [10], c'est-à-dire que le noyau du tenseur métrique linéarisé est congru au déplacement nul. Lorsque l'épaisseur relative  $\varepsilon$  de la coque tend vers zéro, il s'agit alors d'un problème de perturbation

singulière dont la limite est le modèle membranaire lequel décrit relativement bien le comportement de la coque. Selon la nature géométrique de la coque ce système est elliptique, parabolique ou hyperbolique. En conséquence les caractéristiques du système membranaire sont les courbes asymptotiques. Celles-ci sont au nombre de zéro, deux ou quatre selon que la surface est respectivement elliptique, hyperbolique ou parabolique. Il en résulte que les solutions du système membranaire jouissent des propriétés classiques de propagation des singularités le long des caractéristiques tant qu'elles ne rencontrent pas les frontières du domaine de la coque. En effet, celles-ci gagnent un degré de régularité. C'est pourquoi on les qualifie de pseudo-réflexions, alors que les singularités qui traversent les arêtes entre deux surfaces adjacentes conservent leur degré de singularité. Pour être plus précis, considérons un chargement normal à la surface noté  $f^3$  singulier en un point d'une courbe caractéristique de la surface moyenne de la coque. Le déplacement  $u_3$  qui en résulte est alors deux ou quatre fois plus singulier que le chargement  $f^3$  selon que la nature de la coque est respectivement hyperbolique ou parabolique. Les simulations numériques effectuées montrent que ces singularités lorsqu'elles traversent le pli sur lequel sont prescrites des conditions de transmission, les singularités conservent leur degré de singularités avec ou sans atténuation des amplitudes dans le cas parabolique et hyperbolique.

## 2 Réfraction des singularités dans le cas d'une coque parabolique-parabolique

Nous considérons dans un premier temps une coque parabolique dont le domaine  $\Omega$  est celui de la figure 1. Nous appliquons un chargement normal à la surface, circulaire centrée au point I. La surface moyenne de la coque  $S$  est l'image de la carte locale  $(\Omega, \Psi)$  il s'agit de deux portions coniques formant un angle entre elles. La partie commune forme l'arête ou encore le pli sur lequel nous prescrivons les conditions de transmission  $u_{\Gamma}^- = u_{\Gamma}^+$  et  $\delta\theta = 0$ . Posons  $S = S^- \cup S^+$  la surface paramétrée par l'application  $\psi = \psi^- \cup \psi^+$  :

$$\begin{aligned} \psi : \Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ &\longrightarrow S \subset E \\ (x, y) \in \Omega^- &\longmapsto \psi^-(x, y) = (x, (x + \alpha) \sin(2\pi y), (x + \alpha) \cos(2\pi y)) \\ (x, y) \in \Omega^+ &\longmapsto \psi^+(x, y) = (x, (\alpha - x) \sin(2\pi y), (\alpha - x) \cos(2\pi y)) \end{aligned} \quad (1)$$

L'arête est portée par la droite d'équation  $x = 0$ . Les lignes asymptotiques sont les droites d'équation  $y = \text{cste}$ . Le matériau est isotrope homogène, avec un module de Young fixé à 285000 MPa et un coefficient de Poisson égal à 0.4. Nous étudions le cas des coques très minces, dans la simulation  $\varepsilon$  est fixé à  $10^{-7}$ . La force normale  $f^3 = \varepsilon \frac{1}{\pi r^2}$  Mpa avec  $r = 10^{-2} \text{mm}$  est appliquée sur le disque de centre I et de rayon  $r$ . La coque est encastree sur la totalité de sa frontière. A droite de la figure 1 est représentée la déformation de la coque.

La figure 2 illustre la composante  $u_3$  du déplacement et le comportement de la singularité. Nous observons que la singularité générée par le chargement imposé, se propage sur la portion de la coque ne subissant aucun chargement. La figure 3 exhibe des coupes de la composante normale du déplacement avant et après passage de l'arête. Nous avons également superposé les deux courbes, à gauche de la figure 4, après les avoir mises à l'échelle et nous constatons qu'elles sont de nature identique à un facteur multiplicatif près. A droite de la figure 4 nous observons que le graphe de la courbe est conforme à l'allure de la dérivée quatrième du Dirac. Ceci est conforme à la théorie car dans le cas parabolique le déplacement  $u_3$  est quatre fois plus singulier que le chargement  $f^3$  lequel ici est proche d'un Dirac.

## 3 Réfraction des singularités dans le cas d'une coque hyperbolique-hyperbolique

Nous considérons dans un second temps une coque hyperbolique dont le domaine  $\Omega$  est celui de la figure 5. Nous appliquons le même chargement normal à la surface, circulaire centrée au point I. La surface moyenne de la coque  $S$  est l'image de la carte locale  $(\Omega, \Psi)$  il s'agit de deux portions paraboloides hyperboliques formant un angle entre eux. La partie commune forme l'arête ou encore le pli sur lequel nous prescrivons les conditions de transmission c'est-à-dire  $u_{\Gamma}^- = u_{\Gamma}^+$  et  $\delta\theta = 0$ . Nous

Schema de principe

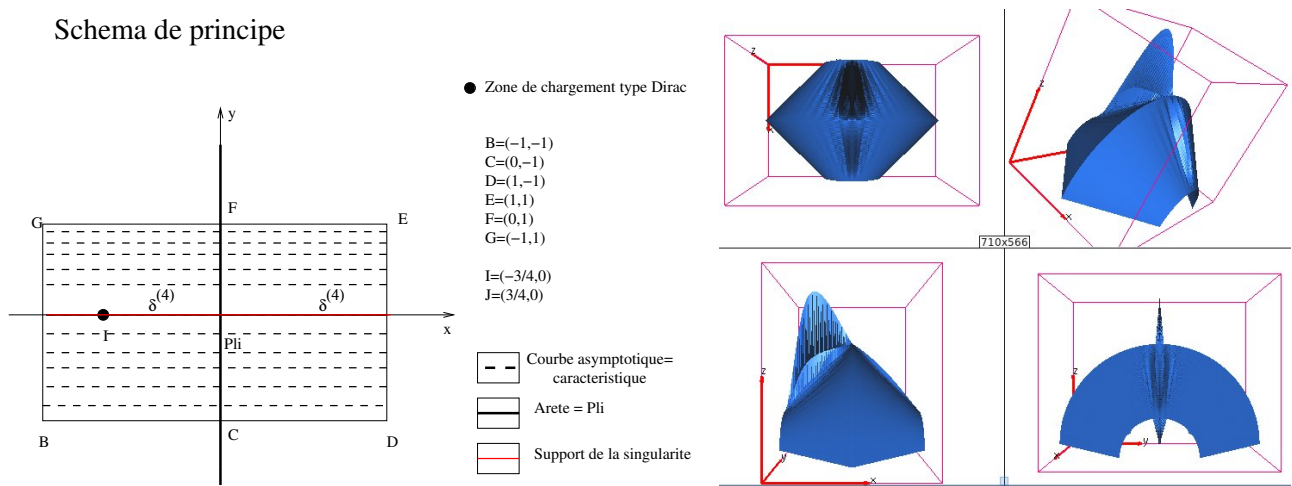


FIGURE 1 – A gauche schéma de principe de la propagation des singularités avec les degrés de singularité théoriques. A droite différentes vues de la coque déformée.

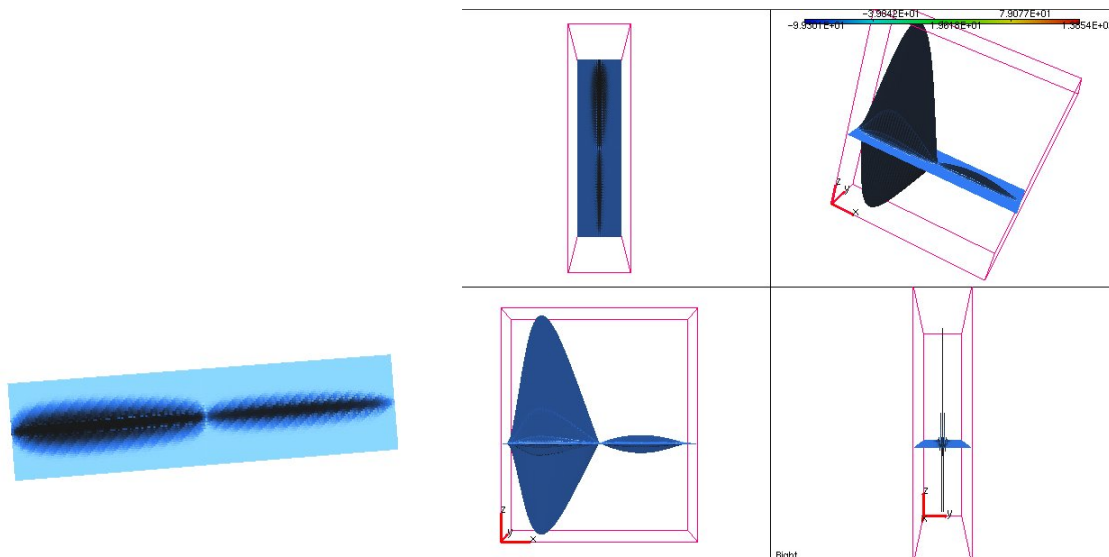


FIGURE 2 – A gauche visualisation de la composante  $u_3$  avec manifestation de la propagation/réfraction de la singularité générée sur la partie gauche de la surface. A droite illustration selon différents points de vue .

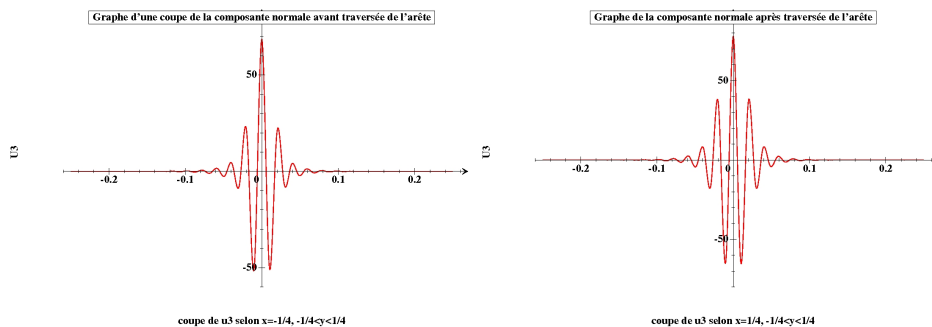


FIGURE 3 – De gauche à droite coupe de la composante  $u_3$  avant et après le passage de l'arête.

posons  $S = S^- \cup S^+$  la surface paramétrée par l'application  $\psi = \psi^- \cup \psi^+$  :

$$\begin{aligned}
 \psi : \Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ &\longrightarrow S \subset E \\
 (x, y) \in \Omega^- &\longmapsto \psi^-(x, y) = (x, y, x + y + xy) \\
 (x, y) \in \Omega^+ &\longmapsto \psi^+(x, y) = (x, y, -(x + y) + xy)
 \end{aligned} \tag{2}$$

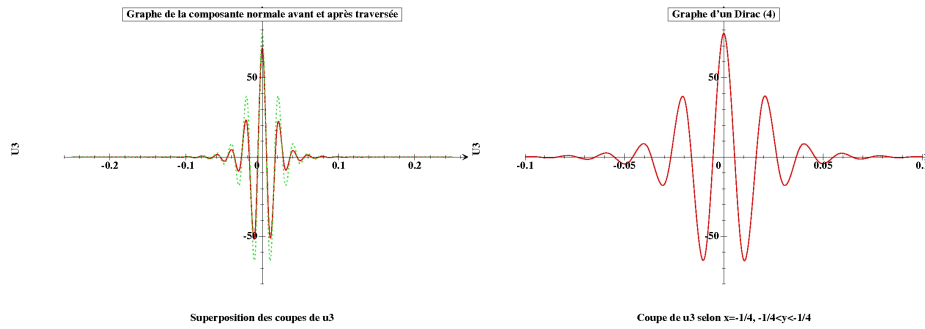


FIGURE 4 – De gauche à droite superposition des composantes  $u_3$  du déplacement suivie d'un grossissement autour de la singularité.

L'arête est dans ce cas portée par la droite d'équation  $x = 0$ . Les lignes asymptotiques sont respectivement les droites d'équation  $x + y = cste$  et  $y - x = cste$ . Le maillage est obtenu par symétrie du carré défini par  $[-1, 0] \times [-1, 0]$  autour de l'axe  $y = 0$  puis autour de l'axe  $x = 0$ . Les caractéristiques du matériau et les conditions aux limites sont les mêmes que précédemment. En ce qui concerne le cas de charge, nous envisageons le chargement assimilable à un Dirac au point I de coordonnée  $(-\frac{3}{4}, 0)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{f} = (0, 0, \frac{\epsilon}{\pi r^2})$ . Sur la figure 5, avec le chargement considéré, les singularités se propagent le long des caractéristiques comme attendu. Les conditions de transmission sur le pli font clairement naître le phénomène de réfraction induisant à son tour la propagation de la singularité sur la coque adjacente avec une atténuation des amplitudes. Il est à noter qu'aux frontières de la coque figure 6, à gauche, nous observons le phénomène de pseudo-réflexion [9]. Nous avons également illustré différentes vues concernant la composante  $u_3$  du déplacement sur la partie droite de la figure 6.

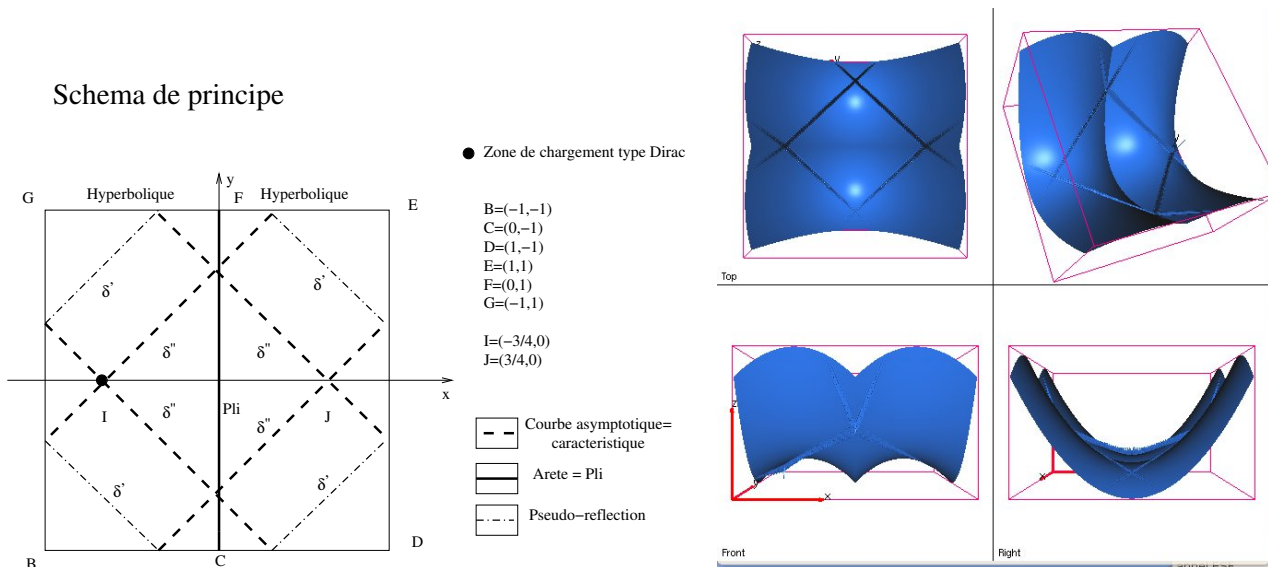


FIGURE 5 – A gauche, schéma de principe de la propagation des singularités avec les degrés de singularité théoriques. A droite différentes vues de la coque déformée.

Sur les figures 7 nous avons visualisé des coupes de la composante normale du déplacement de la coque avant et après passage de l'arête. Comme nous pouvons le remarquer les deux courbes sont de nature identique dans leur morphologie avec une atténuation des amplitudes. Un agrandissement au voisinage de  $x = \frac{1}{2}$ , nous permet de constater qu'il s'agit d'un  $\delta''$  conforme à la théorie sur la propagation des singularités dans les coques minces hyperboliques (cf. [7]). En effet, dans le cas hyperbolique, le déplacement  $u_3$  est deux fois plus singulier que le chargement  $f^3$ , lequel, dans le cas présent peut être considéré comme un Dirac.

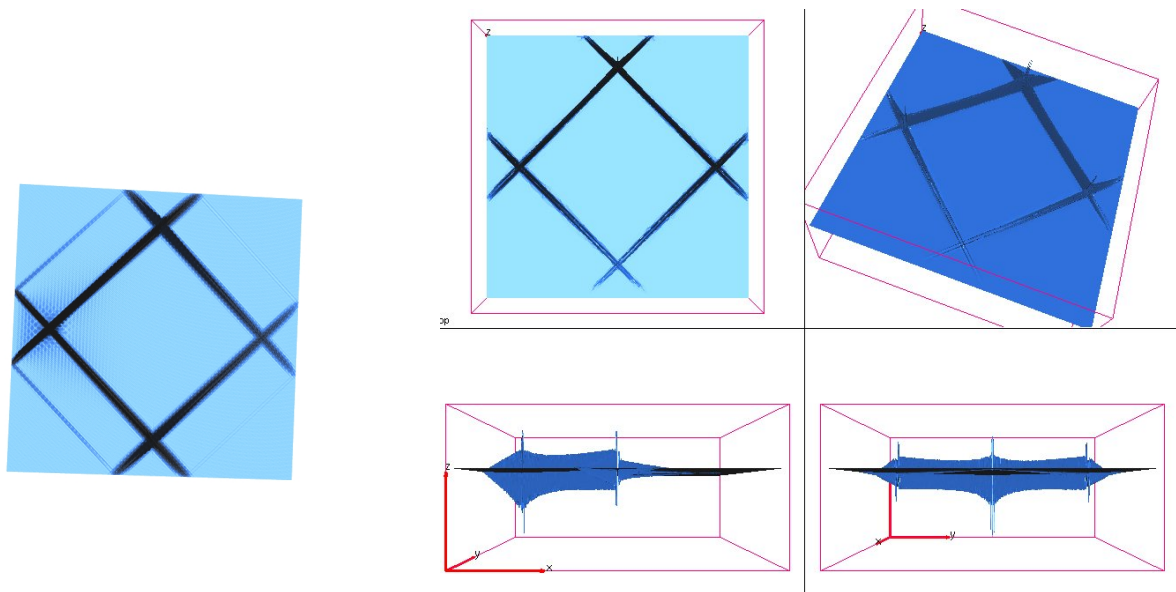


FIGURE 6 – A gauche, visualisation de la composante  $u_3$  avec manifestation de la propagation/refraction/pseudo-réfraction des singularités générées sur la partie gauche de la surface. A droite, illustration selon différents points de vue .

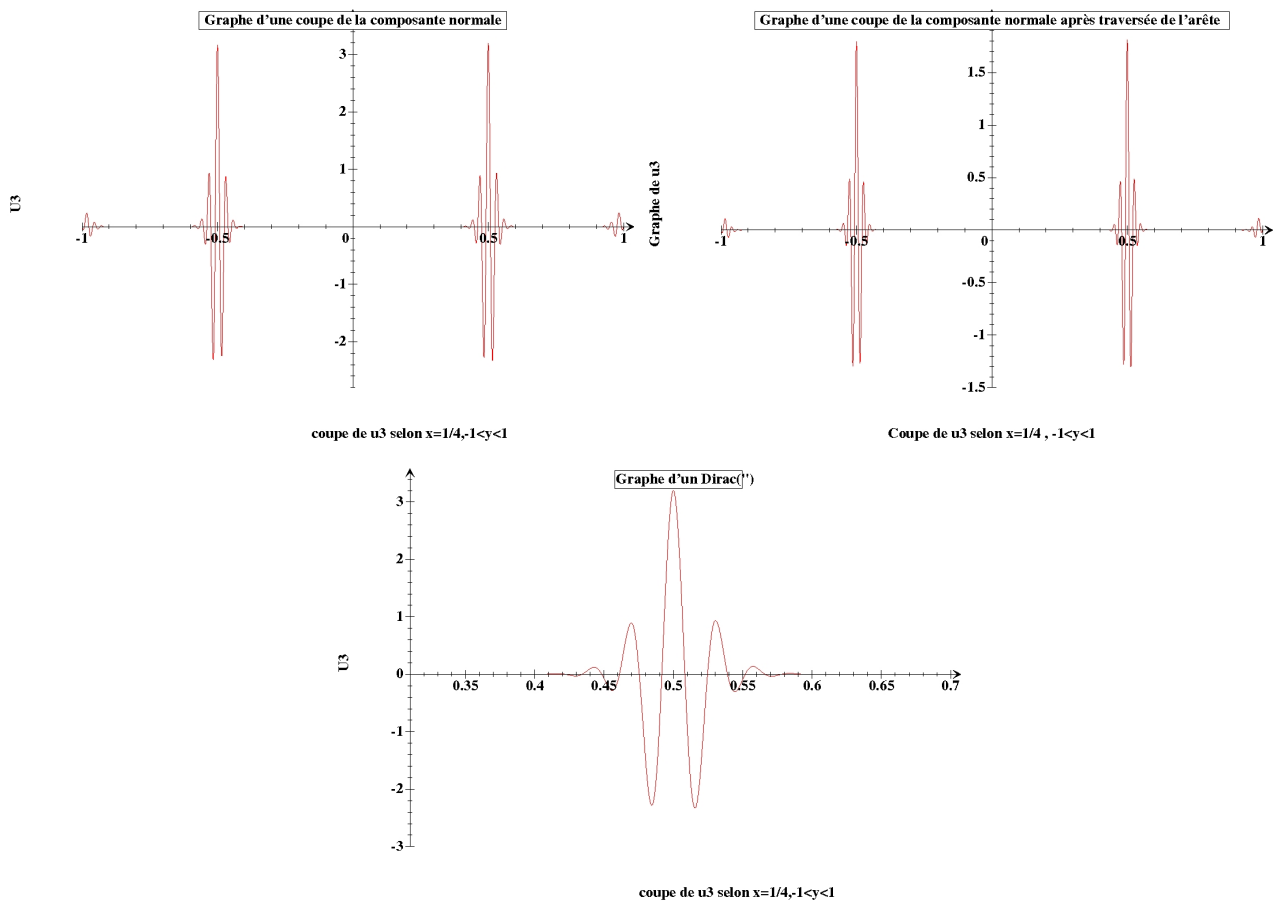


FIGURE 7 – En haut, respectivement à gauche et à droite, coupe de la composante normale du déplacement avant et après le passage de l'arête. En bas, grossissement autour de la singularité.

## 4 Conclusions

Dans cette communication, nous avons présenté différentes sortes de réfraction de singularités pouvant survenir dans les problèmes de coques minces quand la géométrie des surfaces moyennes de part

et d'autre des arêtes sont de nature variée. Le résultat principal est que le degré de la singularité n'est pas affecté lors des phénomènes de réfraction dans le cas où les surfaces moyennes des coques sont de même nature. Nos simulations numériques indiquent qu'avant et après passage des arêtes, les amplitudes des singularités présentent une variation. Par ailleurs, nous tenons à signaler que plus l'épaisseur de la coque est faible plus il faut raffiner ceci est étroitement lié à l'épaisseur des couches internes. La connaissance des structures des couches internes [7] nous permet d'adapter la taille des mailles lors de nos simulations afin d'obtenir des résultats relativement fiables. Il est à noter que pour obtenir des résultats précis il faut faire du raffinement anisotrope. Par manque de place nous ne présentons pas ici les résultats obtenus par un processus de maillage adaptatif anisotrope bien que nous ayons des résultats intéressants dans cette direction. Nous avons construit une métrique basée sur la composante normale du déplacement pour élaborer un hessien adapté à notre problème, lequel est exploité par le logiciel BAMG pour générer des maillages anisotropes très efficaces. Le couplage de notre code de calcul avec BAMG nous permet de raffiner là où il faut de manière à allonger les triangles dans les zones où les singularités apparaissent avant et après passage du ou des pli(s).

## Références

- [1] BERNADOU, M. and CUBIER, A. 1998 Numerical analysis of junctions between thin shells. part2 : Approximation by finite element methods *Comput. methods Appl. Mech. Engrg*, vol 161, pp. 365-387
- [2] BERNADOU, M. and CUBIER, A. 1998 Numerical analysis of junctions between thin shells. part1 : Continous problems *Comput. methods Appl. Mech. Engrg*, vol 161, pp. 349-363
- [3] BERNADOU, M. 1994 Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Masson
- [4] KARAMIAN, Ph. Réflexion des singularités dans les coques hyperboliques inhibées. *Compt. Rend. Acad. Sci. tome II 326*. pp. 609-614
- [5] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2000. A model problem for boundary layers of thin elastic shells. *M2AN*, Vol.34, N° 1, pp. 1-30
- [6] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Boundary layers in thin elastic shells with developable middle surface. *European Journal of Mechanics A/Solis* 21, pp. 13-47
- [7] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Propagation of singularities and structure of layers in shells Hyperbolic case. *Computers and Structures* 80, pp. 747-768
- [8] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Non-smoothness in the asymptotics of thin shells and propagation of singularities. Hyperbolic case. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* Vol. 12, N° 1, pp. 81-90
- [9] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Pseudo-reflection phenomena for singularities in thin elastic shells. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*
- [10] SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 1997. Coques élastiques minces, propriétés asymptotiques. MASSON