

Modèles macroscopiques pour l'analyse de la formation de structures d'instabilités

K. Mhada^a, B. Braikat^a, H. Hu^b, N. Damil^a, M. Potier-Ferry^c

- a. *Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II Mohammedia - Casablanca, Sidi Othman, Casablanca, Maroc.*
b. *School of Civil Engineering, Wuhan University, 8 South Road of East Lake, 430072 Wuhan, P.R. China.*
c. *LEM3, UMR CNRS 7239, Université Paul Verlaine-Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France.*

Résumé

Ce travail a pour objectif la comparaison numérique de trois modèles macroscopiques pour l'analyse des instabilités cellulaires. Ces phénomènes peuvent être traités par une analyse de bifurcation de type Landau-Ginzburg. Dans l'exemple élémentaire du flambage d'une poutre reposant sur une fondation non linéaire élastique, on établit une variante de cette approche basée sur une technique de séries de Fourier à coefficients lentement variables. Le premier modèle macroscopique est défini par une enveloppe réelle dont la phase est supposée constante. Le deuxième modèle a pour objectif de corriger cette phase. Les résultats obtenus par ces deux modèles seront comparés à ceux d'un modèle bridging récemment proposé.

Abstract:

The aim of this work is a numerical comparison of three macroscopic models to analyze cellular instabilities. These phenomena can be described according to the Landau-Ginzburg equation. In the example of the buckling of beam on a non linear elastic foundation, we establish a variant of this approach, based on Fourier series with slowly varying coefficients. The first macroscopic model is defined by a real envelope whose phase is assumed constant. The second model is intended to correct this phase. The results obtained, by these two models, will be compared to those of a bridging model recently proposed.

Mots clefs : Flambage, instabilités, macroscopique, Fourier, coefficients lentement variables.

1 Introduction

Ce travail est consacré à la description macroscopique des problèmes d'instabilité cellulaire, tels que le plissement des membranes, le flambement des structures longues, la convection de Rayleigh-Benard, le flambage des nanotubes de carbone ou des films élastiques minces reposant sur un substrat, le micro-flambage des fibres dans les composites etc.... Dans ces cas, la forme spatiale, de la réponse du système ressemble à une oscillation lentement modulée. C'est pourquoi les modèles macroscopiques considérés seront basés sur des fonctions qui sont lentement variables par rapport à cette oscillation. Classiquement, ces évolutions macroscopiques sont régies par la célèbre équation de Landau-Ginzburg qui a plusieurs inconvénients. Premièrement, il s'agit d'une équation de bifurcation et elle n'est donc valable qu'au voisinage de l'état critique. Deuxièmement, cette équation ne peut pas expliquer le couplage entre un comportement global et local. Troisièmement, dans l'approche de Landau-Ginzburg, il n'est pas facile d'en déduire des conditions aux limites.

Récemment, une nouvelle approche a été présentée [2]. Elle est basée sur le concept de séries de Fourier à coefficients lentement variables. Dans cette technique, les coefficients de Fourier sont les inconnues du problème macroscopique. Ces modèles sont compatibles avec la technique de Landau-Ginzburg, mais elles peuvent rester aussi valables au-delà de la bifurcation et le couplage entre les instabilités globales et locales peut être ainsi pris en compte.

Dans ce travail, nous comparons trois modèles macroscopiques. Le premier modèle macroscopique est très simple, il est défini par deux enveloppes réelles et repose sur quelques approximations [2], en particulier celle sur la phase qui est supposée constante et choisie de manière arbitraire. Le deuxième modèle

macroscopique, qui est proposé dans ce travail, a pour objectif de corriger cette dernière approximation. Les résultats seront comparés à ceux d'un modèle bridging proposé dans [3]: le modèle de référence est considéré près du bord, le modèle macroscopique est simplifié dans le cœur et ces deux modèles sont reliés par la méthode Arlequin [1]. Cette modélisation a été proposée afin de prendre en compte les conditions aux limites.

La formation de structures de flambage est étudiée numériquement dans le cas d'une poutre sur une fondation élastique. Dans la partie 2, on déduit deux modèles macroscopiques réduits par l'approche multi-échelle de Fourier et on utilise la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [4] pour la résolution des différentes équations. Plusieurs tests numériques seront examinés afin d'évaluer les modèles macroscopiques.

2 Modélisation macroscopique de l'instabilité

2.1 Approche multi-échelle

Considérons un phénomène physique décrit par le champ $U(x)$ dans un domaine 1D ($x \in \mathfrak{R}$). Nous utilisons une approche multi-échelle basée sur le concept des séries de Fourier à coefficients lentement variables. Supposons que le nombre d'ondes q de l'instabilité est connu. De cette façon, l'inconnue est écrite sous la forme:

$$U(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} U_j(x) e^{ijqx} \quad (1)$$

où les champs macroscopiques $U_j(x)$ varient lentement sur une période $[x, x + 2\pi/q]$. En pratique, seul un nombre fini de coefficients de Fourier seront considérés. Au moins deux fonctions $U_0(x)$ et $U_1(x)$ sont nécessaires pour décrire les profils quasi-périodiques: $U_0(x)$ peut être identifiée à la valeur moyenne tandis que $U_1(x)$ représente l'enveloppe des oscillations. $U_0(x)$ est réelle, tandis que les autres harmoniques sont complexes. Ainsi, l'enveloppe $U_1(x)$ peut être écrite comme $U_1(x) = r(x)e^{i\varphi(x)}$ où $r(x)$ représente la modulation d'amplitude et $\varphi(x)$ la modulation de la phase. Si la phase varie linéairement ($\varphi(x) = Qx + \varphi_0$), ce type d'approche est en mesure de décrire les réponses quasi-périodiques dont le nombre d'ondes ($Q + q$) diffère légèrement de celui choisi a priori q . Par conséquent, la méthode permet de rendre compte du changement du nombre d'ondes. L'idée principale des modélisations macroscopiques est de déduire des équations satisfaites par les $U_j(x)$.

2.2 Le modèle microscopique choisi

Nous considérons l'exemple de la poutre élastique reposant sur une fondation non linéaire élastique. Les inconnues sont les composantes $u(x)$ et $v(x)$ du vecteur déplacement et la force normale $n(x)$ qui vérifient:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dx} + f = 0, & \frac{n}{ES} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \\ \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2v}{dx^2}) - \frac{d}{dx} (n \frac{dv}{dx}) - cv + c_3 v^3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ces équations seront considérées comme le modèle de référence qui dépend de quatre coefficients de structure ES, EI, c, c_3 et d'une force axiale donnée $f(x)$. Dans le cas de coefficients constants EI, c et d'une contrainte uniforme $\lambda(n(x) = -\lambda)$, une relation entre la charge critique λ et le nombre d'onde q est déduite de (2-b): $\lambda(q) = EIq^2 + c/q^2$, le nombre d'onde critique $q = \sqrt[4]{c/EI}$ peut être défini comme le minimum de $\lambda(q)$. Les solutions de (2) sont les points stationnaires de l'énergie potentielle:

$$P(u, v) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} \left(u' + \frac{v'^2}{2} \right)^2 + \frac{EI}{2} v''^2 + c \frac{v^2}{2} + c_3 \frac{v^4}{4} - f u \right) dx \quad (3)$$

2.3 Méthodologie générale

Dans cette approche, les équations différentielles satisfaites par les amplitudes $U_j(x)$ sont déduites du modèle microscopique (noté Référence) en identifiant les coefficients de Fourier dans chaque équation, les $U_j(x)$ étant supposées constantes sur $[x, x + 2\pi/q]$. La loi de comportement de membrane (2-b) conduit à la loi de comportement macroscopique:

$$\frac{n_j}{ES} = \gamma_j = \left(\frac{d}{dx} + jiq \right) u_j + \frac{1}{2} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} + j_1iq \right) v_{j_1} \left(\frac{d}{dx} + (j - j_1)iq \right) v_{j-j_1} \quad (4)$$

La procédure est facile dans le cas du système simple (2) (voir [2]). Théoriquement, le nombre de termes dans la série de Fourier peut être très grand, mais dans la pratique numérique, il est commode de limiter le nombre d'harmoniques. Par exemple, dans [2] formules (39), un modèle impliquant cinq harmoniques correspondant aux nombres d'ondes $0, \pm q, \pm 2q$ a été présenté. Des simplifications supplémentaires sont introduites dans ce modèle. On ne considère que trois harmoniques $0, \pm q$, soit une enveloppe réelle $U_0(x) = (u_0, v_0, n_0)$ et une complexe $U_1(x) = (u_1, v_1, n_1)$ ou de façon équivalente trois enveloppes réelles $U_0(x), U_{1R}(x), U_{1I}(x)$. La force axiale appliquée est supposée invariante sur la cellule de base ($f(x) = f_0(x)$). Cela implique que la force normale ne fluctue pas ($n_1 = 0$) ce qui permet d'annuler $u_1(x)$. Dans ce cas, l'énergie potentielle dépend de l'enveloppe moyenne ($u_0(x), v_0(x)$) et de l'enveloppe de la flèche $v_1(x)$.

$$P(u_0, v_0, v_1) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} \gamma_0^2 + \frac{EI}{2} (k_0^2 + 2|k_1|^2) \right) dx - \int_0^L f_0 u_0 dx + \int_0^L \frac{c}{2} (v_0^2 + 2|v_1|^2) dx + \int_0^L \left(\frac{c_3}{4} (v_0^4 + 12 v_0^2 |v_1|^2) + \frac{d}{2} |v_1|^4 \right) dx \quad (5)$$

Puisque v_1 est une fonction à valeur complexe, le modèle (5) permet de prédire la modulation lente de la phase. Dans [2], d'autres simplifications ont été mises en place, afin de simplifier le modèle (5) et de définir le modèle le plus simple permettant le couplage du problème de membrane et une équation d'enveloppe similaire à l'équation de Landau-Ginzburg. La première nouvelle approximation est de supposer que l'enveloppe $v_1(x)$ est réelle, ce qui permet la modulation de son amplitude et fait abstraction de toute évolution de sa phase. Deuxièmement, on suppose que $v_0(x) = 0$ de telle sorte que le comportement non linéaire et l'instabilité ne peuvent être considérés qu'au niveau local. Enfin, le terme de flexion k_1 sera simplifié afin d'obtenir une équation d'amplitude similaire à l'équation de Landau-Ginzburg. L'énergie potentielle ainsi simplifiée est:

$$P(u_0, v_0) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} (u_0' + v_1'^2 + q^2 v_1^2)^2 + EI(6q^2 v_1'^2 + q^4 v_1^2) + c v_1^2 + \frac{3c_3}{2} v_1^4 - f_0 u_0 \right) dx \quad (6)$$

Notons que, dans ce modèle macroscopique (6), le déplacement vertical est donné par $v(x) = 2v_1(x)\sin(qx)$, mais il pourrait également être donné par $v(x) = 2v_1(x)\sin(qx + \varphi)$. En d'autres termes, la phase φ est plus ou moins arbitraire, ce qui montre la différence avec le modèle (5). Ce modèle très simplifié (6) est capable de prédire la modulation d'amplitude, mais pas nécessairement une modulation de la phase.

3 Evaluation numérique

3.1 Discrétisation par éléments finis

Les inconnues des trois modèles (3) $\langle r \rangle = \langle u, v \rangle$, (5) $\langle r \rangle = \langle u_0, v_0, v_{1R}, v_{1I} \rangle$, (6) $\langle r \rangle = \langle u_0, v_1 \rangle$ sont discrétisés sous la forme $\{r\} = [N]\{q\}$. Dans le cas du modèle Référence (3), l'élément utilisé est un

élément poutre à deux nœuds et à trois ddl par nœuds, la matrice $[N]$ est constituée par des fonctions de forme de type Lagrange pour u et de type Hermite pour v . Pour le modèle macroscopique (5) (noté Complex macro), l'élément utilisé a deux nœuds et sept ddl par nœud, $[N]$ est constituée par des fonctions de forme de type Lagrange pour u_0 et de type Hermite pour v_0, v_{IR}, v_{II} . Pour le modèle macroscopique (6) (noté Real macro), l'élément utilisé a deux nœuds et trois ddl par nœud, $[N]$ est constituée par des fonctions de forme de type Lagrange pour u_0 et v_1 .

Plusieurs tests numériques sont discutés ci-dessous. Le premier est une poutre relativement courte. La longueur totale est d'environ cinq fois la longueur d'ondes. Le deuxième exemple a été conçu de telle sorte que l'instabilité commence près du bord. Dans un tel cas, le comportement dans la zone proche du bord est fortement non linéaire et il n'y a pas de méthode cohérente permettant de déduire les conditions aux limites pour les deux modèles macroscopiques. C'est pourquoi, nous allons considérer la méthode «bridging» récemment proposée dans [3] et qui consiste à raccorder le modèle Reference (3), considéré près du bord, au modèle Real macro (6) à l'intérieur. Les trois modèles sont résolus par l'algorithme MAN. Dans cet algorithme [4], à partir d'un point de départ donné, on cherche un bout de la branche sous la forme d'une série entière tronquée. Une formule simple permet de calculer le domaine de validité de cette représentation et de définir le point de départ pour le bout suivant [4]. Ainsi, la solution est déterminée bout par bout. Chaque bout est calculé en inversant une seule fois la matrice tangente. Les calculs ont été aussi faits point par point à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Le modèle avec bridging a été résolu uniquement par Newton-Raphson (NR).

3.2 Flambage d'une poutre encastree de longueur 10π

On considère une poutre de longueur 10π et de caractéristiques $ES = EI = 1, c = 1, c_3 = 1/3$ et on choisit $q = 1$. La poutre est soumise à un raccourcissement global croissant $u(L) = -\lambda L, u(0) = 0$, ($f_0 = -2\mu, \mu = 0$). Les conditions aux limites traduisant l'encastrement ont été traduites, pour les trois modèles, de la façon suivante: pour le modèle Reference $v = 0, v' = 0$ au bord, pour le modèle Real macro $v_1 = 0$ et pour le modèle Complex macro $v_0 = 0, v'_0 = 0, v_{IR} = 0, v_{II} = 0, v'_{II} = 0$ au bord. On a choisit 100 éléments microscopiques, 5 éléments macroscopiques pour le modèle Real macro et 10 éléments macroscopiques pour le modèle Complex macro. Pour assurer une transition continue de la branche fondamentale à la branche bifurquée, la poutre est perturbée par une force g_{pert} suivant le troisième ddl (v_{IR}) et le quatrième ddl (v_{II}) dans le cas du modèle Complex macro et le deuxième ddl dans le cas des 2 modèles (Real macro, Reference). Les valeurs de la force de perturbation sont $g_{pert} = 510^5$ pour le modèle Reference, $g_{pert} = 210^5$ pour le modèle Real macro et $g_{pert} = 810^5$ pour le modèle Complex macro.

La branche bifurquée (v_{max}, λ) et la forme de l'instabilité pour $\lambda = 2,305$ sont représentées dans les figures 1, 2. Nous avons aussi représenté les solutions obtenues par la méthode bridging.

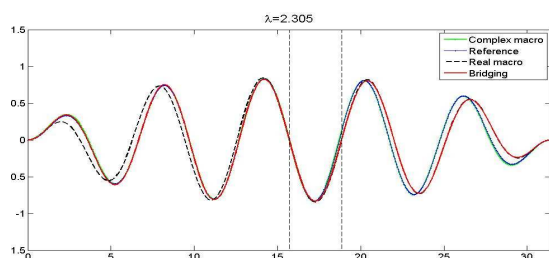


FIG. 1 – Déformée pour $\lambda = 2,305$

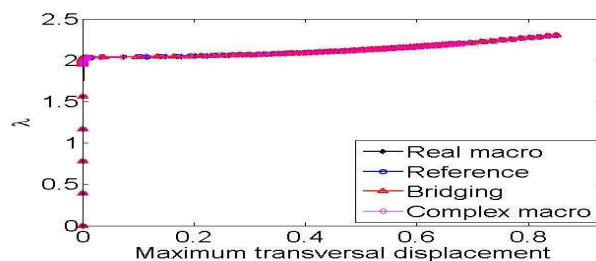


FIG. 2 – Courbes charge-déplacement

A partir de la figure 1, on peut conclure que les deux modèles macroscopiques et le modèle avec bridging prédisent le même point de bifurcation que le modèle Reference. On constate à gauche de la figure 1 que le modèle Complex macro coïncide avec le modèle bridging et le modèle Reference tandis qu'à droite le modèle bridging ne coïncide pas avec les deux autres modèles. Ceci est normal puisque le modèle bridging

utilise le modèle Real macro dans cette région. Dans ce cas, les erreurs du modèle Real macro étaient dues à la non prise en compte de la modulation de la phase.

Les courbes données sur la figure 2 ont été obtenues par la MAN. Sur le TAB1, on donne le nombre de pas MAN nécessaire pour calculer ces branches, pour différents ordres et pour chaque modèle (Reference, Real macro, complex macro), le paramètre de précision est égal à 10^{-10}

Ordre	Nombre de pas		
	Real macro (5 éléments, 22 ddl)	Complex macro (10 éléments, 77 ddl)	Reference (100 éléments, 303 ddl)
20	26	37	33
15	36	43	94
10	71	81	182

TAB. 1 – Poutre encastree aux deux extremités et de longueur 10π : Nombre de pas nécessaire pour atteindre le dernier point de la figure 2 pour les ordres $N=10,15, 20$, Paramètre de précision 10^{-10}

On constate que le nombre de pas, pour chaque modèle, diminue en augmentant l'ordre de troncature: dans le modèle Real macro (22 ddl) à l'ordre 10, 71 inversions de matrice sont nécessaires pour l'obtention de la courbe de réponse (figure 2) et seulement 26 inversions à l'ordre 20. Rappelons que les matrices carrées sont de l'ordre 77 pour le modèle complex macro et 303 pour le modèle Reference. La méthode de NR a nécessité une centaine de pas avec 2 itérations en moyenne par pas pour les trois modèles.

3.3 Flambage d'une poutre appuyée avec un défaut local

On considère une poutre de longueur 30π et $ES=1, c=1, c_3=1/3$ et on choisit $q=1$. On introduit un défaut local en choisissant $EI=0.2$ sur $[0, \pi]$ et $EI=1$ sur $[\pi, 30\pi]$. La poutre est soumise à un raccourcissement global croissant $u(L)=-\lambda L, u(0)=0$ ($f_0=-2\mu, \mu=0$). Les conditions aux limites traduisant l'appui pour les trois modèles sont: pour le modèle Reference $v=0$, au bord et pour le modèle Complex macro $v_0=0, v_{IR}=0, v_{II}=0$ au bord. Ensuite, on choisit 240 éléments pour le modèle Rference, 30 éléments pour le modèle Real macro et 43 éléments pour le modèle Complex macro.

La branche bifurquée (v_{max}, λ) et la forme de l'instabilité pour $\lambda=1,416, \lambda=2,216, \lambda=3,016$ sont représentées sur les figures 3, 4, 5, 6. Nous avons aussi représenté les solutions obtenues par le modèle bridging.

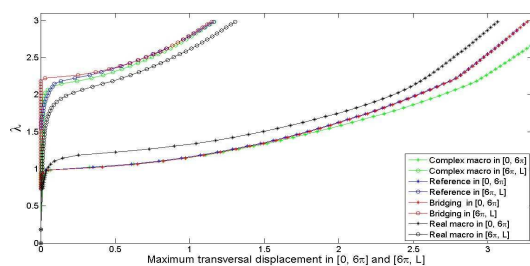


FIG. 3 – Courbes charge déplacement

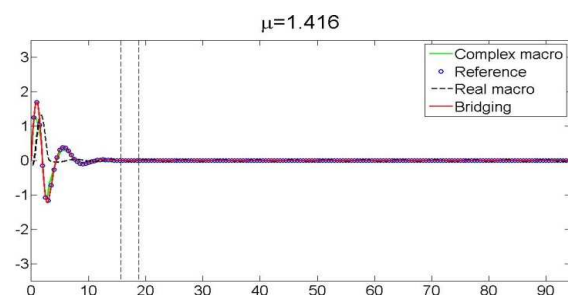


FIG. 4 – Déformée pour $\lambda=1,416$

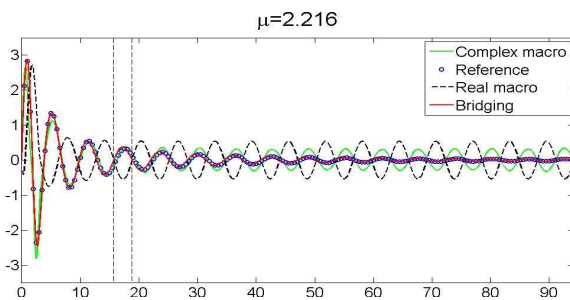


FIG. 5 – Déformées pour $\lambda=2,216$

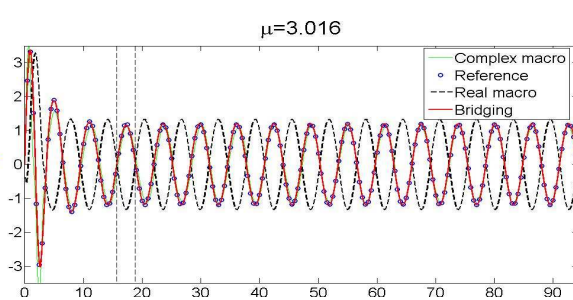


FIG.6 – Déformées pour $\lambda=3,016$

Les figures 4 et 5 montrent que l'instabilité locale apparaît et se développe avant l'instabilité globale. Les figures 4, 6 montrent le début et la propagation de l'instabilité globale. Afin de visualiser ces phénomènes, on introduit deux intervalles (figure 3): $[0, 6\pi]$ et $[6\pi, L]$, et on trace le déplacement maximum en fonction de λ sur chaque intervalle. Le premier intervalle permet de capturer l'instabilité locale due à la rigidité faible près de la frontière ($EI = 0.2$ sur $[0, \pi]$) et le second décrit l'instabilité globale. Quand un défaut local est introduit ($EI = 0.2$ sur $[0, \pi]$), l'instabilité locale apparaît plus tôt que l'instabilité globale, $\lambda \approx 1$ et $\lambda \approx 2$ respectivement pour la charge critique locale et globale. Dans ces cas, le modèle Real macro ne donne pas de bons résultats parce que les conditions aux limites ne sont pas définies correctement alors que le modèle Complex macro et le modèle bridging sont capables de détecter les instabilités.

Les courbes données sur la figure 2 ont été obtenues par la MAN. Sur le TAB2, on donne le nombre de pas MAN nécessaire pour calculer ces branches, pour différents ordres et pour chaque modèle (Reference, Real macro, complex macro), le paramètre de précision est égal à 10^{-10} .

Ordre	Nombre de pas		
	Real macro (5 éléments, 22 ddl)	Complex macro (43 éléments, 308 ddl)	Reference (240 éléments, 723 ddl)
20	35	40	44
15	48	55	59
10	91	105	114

TAB. 2 – Poutre simplement appuyée avec un défaut local près du bord: Nombre de pas nécessaire pour atteindre le dernier point de la figure 3 pour les ordres $N=10, 15, 20$. Paramètre de précision 10^{-10}

On constate que le nombre de pas, pour chaque modèle, diminue en augmentant l'ordre de troncature: dans le modèle Complex macro (308 ddl) à l'ordre 10, 105 inversions de matrice sont nécessaires pour l'obtention de la courbe de réponse (figure 3) et seulement 40 inversions à l'ordre 20. Rappelons que les matrices carrées sont de l'ordre 308 pour le modèle complex macro et 723 pour le modèle Reference. La méthode de NR a nécessité 300 pas avec 2 itérations en moyenne par pas pour les trois modèles.

4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé et testé deux modèles macroscopiques pour l'étude des structures d'instabilité. Le premier modèle macroscopique est très simple, il est défini par deux enveloppes réelles. Le deuxième modèle macroscopique est défini par deux enveloppes réelles et une complexe. Les résultats de ces modèles macroscopiques sont comparés à ceux d'un modèle bridging récemment proposé [3]. Dans le modèle bridging, on garde le modèle de départ aux bords et on utilise le premier modèle macroscopique à l'intérieur.

Références

- [1] H. Ben Dhia, G. Rateau. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1442–1462, 2005.
- [2] N. Damil, M. Potier-Ferry. Influence of local wrinkling on membrane behaviour: a new approach by the technique of slowly variable Fourier coefficients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(8):1139–1153, 2010.
- [3] H. Hu, N. Damil, M. Potier-Ferry. A bridging technique to analyze the influence of boundary conditions on instability patterns. *Journal of Computational Physics*, 2011, doi:10.1016/j.jcp.2011.01.044.
- [4] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry., *Méthode Asymptotique Numérique*, Hermès-Lavoisier, Paris, 2007