

# Reconstruction des caractéristiques distribuées d'un impact non ponctuel se produisant sur une poutre élastique

A. EL-BEKARI<sup>a</sup>, A. KHAMLI<sup>a</sup>, F. EL KHANNOUSI<sup>a</sup>, E. JACQUELIN<sup>b</sup>, A. LIMAM<sup>b</sup>

a. Laboratoire AMS, Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech, Tétouan 93002, Maroc

b. Université de Lyon, Avenue Albert Einstein, 69622 Villeurbanne Cedex, France

## Résumé:

La formulation inverse permettant de reconstruire les caractéristiques d'un impact utilise en général une technique de minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre la réponse mesurée et la réponse calculée. Le problème est ainsi ramené à un problème d'identification paramétrique. La mise œuvre en pratique de cette méthode exige cependant un grand nombre de capteurs ou une durée de calcul excessive. Afin d'identifier les caractéristique d'un impact non nécessairement ponctuel, nous envisageons dans le cadre de ce travail d'utiliser la priorité de réciprocité afin de découpler le problème de localisation du problème d'identification. Nous résolvons ensuite le problème de localisation au moyen d'un algorithme essaim de particules.

## Abstract:

The inverse formulation to reconstruct the features of an impact uses in general a technique of minimizing the mean squared error between the measured and calculated responses. The problem is thus reduced to a problem of parametric identification. To perform this in practice this method requires however a large number of sensors or an excessive computing time. To identify the characteristics of an impact which is not necessarily punctual, we consider in the context of this work to use the reciprocity theorem in order to decouple the localization problem from the identification problem. We solve then the localisation problem by means of a particle swarm algorithm.

**Mots clés :** problème inverse, localisation, identification, minimisation, poutre, impact non ponctuel

## 1 Introduction

Les structures peuvent être le siège d'impacts provenant de sources diverses. Les impacts accidentels peuvent causer des dégâts considérables et menacer ainsi l'intégrité structurale. Dans le cas d'un impact, il ne suffit pas d'examiner visuellement les traces laissées sur la surface de la structure car les dégâts peuvent être invisibles et profonds [1,2]. L'inspection par des moyens expérimentaux afin de déterminer l'ampleur des dommages endurés fait appel à des techniques d'analyse spécifiques qui sont très coûteuses : radiographie, imagerie x, etc.

L'identification des caractéristiques de la force développée lors de l'impact peut servir à mieux diagnostiquer l'état de santé de la structure en permettant de réduire l'effort expérimental. Les modèles de reconstruction du signal force d'impact s'appuient généralement sur un modèle structural. Dans le cas de structures élastiques linéaires simples ayant des propriétés géométriques et matérielles homogènes telles que les poutres ou les plaques, l'identification des caractéristiques d'impact peut être mise en œuvre directement. Le modèle structural peut être construit dans ce cas analytiquement, ou bien par la méthode des éléments finis ou encore en utilisant l'identification expérimentale. Lorsque l'impact peut être supposé comme étant ponctuel et que le point d'impact est connu, les fonctions de réponse impulsionnelle entre le point d'impact et les capteurs de mesure placés en des positions connues, permettent par déconvolution de reconstruire le signal force. Lorsque le point d'impact est inconnu, la formulation inverse utilise une technique de minimisation entre la réponse mesurée et la réponse calculée afin de reconstruire de manière itérative les caractéristiques d'impact : point de localisation et signal de la force d'impact [3-6].

Dans le cas d'un impact qui n'est pas ponctuel, le problème est plus compliqué car il s'agit d'identifier une distribution de pression répartie et non pas une force concentrée. Même lorsque la pression peut être considérée comme uniforme, un nouveau paramètre qui représente l'étendue de la zone impactée s'introduit dans le problème. Nous présentons dans ce travail, une technique qui permet de le déterminer dans le cas d'une structure simple ayant la forme d'une poutre. Cette technique s'appuie sur la résolution d'un problème de minimisation prenant la forme d'un programme mathématique non linéaire avec contrainte. La solution de ce problème permet d'obtenir la position du point centre d'impact et l'étendue du domaine d'impact. Une fois ces quantités sont connues, la reconstruction du signal de la pression d'impact s'effectue par résolution d'un problème de déconvolution classique. Cette résolution fait appel à la régularisation par décomposition en valeur propres singulières généralisés suivie d'un filtrage par troncature, [7-9].

## 2 Formulation du problème direct par la fonction de réponse impulsionnelle

Considérons le problème d'un objet non ponctuel impactant une poutre élastique pour lequel une force normale distribuée uniformément, pression  $p$ , est générée. Cette pression s'appliquant sur la structure est centrée en  $s_0$  et l'étendue du domaine d'impact est représentée par l'intervalle  $[s_0 - u_0; s_0 + u_0]$ , figure 1.

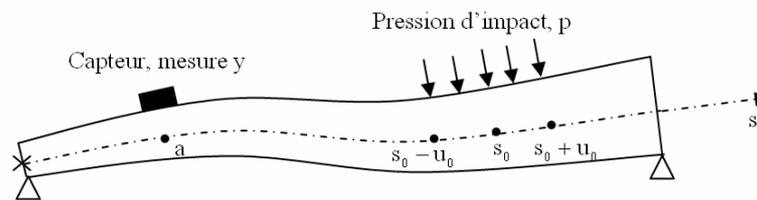


FIG. 1 – Poutre élastique impacté par un objet non ponctuel créant une pression uniforme  $p$  ; un capteur mesure la réponse  $y$  dans la section d'abscisse  $a$

La réponse de la structure notée  $y$  (déplacement, accélération ou déformation) est mesurée au point d'abscisse  $a$ .

En choisissant un intervalle temporel de durée  $N$ , la représentation en équation d'état discrète du système linéaire à plusieurs degrés de liberté modélisant la poutre s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bp(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Dp(k) \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1)$$

où  $A$  et  $B$  sont respectivement la matrice et le vecteur d'état du système,  $C$  la matrice d'observation,  $D$  la matrice influence directe de l'entrée  $p$  sur la sortie  $y$  et  $x$  le vecteur d'état décrivant la dynamique du système.

L'équation (1) permet de calculer la réponse  $y(k)$  en fonction de la pression d'impact  $p(k)$  par une convolution linéaire sous la forme

$$y(k) = \sum_{j=1}^k h(j)p(k-j) \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

où  $y(k)$  est la sortie discrète du capteur et  $p(k)$  l'entrée pression discrète,  $h$  est la fonction de réponse impulsionnelle discrète du système linéaire considéré avec des conditions initiales nulles.

La fonction  $h$  est donnée par

$$\begin{aligned} h(1) &= D \\ h(j) &= CA^{j-1}B \end{aligned} \quad j = 2, 3, \dots, N+1 \quad (3)$$

L'équation (1) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$Y = H P \quad (4)$$

avec

$$H = \begin{bmatrix} h(1) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(N) & h(N-1) & \cdots & h(1) \end{bmatrix} \quad Y = [y(1) \quad y(2) \quad \cdots \quad y(N)]^T \quad (5)$$

$$P = [p(1) \quad p(2) \quad \cdots \quad p(N)]^T$$

où  $H$  est la matrice de Toeplitz reliant la pression  $p$  au signal de mesure  $y$ .

La matrice  $H$  peut être obtenue par calcul analytique, par modélisation éléments finis ou par identification expérimentale. L'identification peut être conduite par exemple au moyen d'un modèle ARX classique.

### 3 Cas d'une poutre homogène droite à plan moyen et section compacte uniforme

Nous considérons dans la suite le cas d'une poutre homogène droite à plan moyen et admettant une section uniforme, figure 2. La poutre de longueur  $L$  est simplement appuyée sur ces deux extrémités. Le matériau constituant la poutre a un module d'Young  $E$  et une densité  $\rho$ . La poutre admet une section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ . L'aire de sa section droite est notée  $S = bh$  et son moment d'inertie de flexion dans le plan est noté  $I = bh^3/12$ . La poutre est soumise à un impact distribué engendrant une pression uniforme  $p$ .

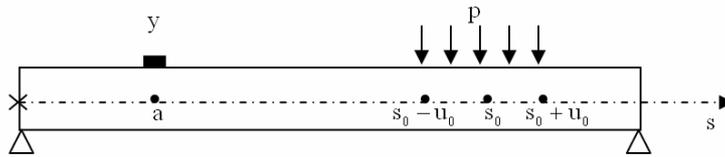


FIG. 2 – Poutre homogène droite à plan moyen et section uniforme

En notant  $\Delta t$  le pas de discrétisation temporelle,  $M$  le nombre de modes retenus dans la troncature de la réponse dynamique de la poutre, la fonction de réponse impulsionnelle donnant la déformation de la fibre supérieure d'une section d'abscisse  $a$  s'écrit explicitement sous la forme

$$G_{kj}(s_0, u_0, a) = \sum_{m=1}^M \left[ \sin\left(\frac{m\pi s_0}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi u_0}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi a}{L}\right) g(\omega_m, \xi_m, (j-k)\Delta T) \right] \quad (6)$$

avec

$$g(\omega_m, \xi_m, (j-k)\Delta T) = \left[ -\frac{mh\pi}{2\omega_m \sqrt{1-\xi_m^2}} \sin\left(\omega_m \sqrt{1-\xi_m^2} (j-k)\Delta T\right) \exp(-\xi_m \omega_m (j-k)\Delta T) \right] \quad (7)$$

où  $\omega_m = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$  et  $\xi_m$  sont la pulsation propre et l'amortissement modal du mode  $m$  et  $M$  le nombre de modes retenus.

### 4 Formulation du problème de localisation

Le problème de localisation de l'impact exige d'identifier la position d'impact  $s_0$  et le paramètre  $u_0$  définissant l'étendue de la zone d'impact. Les réponses calculées que peuvent mesurer deux capteurs de déformation placés aux points d'abscisses respectivement  $a_i$  et  $a_j$  s'écrivent

$$Y_i = G(s_0, u_0, a_i)P \quad Y_j = G(s_0, u_0, a_j)P \quad (8)$$

Du fait de la propriété de commutativité  $G(s_0, u_0, a_i)G(s_0, u_0, a_j) = G(s_0, u_0, a_j)G(s_0, u_0, a_i)$ , on démontre [10,11] la relation suivante qui traduit tout simplement le théorème de Maxwell-Betti

$$G(s_0, u_0, a_j)Y_i = G(s_0, u_0, a_i)Y_j \quad (9)$$

Les deux paramètres  $s_0$  et  $u_0$  doivent minimiser la fonction de perte

$$(s_0, u_0) = \underset{(s, u)}{\text{Arg min}} \left\{ \phi(s, u) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_c} \alpha_{ij} \left\| G(s, u, a_j) Y_i - G(s, u, a_i) Y_j \right\|^2 \right\} \quad (10)$$

où  $N_c \geq 2$  désigne le nombre de capteurs utilisés et  $\alpha_{ij}$  sont des coefficients de pondération qui permettent d'éviter d'obtenir les solutions triviales correspondant aux frontières du domaines.

On peut prendre pour les coefficients  $\alpha_{ij}$  les expressions

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\left\| G(s, u, a_i) Y_j \right\|^2 + \eta} \quad (11)$$

où  $\eta$  est une constante suffisamment petite.

La minimisation de la fonction  $\phi$  est soumise aux contraintes suivantes

$$\begin{aligned} 0 \leq u_0 \leq L/2 \\ u_0 \leq s_0 \leq L - u_0 \end{aligned} \quad (12)$$

## 5 Résolution du problème de localisation

Le problème défini par les équations (10), (11) et (12) est un programme mathématique non linéaire pour lequel il n'est pas facile d'explicitier la fonction objectif. Pour le résoudre, on peut recourir à un algorithme d'évolution de type essaim de particules.

La méthode d'optimisation par essaim de particules est une méthode heuristique qui simule le comportement social en mettant en œuvre la coopération et la compétition parmi les solutions potentielles [12-14].

Dans cette technique, le domaine de la fonction objectif à minimiser est choisis aléatoirement et chaque particule d'indice  $i$  variant de 1 jusqu'à  $N_p$  aura une position  $x_i(t)$  et une vitesse  $v_i(t)$ .

A chaque génération  $t$ , la valeur de la fonction objectif en chaque position  $x_i(t)$  est calculée de telle sorte que les règles de mise à jour s'écrivent

$$\begin{aligned} V_{ij}(t+1) &= wV_{ij}(t) + c_1 r_1 (P_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 r_2 (g_j(t) - x_{ij}(t)) \quad i=1, \dots, N_p \\ x_{ij}(t+1) &= x_{ij}(t) + V_{ij}(t) \quad j=1, \dots, D \end{aligned} \quad (12)$$

où  $D$  est la dimension de l'espace de recherche,  $w$  le coefficient d'inertie,  $c_1$  et  $c_2$  les coefficients d'accélération,  $r_1$  et  $r_2$  deux nombres aléatoires tirés uniformément à chaque itération dans  $[0, 1]$ ,  $P_i = (P_{i1}, \dots, P_{iD})$  est la meilleure position atteinte par la particule,  $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{iD})$  la meilleure position globale atteinte par toutes les particules de l'essaim.

Le terme  $wV_{ij}(t)$  représente la composante physique du déplacement ; la particule tend à suivre sa direction courante de déplacement. Le terme  $c_1 r_1 (P_{ij}(t) - x_{ij}(t))$  est la composante cognitive du déplacement ; la particule tend à se diriger vers le meilleur site par lequel elle est déjà passée. Le terme  $c_2 r_2 (g_j(t) - x_{ij}(t))$  est la composante sociale du déplacement ; la particule tend à se fier à l'expérience de ses congénères et, ainsi, à se diriger vers le meilleur site déjà atteint par ses voisins.

## 6 Résultats et discussion

Nous considérons le problème direct dans les conditions suivantes :  $E = 7.06 \times 10^{10} \text{ Pa}$  ;  $L = 0.5 \text{ m}$  ;  $h = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$  ;  $b = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$  ;  $\rho = 2660 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $L = 0.5 \text{ m}$  ;  $\xi_m = 2\%$  ;  $s_0 = 0.375 \text{ m}$  ;  $u_0 = 0.0417 \text{ m}$  ;  $a = 0.25 \text{ m}$ . La durée de calcul est  $T_c = 0.5 \text{ s}$ .

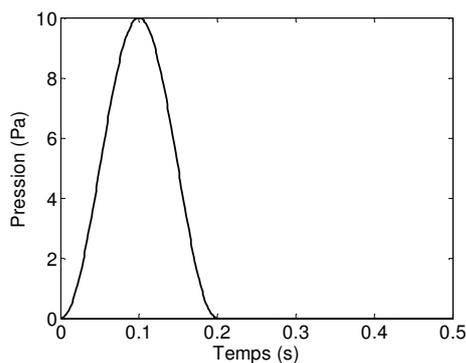
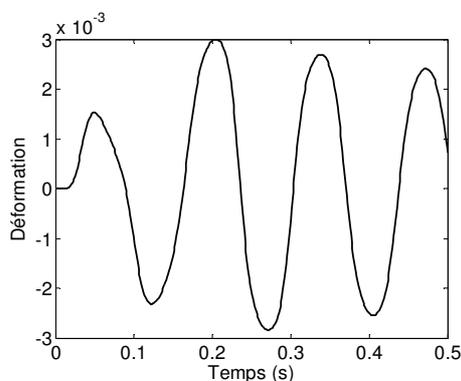


FIG. 3 – Problème direct, signal de pression d’impact imposé

La figure 3 montre le signal de pression uniforme correspondant à l’impact considéré. La figure 4 montre la déformation axiale qui en résulte sur la fibre supérieure dans la section d’abscisse  $a$ .

FIG. 4 – Problème direct, déformation calculée dans la fibre supérieure de la section d’abscisse  $a = 0.25\text{ m}$ 

Une version modifiée de l’algorithme PSO classique a été développée sous Matlab pour résoudre le programme nonlinéaire défini par les équations (8) et (9).

La convergence a été atteinte à partir de la 6<sup>ème</sup> itération.

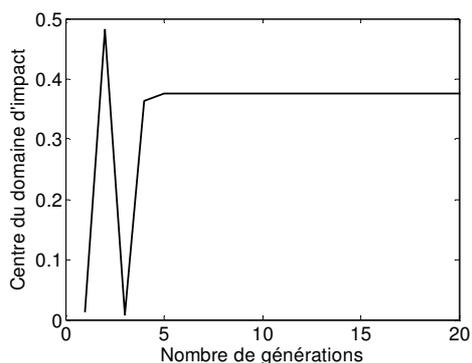


FIG. 5 – Evolution du centre du domaine d’impact en fonction du nombre de générations de l’algorithme

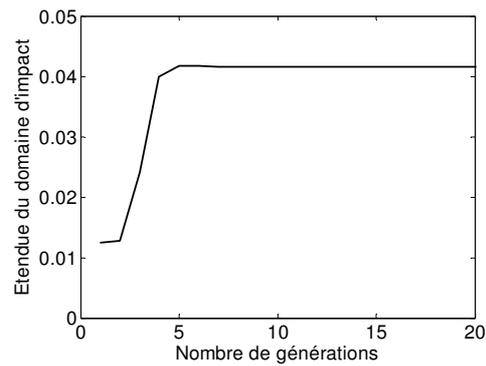


FIG. 6 – Evolution de l'étendue du domaine d'impact en fonction du nombre de générations de l'algorithme

## 7 Conclusion

Les résultats trouvés démontrent la possibilité de reconstruire les caractéristiques d'un impact non ponctuel sur une poutre où la force d'impact peut être assimilée à une distribution uniforme.

## References

- [1] Miller A.G., Lovell D.T. and Seferis J.C. The Evolution of an Aerospace Material: Influence of Design, Manufacturing and In-Service Performance. *Composite Structures*, 27(1-2):193-206, 1994.
- [2] Bartelds G. Aircraft Structural Health Monitoring, Prospects for Smart Solutions from a European Viewpoint *Structural Health Monitoring. Current Status and Perspectives. Proceedings of the International Workshop on Structural Health Monitoring, DEStech, Lancaster, PA, 293-300, 1997.*
- [3] Tracy M. and Chang F.K. Identifying Impacts in Composite Plates with Piezoelectric Strain Sensors. Part 1: Theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9(11): 920-928, 1998.
- [4] Tracy M. and Chang F.K. Identifying Impacts in Composite Plates with Piezoelectric Strain Sensors. Part 2: Experiments. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9(11): 929-937, 1998.
- [5] Seydel R. and Chang F.K. Impact Identification of Stiffened Composite Panels. 1: System Development. *Smart Materials and Structures*, 10(2): 354-369, 2001.
- [6] Seydel R. and Chang F.K. Impact Identification of Stiffened Composite Panels. 2: Implementation Studies. *Smart Materials and Structures*, 10(2):370-379, 2001.
- [7] Tikhonov A.N. and V. Y. Arsenin (1977). *Solutions of ill-posed problems*. Wiley, New York.
- [8] Hansen P.C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems*. SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [9] Jacquelin E., Bennani A. and Hamelin P. Force reconstruction analysis and regularization of a deconvolution problem. *Journal of Sound and Vibration* 265: 81-107, 2003.
- [10] Yen C.S., Wu E. On the Inverse Problem of Rectangular Plates Subjected to Elastic Impact, Part I: Method Development and Numerical Verification. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 62: 692-698, 1995.
- [11] Yen C.S., Wu E. On the Inverse Problem of Rectangular Plates Subjected to Elastic Impact, Part II: Experimental Verification and further Applications. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 62: 699-705, 1995.
- [12] Owens A.J. and Walsh M.J. *Artificial intelligence through simulated evolution*, Wiley, 1966.
- [13] Eberhat R.C. and Kennedy, J. A new optimizer using particle swarm theory. *Proceedings of Sixth International Symposium on Micro machine and Human Science. Nagoya, Japan, 39-43, 1995.*
- [14] Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. *IEEE International Conference on Neural Networks 1995. Proceedings of the Conference, Nov. 27-Dec. 1 1995, Perth, Australia, IEEE Service Center, Piscataway NJ, IV., 1942-1948, 1995.*