

# Un modèle de poutre à section fortement déformable pour l'étude du déploiement de mètres rubans.

F. Guinot<sup>d</sup>, S. Bourgeois<sup>a,b</sup>, B. Cochelin<sup>a,b</sup>,  
C. Hochard<sup>a,c</sup>, E. Picault<sup>a</sup>

a. LMA, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, UPR CNRS 7051, Marseille, France.

b. Ecole Centrale Marseille, France.

c. Université de Provence, Marseille, France.

d. Thales Alenia Space, Cannes La Bocca, France.

## Résumé :

*Dans le contexte des structures déployables, on s'intéresse à la modélisation de poutres élastiques à parois minces type mètres rubans. Dérivé d'un modèle de coque, un modèle de poutre à section mince fortement déformable est développé. Ce modèle utilise une cinématique originale pour décrire avec peu de paramètres les changements de forme de la section. Il permet de simuler, en grands déplacements et en dynamique, l'apparition de pliages localisés ainsi que des scénarios complexes de pliage et de déploiement.*

## Abstract :

*In the framework of deployable structures, we are interested in the modeling of thin-walled elastic beams like tape-springs. Derived from a shell model, a rod model with highly deformable thin-walled cross-section is developed. This model uses an original kinematics to describe with few parameters the cross-section changes. It permits to simulate, in the framework of large displacements and dynamics, the formation of localized folds as well as complex scenarios of folding and deployment.*

**Mots clefs :** poutre ; mètres rubans ; dynamique.

## 1 Introduction

Un défi majeur des concepteurs de satellites est de réaliser des systèmes aussi compacts que possible pour optimiser le volume occupé lors du stockage et du lancement. Les systèmes déployables sont une des possibilités envisagées pour répondre à cette problématique, et en particulier les structures souples qui sont une alternative intéressante aux structures rigides articulées. En effet, elles offrent une meilleure compacité (pliage, enroulement...) et sont capables de se déployer de façon autonome.

Dans ce contexte, Thales Alenia Space réfléchit à de nouveaux concepts à base de mètres rubans. Un mètre ruban déployé est assimilable à une poutre droite à paroi mince de section ouverte circulaire. Si on sollicite cette structure en flexion ou compression, son comportement est d'abord analogue à celui d'une poutre avant l'apparition de pliages localisés ([7]) due à un aplatissement de la section engendrant une forte diminution du moment d'inertie et une concentration de la déformation de flexion.

Il y a deux approches principales pour modéliser le comportement dynamique des mètres rubans. La première ne tient pas compte des spécificités géométriques du ruban, qui est modélisé par une coque en éléments finis ([8], [10], [5]). Les résultats obtenus sont précis mais les modèles lourds et les calculs souvent difficiles à piloter. La deuxième consiste à modéliser le ruban par un système de barres de longueur variable reliées par des ressorts spiraux de raideur non-linéaire qui modélisent les zones de pliage ([7]). Ce modèle simplifié permet de simuler des scénarios complexes avec très peu de degrés de libertés mais requiert l'introduction *ab initio* des zones de pliage.

Une approche intermédiaire consiste à modéliser le mètre ruban par une poutre à section fortement déformable. Plusieurs méthodes permettent d'introduire la déformation de la section dans les modèles de poutre classiques : introduction de degrés de libertés supplémentaires ([9], [2], [6]) ou introduction d'une discrétisation par éléments finis dans la section ([11]).

Le modèle proposé, développé dans le cadre de la thèse de F. Guinot ([4]), s'inscrit dans cette logique. Le modèle de poutre est établi à partir d'un modèle de coque en grands déplacements, grandes rotations et en dynamique, grâce à l'introduction d'hypothèses cinématiques et sthéniques sur le comportement dans la section. Outre les hypothèses classiques de poutres, l'originalité du modèle repose sur l'introduction d'une cinématique de type *Elastica* pour décrire la section fortement déformée avec peu de paramètres. On introduit ces hypothèses dans la formulation des énergies du modèle de coque, puis on intègre dans la section pour obtenir le modèle de poutre. Le modèle est implémenté dans COMSOL sous forme variationnelle à l'aide du principe d'Hamilton. Quelques exemples de résultats sont présentés.

## 2 Description cinématique et hypothèses

On considère un mètre ruban décrit par une poutre dont la ligne centrale (ou ligne moyenne) est initialement droite et la section de courbure circulaire (Figure 1). Le repère fixe  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est défini tel que l'axe  $(O, \mathbf{e}_1)$  contienne la ligne moyenne et que le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  soit le plan de symétrie.

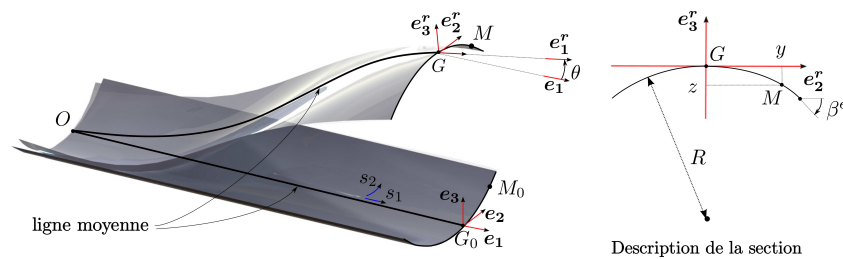


FIGURE 1 – Description du mètre ruban.

On introduit le système de coordonnées curvilignes  $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a/2, a/2]$  pour décrire la géométrie du mètre ruban, où  $L$  est la longueur initiale du ruban et  $a$  la longueur de la "courbe section". Dans la configuration déformée, la position du point matériel est :  $\mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}$ .

On se restreint à l'étude des mouvements plans : la ligne moyenne se déforme dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  et la section reste symétrique par rapport à ce plan. Ainsi, la position de la section est donnée par :  $\mathbf{OG} = (s_1 + u_1(s_1, t)) \mathbf{e}_1 + u_3(s_1, t) \mathbf{e}_3$  où  $u_1(s_1, t)$  et  $u_3(s_1, t)$  sont les translations de la section.

La cinématique repose sur les hypothèses suivantes :

- (i) la section est contenue dans un plan après déformation,
- (ii) la section reste orthogonale au vecteur tangent à la déformée de la ligne moyenne,
- (iii) la "courbe section" est considérée inextensible.

Les deux premières hypothèses sont classiques et correspondent à une cinématique d'Euler-Bernoulli. L'hypothèse (i) permet d'introduire un repère  $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$  tournant d'un angle  $\theta(s_1, t)$  autour de  $\mathbf{e}_2$ , où  $\mathbf{e}_1^r$  est un vecteur unitaire orthogonal au plan de la section dans la configuration déformée,  $\mathbf{e}_2^r = \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3^r = \mathbf{e}_1^r \times \mathbf{e}_2^r$ . L'hypothèse (ii) implique que le vecteur  $\mathbf{e}_1^r$  soit colinéaire au vecteur naturel tangent à la ligne moyenne  $\mathbf{a}_1$ .

Dans le repère local  $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ , les coordonnées du point  $M$  sont notées  $y(s_1, s_2, t)$  et  $z(s_1, s_2, t)$ , et l'hypothèse (iii) conduit à la relation suivante ( $X_{,i}$  désigne la dérivée partielle de  $X$  par rapport à  $s_i$ ) :

$$(\mathbf{GM})_{,2} \cdot (\mathbf{GM})_{,2} - (\mathbf{G}_0\mathbf{M}_0)_{,2} \cdot (\mathbf{G}_0\mathbf{M}_0)_{,2} = (y_{,2})^2 + (z_{,2})^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

En introduisant l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  entre la tangente à la courbe section et le vecteur  $\mathbf{e}_2^r$  (voir Figure 1), on obtient  $y_{,2} = \cos(\beta)$  et  $z_{,2} = \sin(\beta)$ . Concernant l'hypothèse (iii), on suppose que le phénomène majeur à prendre en compte dans la mécanique du ruban est la variation de l'inertie en flexion de la section

(l'aplatissement de la section concentre la déformation de flexion et permet de créer un pliage localisé). On admet alors que les déformations transversales sont négligeables et que l'hypothèse d'inextensibilité est suffisante pour décrire l'allure générale de la courbe section. On peut donc s'inspirer du modèle *Elastica* ([1],[3]) et utiliser le seul paramètre cinématique  $\beta(s_1, s_2, t)$  pour décrire le comportement de la "courbe section", inextensible, en grands déplacements et grandes rotations. De plus, on suppose que les sections restent circulaires avec un rayon dépendant de  $s_1$  et de  $t$ , et on introduit  $\beta^e(s_1, t) = \beta(s_1, s_2 = \frac{a}{2}, t)$ . On a alors :

$$\beta(s_1, s_2, t) = 2 \frac{s_2}{a} \beta^e(s_1, t). \quad (2)$$

Les expressions de  $y_2$  et  $z_2$  permettent ensuite de remonter aux coordonnées locales  $y$  et  $z$  :

$$\begin{aligned} y(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \cos \beta(s_1, \xi, t) d\xi = \frac{a}{2\beta^e} \sin\left(2\beta^e \frac{s_2}{a}\right), \\ z(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \sin \beta(s_1, \xi, t) d\xi = \frac{a}{2\beta^e} \left(1 - \cos\left(2\beta^e \frac{s_2}{a}\right)\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Finalement, la cinématique est entièrement décrite par quatre paramètres cinématiques attachés à la ligne moyenne (dépendant uniquement de l'abscisse  $s_1$  et du temps  $t$ ) : les deux translations  $u_1$  et  $u_3$ , l'angle de rotation de la section  $\theta$  et l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$ . La démarche, ici présentée pour une forme de section et une cinématique de déformation simples, est généralisable à des formes et/ou cinématiques plus complexes en adoptant une discrétisation adaptée (Ritz, éléments finis) de l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  dans le sens de la coordonnée transversale  $s_2$ .

### 3 Mesure des déformations et énergie de déformation

Le ruban étant au départ assimilé à une coque mince, l'énergie de déformation est calculée à partir des déformations de membrane et de flexion exprimées à l'aide du tenseur de Green-Lagrange et des paramètres cinématique  $u_1, u_3, \theta$  et  $\beta$ . En hypothèse de déformations de membranes faibles, on obtient :

$$\begin{aligned} e_{11} &= e^r + z k^r + e^s, \\ k_{11} &= -k^r \cos \beta + k_{11}^s, \\ k_{22} &= k_{22}^s, \\ k_{12} &= k_{12}^s. \end{aligned} \quad \text{où } \begin{cases} e^r = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2), \\ k^r = \theta_{,1}, \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} e^s = \frac{1}{2}(y_{,1})^2 + z_{,1}^2, \\ k_{11}^s = z_{,11} \cos \beta - y_{,11} \sin \beta, \\ k_{22}^s = \beta_{,2} - \beta_{0,2}, \\ k_{12}^s = \beta_{,1}. \end{cases} \quad (4)$$

L'expression 4 fait apparaître des déformations (exposant  $r$ ) induites par la cinématique globale de poutre (déformations classiques de tension  $e^r$  et de flexion  $k^r$  en grands déplacements et grandes rotations) et des déformations (exposant  $s$ ) induites par l'évolution de la section,  $e^s$  et  $k_{\alpha\beta}^s$ , qui ne dépendent que de l'angle  $\beta$ , et constituent l'originalité du modèle.

L'énergie de déformation élastique d'une coque est classiquement donnée par :

$$U_e(u_1, u_3, \theta, \beta) = \int_0^L \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}) ds_2 ds_1. \quad (5)$$

où  $N_{\alpha\beta}$  et  $M_{\alpha\beta}$  sont respectivement les contraintes de membrane et les moments de flexion. Comme la largeur  $a$  de la section est petite devant la longueur  $L$  du ruban, on utilise les hypothèses classiques de la théorie des poutres supposant que  $N_{22} = N_{12} = 0$ . La coque est supposée élastique orthotrope sans couplage membrane-flexion. Ainsi, la loi de comportement peut s'écrire de la manière suivante :

$$N_{11} = A e_{11}, \quad M_{11} = D_1 k_{11} + D_3 k_{22}, \quad M_{22} = D_3 k_{11} + D_2 k_{22}, \quad M_{12} = D_4 (2k_{12}), \quad (6)$$

où  $A, D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  sont les constantes d'élasticité.

Finalement, l'énergie de déformation peut être décomposée en  $U_e = U_e^r + U_e^s + U_e^{rs}$ , avec :

$$\begin{cases} U_e^r = \int_0^L \frac{1}{2} \left( A a e^{r^2} + \left( A \bar{z}^2 + D_1 \overline{\cos^2(\beta)} \right) k^{r^2} + 2 A \bar{z} e^r k^r \right) ds_1 \\ U_e^s = \int_0^L \frac{1}{2} \left( A e^{\bar{s}^2} + D_1 \overline{k_{11}^s} + D_2 \overline{k_{22}^s} + 2 D_3 \overline{k_{11}^s k_{22}^s} + 4 D_4 \overline{k_{12}^s} \right) ds_1 \\ U_e^{rs} = \int_0^L \left( A e^r \bar{e}^s + A k^r \bar{z} e^s - k^r \left( D_1 \overline{\cos(\beta)} k_{11}^s + D_3 \overline{\cos(\beta)} k_{22}^s \right) \right) ds_1 \end{cases} \quad (7)$$

où la notation  $\bar{X}$  introduit des quantités intégrées suivant  $s_2$  :  $\bar{X}(s_1, t) = \int_{-a/2}^{a/2} X(s_1, s_2, t) ds_2$ .

Dans le cas traité ici, toutes ces intégrales peuvent être calculées analytiquement. On obtient ainsi une expression explicite de la densité d'énergie de déformation en fonction des paramètres cinématiques et des caractéristiques géométriques. Le terme  $U_e^r$  correspond à l'énergie de déformation classique de poutre avec un couplage tension-flexion, la ligne moyenne ne passant pas par le barycentre de la section. Le terme  $U_e^s$  ne dépend que de la variable  $\beta$  et représente l'énergie de déformation induite uniquement par le changement de forme de la section. Le terme  $U_e^{rs}$  est lié au couplage entre la déformation globale de poutre et le changement de forme de la section.

## 4 Énergie cinétique

Partant de l'énergie cinétique du modèle de coque dans laquelle on néglige la contribution de l'inertie de rotation, en introduisant la cinématique choisie, on obtient par la même démarche :

$$T(u_1, u_3, \theta, \beta) = T^r + T^s + T^{rs} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T^r = \int_0^L \frac{1}{2} \left( \rho^s a \left( \dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2 \right) + \rho^s \bar{z}^2 \dot{\theta}^2 \right) ds_1 \\ T^s = \int_0^L \frac{1}{2} \rho^s \left( \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) ds_1 \\ T^{rs} = \int_0^L \rho^s \left( -\dot{u}_1 \left( \bar{z} \sin(\theta) \right) + \dot{u}_3 \left( \bar{z} \cos(\theta) \right) \right) ds_1 \end{cases} \quad (8)$$

où la notation  $\dot{X}$  désigne la dérivée temporelle de la grandeur  $X$ .

## 5 Implémentation numérique

On utilise le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL pour résoudre le modèle linéique à quatre degrés de libertés ( $u_1, u_3, \theta, \beta^e$ ). Ce logiciel permet d'utiliser directement les expressions des énergies potentielle et cinétique sur la base de l'équivalence du principe d'Hamilton avec la formulation faible du problème d'élastodynamique. Un multiplicateur de Lagrange (cinquième degré de liberté) impose sous forme faible la relation entre les composantes de translation  $u_1$  et  $u_3$  et la rotation  $\theta$ . Seul un petit travail préalable est nécessaire sur l'énergie cinétique (intégration par partie en temps) pour introduire la forme faible, le logiciel effectuant lui-même la différentiation analytique des énergies. L'utilisation du modèle nécessite ensuite la discrétisation par éléments finis de la ligne moyenne.

## 6 Applications numériques

Les caractéristiques géométriques et matérielles du ruban étudié sont présentées dans la Table 1.

Longueur $L$	Largeur $a$	Épaisseur $h$	Angle initial $\beta_0^e$	Module de Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$	Masse volumique $\rho$
1170 mm	60 mm	0.15 mm	0.6 rad	210 000 MPa	0.3	7800 kg.m <sup>-3</sup>

TABLE 1 – Caractéristiques du mètre ruban

Dans les figures qui suivent, les déformées tridimensionnelles sont reconstruites à partir de la solution du modèle unidimensionnel de poutre et de la cinématique retenue (§3). Les essais présentés sont des

essais dynamiques mettant en jeu des phénomènes très rapides (phénomènes oscillatoires, déploiement, déroulement, effets d'inertie...). D'autres exemples sont disponibles dans la thèse de F. Guinot ([4]).

## 6.1 Affaissement sous gravité

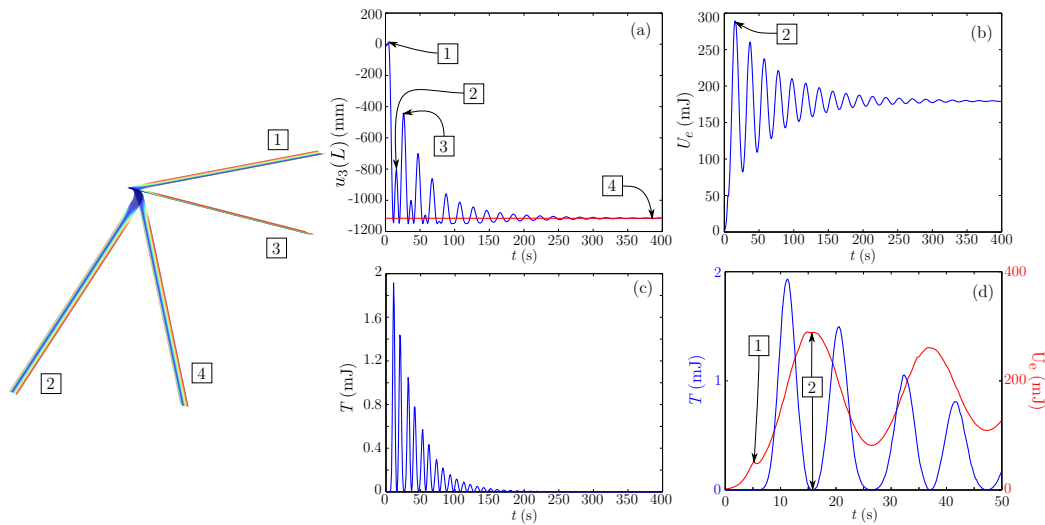


FIGURE 2 – Essai dynamique d'aplatissement sous gravité. Évolution de la flèche (a), de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique (b) à (d) au cours du temps.

Ce premier exemple (voir Figure 2) illustre la capacité du modèle à rendre compte de l'affaissement du ruban sous son propre poids. Le ruban est soumis à la gravité (application d'un chargement uniformément réparti de direction appropriée) et est encastré à une extrémité. L'extrémité encastrée est alors aplatie par un pilotage de l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$ . Au début de l'essai le ruban se redresse légèrement et l'énergie de déformation atteint un maximum local en [1], avant de diminuer lorsque le ruban commence à chuter. La chute du ruban se poursuit jusqu'à la position [2] où la zone de pliage est maximale et la vitesse nulle (de même que l'énergie cinétique). Puis le ruban finit par osciller autour de sa position d'équilibre ([3] et [4]) qui correspond à la déflexion observée lors d'un essai statique.

## 6.2 Déploiement d'un ruban plié

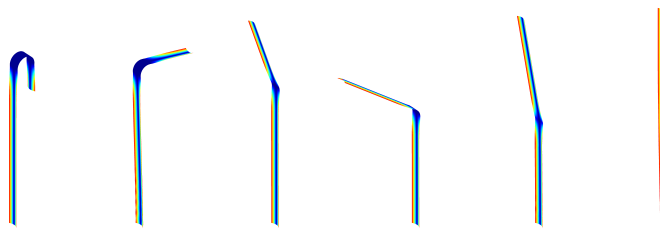


FIGURE 3 – Déploiement d'un ruban partiellement plié.

Ce second essai met en évidence l'influence des effets d'inertie sur le déploiement. Le ruban, soumis à la gravité, est encastré à une extrémité tandis que l'autre est repliée sur une petite longueur (voir Figure 3). L'extrémité pliée est relâchée instantanément sans vitesse initiale. Durant la première phase de déploiement, le pli descend le long du ruban tandis que l'extrémité libre se redresse progressivement. Lorsque le ruban est complètement déployé, les effets d'inertie provoquent la formation d'un nouveau pli de courbure inverse au niveau de la zone de pliage avant qu'elle ait totalement disparu. Ce nouveau pli va aussi se déplacer le long du ruban avant qu'il retrouve sa position non-déformée. On observe également la présence d'efforts de compression dans les deux bras du ruban au cours du déploiement.

### 6.3 Déploiement d'un ruban enroulé

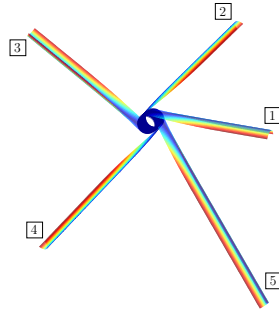


FIGURE 4 – Déploiement d'un ruban partiellement enroulé.

Ce dernier essai illustre un des modes de déroulement d'un mètre ruban. Dans le cas présenté (voir Figure 4), le ruban est partiellement enroulé avec un rayon d'enroulement égal au rayon de courbure de la section. Lorsque le bras libre est relâché, la portion enroulée conserve un rayon constant durant toute la phase de déploiement (voir [7]) ce qui n'est pas le cas pour un rayon d'enroulement différent.

## 7 Conclusion

Nous avons proposé un modèle de poutre à section fortement déformable pour le comportement statique et dynamique des mètres rubans. Ce modèle permet de simuler des scénarios complexes de pliage et de déploiement avec quatre paramètres cinématiques. Partant d'un modèle de coque, une cinématique originale basée sur une hypothèse d'inextensibilité de la courbe section est introduite. Après intégration, on obtient les énergies potentielle et cinétique associées au modèle de poutre. La résolution numérique est mise en œuvre dans le logiciel COMSOL en utilisant la différentiation automatique de la fonctionnelle de Hamilton. Sa généralisation au cas hors plan devrait permettre de traiter le déploiement et la stabilité de structures plus complexes, composées d'un assemblage de mètres rubans.

## Références

- [1] E. Euler 1744 Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes
- [2] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa, D. Camotim 2010 A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **199** 1627-1643
- [3] V.G.A. Goss 2009 The History of the Planar Elastica : Insights into Mechanics and Scientific Method *Science & Education* **18** 1057-1082
- [4] F. Guinot 2011 Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban composite *Thèse de doctorat* Université de Provence, Marseille.
- [5] S. Hoffait, O. Bruls, D. Granville, F. Cugnon, G. Kerschen 2009 Dynamic analysis of the self-locking phenomenon in tape-spring hinges *Acta Astronautica* **66** 1125-1132
- [6] P.M. Pimenta, E.M.B. Campello 2003 A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping *Latin American Journal of Solids and Structures* **1** 119-140
- [7] K. Seffen, S. Pellegrino 1999 Deployment dynamics of tape springs *Proceedings of the Royal Society A* **455** 1003-1048
- [8] K. Seffen, Z. You, S. Pellegrino 2000 Folding and deployment of curved tape springs *International Journal of Mechanical Sciences* **42** 2055-2073
- [9] B.Z. Vlassov 1962 Pièces longues en voiles minces Eyrolles, Paris.
- [10] S.J.I. Walker, G.S. Aglietti 2007 A study of tape spring fold curvature for space deployable structures *Proc. of the Institution of Mech. Engrs., Part G (J. of Aerospace Engrg.)*, **G3** **221** 313-325
- [11] M. Zivkovic, M. Kojic, R. Slavkovic, N. Grujovic 2001 A general beam finite element with deformable cross-section *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **190** 2651-2680