

# Eléments finis espace-temps 4D

S. Dumont<sup>a</sup>, F. Jourdan<sup>b</sup>

a. LAMFA, CNRS UMR 6140, Université de Picardie Jules Verne, France,  
[serge.dumont@u-picardie.fr](mailto:serge.dumont@u-picardie.fr)

b. LMGC, CNRS UMR 5508, Université Montpellier 2, France, [franck.jourdan@univ-montp2.fr](mailto:franck.jourdan@univ-montp2.fr)

## Résumé :

*Nous proposons une étude sur la résolution de problème de mécanique comprenant 3 dimensions d'espace plus 1 de temps en utilisant la méthode des éléments finis espaces temps, qui consiste en une discrétisation de même nature sur l'espace et le temps. Il s'agit d'une extension de la méthode des éléments finis classiques. L'intérêt de cette méthode réside dans la facilité de remaillage, dans le temps ou dans l'espace, puisque elle ne nécessite pas de reprojexion du maillage grossier sur le maillage fin. Elle a été appliqué en particulier pour résoudre des problèmes de contact frottant, avec maillage fin autour de la zone (mobile) de contact.*

## Abstract :

*We propose a study on solving mechanical problems with 3 spatial dimensions and 1 time dimension using the Space Time Finite Element Method, which is a similar discretization on space and time. This is an extension of classical finite element method. The advantage of this method is the ease of remeshing in time or space, since it does not require reprojexion of the coarse mesh on the fine mesh. It has been applied in particular to solve frictional contact problems with a fine mesh around the (moving) area of contact.*

**Mots clefs :** Eléments finis, espace-temps 4D, élasto-dynamique.

## 1 Introduction

La STFEM (Space Time Finite Element Method) est une méthode qui peut être considérée comme une extension de la méthode des éléments finis "classique" dans le sens où elle s'applique à un problème aux limites issu d'un problème d'évolution. Actuellement, plusieurs approches existent. On peut citer par exemple la méthode à grands incréments de temps (LATIN [9]), la méthode de "Galerkin Discontinue" [6], et la notre que l'on nommera "méthode de Galerkin Semi-Discontinue". Dans la plupart des publications sur la méthode de Galerkin Discontinue [5], les fonctions d'interpolation sont considérées comme étant le produit de fonctions d'espace et de temps. Nous verrons dans ce papier qu'une attention particulière sera portée à la non séparation des variables espace et temps. La raison de ce choix est motivée par le fait que ce type d'interpolation est adapté au remaillage. Le remaillage espace-temps que nous avons développé est fondé sur une méthode de génération de maillages espace-temps non structurés. Nous proposons ici une méthode de construction automatique inspirée de ce qui se fait en 2D et 3D. Notre technique de remaillage a été appliqué à un problème de charge mobile modélisant des actions de contact, où la partie spatiale du maillage évolue de façon à suivre la zone de contact.

Notons qu'un des inconvénients de la STFEM telle qu'elle est définie dans les travaux de [3] et [7] est la taille des systèmes à résoudre. Utiliser un maillage stratifié tel que nous le faisons permet de ne pas assembler la matrice totale du problème, mais seulement des sous-matrices. Ceci permet de réduire considérablement la taille des systèmes à résoudre. La taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace.

## 2 Principes de la méthode

L'objectif de cette étude étant d'appliquer une méthode d'éléments finis, le problème d'évolution est considéré comme étant un problème aux limites sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Dans ce problème aux limites, la condition sur la vitesse initiale (à  $t = 0$ ) et une éventuelle condition sur la vitesse finale (à  $t = T$ ), par exemple si le système est arrêté brutalement, sont considérées comme des conditions aux limites. Ces conditions peuvent mener à des discontinuités de vitesse où du point de vue dual à des impulsions. De la même manière que dans la méthode de Galerkin discontinue [6] et que dans la méthode à grands incréments de temps (LATIN) [9], [8], la formulation variationnelle est établie sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ .

Dans cette approche, l'inconnue principale est le déplacement  $u$  et les déformations sont supposées petites. On note  $\varepsilon$  le tenseur des déformations et  $a$  le tenseur de Hooke. La formulation variationnelle en déplacements peut s'écrire : Trouver le déplacement  $u \in U_{ad}$  tel que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}v + a\varepsilon(u) : \varepsilon(v) - f_d v) dx dt = \int_0^T \int_{\partial_1 \Omega} F_d v ds dt, \quad \forall v \in U_{ad}^0 \quad (1)$$

où  $U_{ad}$  est l'ensemble des déplacements suffisamment réguliers, qui satisfont les conditions cinématiques et initiales,  $v$  est le déplacement virtuel et  $U_{ad}^0$  est l'ensemble des déplacements suffisamment réguliers, qui satisfont les conditions cinématiques et initiales nulles.

Afin de tenir compte, dans la formulation variationnelle, de la condition sur la vitesse initiale, le travail virtuel des quantités d'accéléérations est intégré par parties par rapport au temps. Ce qui donne

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{u}v dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \dot{u}v dx dt + \int_{\Omega} [\rho \dot{u}_T(x)v(x, T) - \rho \dot{u}_0(x)v(x, 0)] dx \quad (2)$$

où  $\dot{u}_T(x)$  est la vitesse au temps  $t = T$ . L'approximation proposée dans cette étude est de type Galerkin en temps et en espace. L'interpolation espace-temps est construite à partir de polynômes de Lagrange. Les éléments finis sont isoparamétriques.

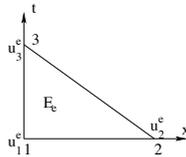


FIGURE 1 – Élément fini de référence en 2D espace-temps de type simplexe

Sur un élément fini espace-temps  $E_e$  (figure 1), le déplacement vérifie :  $u(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e} \varphi_i^e(x, t) u_i^e$  où  $n_e$  est le nombre de nœuds de l'élément  $E_e$ ,  $\varphi_i^e$  sont les fonctions d'interpolation et  $u_i^e$  les déplacements nodaux. La même interpolation est utilisée pour les déplacements virtuels  $v$ . La discrétisation espace-temps de la précédente formulation variationnelle mène au système linéaire suivant :

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = \{F_u\} + \{\Lambda\} \quad (3)$$

où  $[\widetilde{M}_u]$  est la matrice relative aux efforts d'inertie,  $[\widetilde{K}_u]$  la matrice relative aux efforts intérieurs,  $\{F_u\}$  le vecteur nodal relatif aux efforts extérieurs,  $\{\Lambda\}$  le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses et  $\{U\}$  le vecteur nodal des déplacements.

Considérons un maillage espace-temps construit par couches successives d'éléments dans le temps. On pourra parler de maillage "stratifié". Si de plus, les numéros des nœuds qui ont les mêmes coordonnées temporelles sont proches les uns des autres (figure 2), alors le membre de gauche du système (3) se met sous la forme

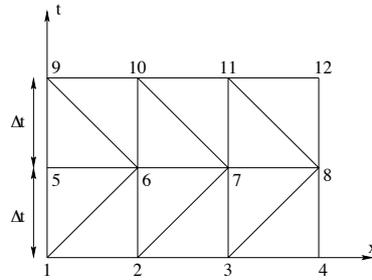


FIGURE 2 – Exemple d'un maillage 2D espace-temps

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = [T]\{U\} = \begin{pmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [T_{21}] & [T_{22}] & [T_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{32}] & [T_{33}] & [T_{34}] & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & [T_{n/n-1}] & [T_{n/n}] & [T_{n/n+1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [T_{n+1/n}] & [T_{n+1/n+1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{U_0\} \\ \{U_1\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{U_n\} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Par exemple, pour le maillage espace-temps de la figure 2, on a

$$\{U_0\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \{U_1\} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} \text{ et } \{U_2\} = \begin{pmatrix} u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$$

En utilisant ce type de numérotation, la matrice totale  $[T]$  et les sous-matrices  $[T_{ij}]$  sont de type bande.

REMARQUES . — Le fait de choisir une interpolation de Lagrange pour les déplacements implique que les déplacements sont continus mais que les vitesses sont discontinues. Par conséquent l'intégration par parties (2) n'est pas exacte, il faut plutôt utiliser la formulation de la méthode de Galerkin discontinue, ce qui revient à écrire la dérivée de la vitesse au sens des distributions. Dans la suite nous conserverons la formulation (2), sachant que l'erreur commise est du même ordre que dans le cas d'éléments finis en espace classiques.

— Utiliser un maillage stratifié tel que nous l'avons défini, permet de ne pas assembler la matrice totale  $[T]$ , mais seulement les sous-matrices  $[T_{ij}]$ . Ceci réduit d'autant la taille des systèmes linéaires à résoudre. La taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace.

— Ensuite, il convient de préciser que le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses  $\{\Lambda\}$  est de la forme  $\{\Lambda\} = (\{\Lambda_0\}, 0, \dots, 0, \{\Lambda_n\})^T$  et que  $\{\Lambda_0\}$  est donné à partir des conditions sur la vitesse initiale, alors que  $\{\Lambda_n\}$  est inconnu. Par conséquent, la résolution du système (3) est effectuée de la manière suivante :

le premier bloc d'équations dans (4), permet de calculer  $\{U_1\}$ . Les lignes par bloc suivantes permettent de calculer les déplacements  $\{U_i\}$  ( $2 \leq i \leq n$ ) et le dernier système d'équations issu du dernier bloc de ligne permet d'obtenir  $\{\Lambda_n\}$ .

— Notons enfin que les matrices de résolution  $[T_{i/i+1}]$  sont généralement non symétriques, alors que la matrice totale  $[T]$  est symétrique. Ainsi, pour l'algorithme présenté ci-dessus, il faut utiliser un solveur non symétrique.

### 3 Maillage 4D et remaillage

Avant même de pouvoir bâtir une technique de remaillage, il faut être capable de construire un maillage 4D. Construire un élément fini 4D ne pose pas de réels problèmes, si ce n'est des problèmes de représentation (voir figure 3). Par contre, construire un maillage 4D, même le plus élémentaire, est loin d'être trivial, excepté dans le cas de maillages réguliers formés d'éléments finis de type multiplex (fonctions d'interpolations obtenues comme le produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps). Dans les autres cas, et c'est principalement ceux qui nous intéressent pour le remaillage, le maillage reste une difficulté. Cependant, cette technique ne nécessite pas de reprojection et permet de conserver des systèmes de taille identiques sur chaque intervalle de temps.

#### 3.1 Génération de maillage 4D

Dans la figure 3 sont représentées des parties élémentaires de maillages 2D, 3D et 4D avec la numération des nœuds. On note  $n_0$  le nombre total de nœuds à l'instant  $t = 0$  du maillage espace entier, et l'on suppose qu'à l'instant  $t = h$  le nombre de nœuds reste le même. Pour le maillage 2D, les connectivités

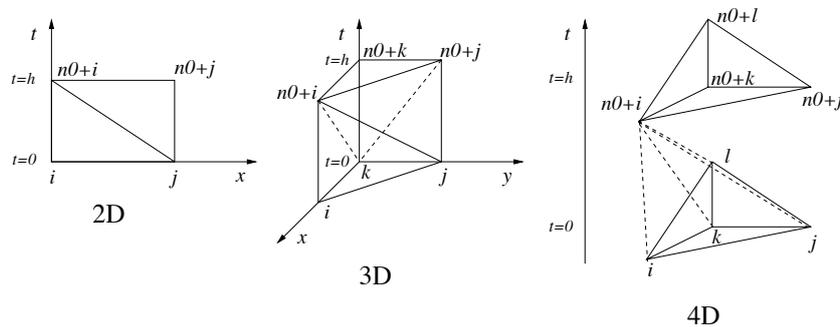


FIGURE 3 – Maillages espace-temps 2D, 3D et 4D

sont :  $i, j, n_0 + i; j, n_0 + i, n_0 + j$ . Pour le maillage 3D, les connectivités sont :

$i, j, k, n_0 + i; j, k, n_0 + i, n_0 + j; k, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k$ .

On propose alors la généralisation suivante des connectivités pour le maillage 4D :

$i, j, k, l, n_0 + i; j, k, l, n_0 + i, n_0 + j; k, l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k; l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k, n_0 + l$ .

Nous avons vérifié que dans le cas où le quadruplet  $(i, j, k, l)$  était rangé dans l'ordre croissant, le maillage 4D ainsi constitué à partir d'un maillage 3D quelconque était correct (interfaces entre 2 éléments 4D sont constituées de tétraèdres communs, maillage complet de tout l'espace de calcul).

#### 3.2 Techniques de remaillage

Dans ce paragraphe nous présentons les techniques de remaillage espace-temps que nous avons développées. On peut trouver dans la littérature de nombreux articles sur le remaillage espace-temps [4, 5]. Ces derniers utilisent suivant la méthode de Galerkin discontinue. Dans la plupart l'approche est incrémentale, c'est à dire que le remaillage s'effectue à des pas de temps donnés. Le plus souvent, les valeurs des inconnues du nouveau maillage sont obtenues par approximation ou interpolation de celles de l'ancien maillage. De plus, l'interpolation utilisée est de type multiplex. Dans l'article [2], nous présentons une technique d'adaptation de maillage incrémentale qui ne nécessite pas de reprojections. Elle a été couplée à des problèmes de contact frottant (voir [1]). Par ailleurs, nous avons développé une technique de remaillage non incrémentale, fondée sur des maillages espace-temps non structurés.

Nous proposons ici une technique de remaillage particulière, bien adaptée à la STFEM. Il s'agit d'une approche incrémentale basée sur la construction de maillages espace-temps capables de suivre une zone de charge évolutive. Cette technique de génération de maillage 4D permet de conserver les matrices

$T_{i/i-1}$ ,  $T_{i/i}$ ,  $T_{i/i+1}$  identiques quelque soit  $i$ , ce qui entraîne une réduction du temps de calcul. La figure 4 en présente une illustration en dimension 2 (espace) +1 (temps). Cette technique a pour ambition d'être appliquée à des problèmes d'usure en calcul des structures. Le principe est de conserver le même nombre de noeuds, mais en les disposant de telle manière qu'ils soient suffisamment nombreux sous la zone chargée. Un exemple d'application est fourni dans le paragraphe suivant.

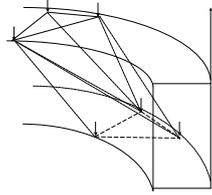


FIGURE 4 – Génération du maillage espace-temps, par rotation, de la surface chargée

## 4 Résultats numériques

Notre méthode de calcul par éléments finis espace-temps 4D a été programmée à l'aide du logiciel MATLAB. Nous avons constaté que notre méthode de génération de maillage 4D nécessitait d'avoir un découpage en temps très fin, du même ordre que pour des méthodes d'intégration explicites. C'est déjà ce que nous avons constaté en 2D et 3D dans [2] lorsque l'interpolation était linéaire. Toutefois, il a aussi été démontré dans [1] que d'autres types d'interpolation (quadratique, non conforme, ...) permettaient de retrouver la plupart des discrétisations temporelles standards (explicite, implicite, schéma de Newmark, ...). Cette étude n'a été menée pour l'instant qu'en dimension 1 d'espace, et il est prévu de la poursuivre en dimension supérieure.

Par ailleurs, pour illustrer notre technique de remaillage, nous considérons l'exemple d'un disque de frein soumis au serrage d'une plaquette sur une de ses faces (voir modèle source figure 5) et bloqué sur la face opposée. Le disque de hauteur 10mm, de rayon extérieur de 100mm, et de rayon intérieur de 40mm est en acier de module de Young égal à  $E = 210.000$  MPa, de coefficient de poisson égal à  $\nu = 0,3$  et de masse volumique égale à  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Le maillage 3D contient 634 noeuds et 1752 éléments.

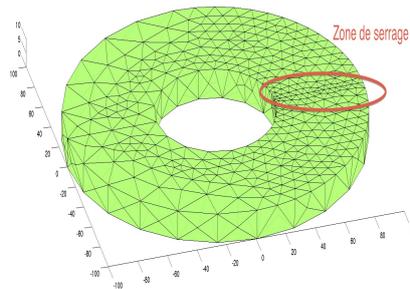


FIGURE 5 – Maillage 3D source : Le maillage est raffiné sous la zone de charge. Les dimensions sont en mm

Le serrage est modélisé par une zone de pression constante de 100 MPa. Cette zone est mobile et parcourt la circonférence du disque avec une vitesse de rotation égale à celle de la propagation d'onde ( $V = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ). Nous construisons un maillage 4D incrémental, qui conserve le maillage 3D, mais en lui imposant une rotation axiale lui permettant de garder sa zone la plus raffinée sous la zone de charge, comme schématisé dans la figure 4. Les résultats des calculs présentés dans la figure 6 sont obtenus pour un découpage en temps de  $10^{-7}$ s. Ils montrent que la zone raffinée reste bien sous la zone de serrage. Le maillage reste donc optimal à chaque pas de temps, au contraire d'un maillage fixe. La

répartition des déplacements des nœuds, en norme, est similaire pour les deux positions de la charge. Notons que les déplacements des nœuds ne peuvent pas être identiques à cause des effets dynamiques. Il est important de signaler qu'il s'agit de déplacements incrémentaux et non de déplacements totaux.

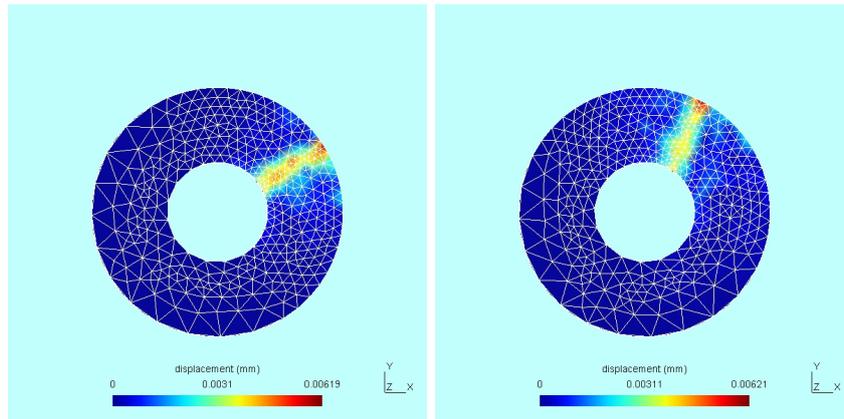


FIGURE 6 – Isovaleurs des normes des déplacements, exprimées en mm, à  $t = 2.10^{-5}$ s (vue de gauche) et à  $t = 4.10^{-5}$ s (vue de droite). Remarquer le maillage qui suit la force appliquée, le disque étant fixe.

## 5 Conclusion

La méthode de génération de maillage espace-temps 4D que nous avons présentée dans cet article a permis de développer une technique d'adaptation de maillage capable de suivre une zone de charge mobile. Cette technique originale est bâtie pour assurer un coup de calcul minimal et ne nécessite pas de reprojexion du maillage grossier sur le maillage fin. Cependant, pour montrer l'étendue des capacités de cette méthode, il faut aller beaucoup plus loin dans les applications mécaniques et proposer une technique de remaillage 4D par approche frontale telle que présenté dans les articles [1] et [2].

## Références

- [1] Adélaïde L., Jourdan F. , Bohatier C. 2003 Frictional contact solver and mesh adaptation in Space-Time Finite Element Method. *European Journal of Mechanics A/solids*. **22** 633-647
- [2] Adélaïde L., Jourdan F. , Bohatier C. 2003 Méthode des éléments finis espace-temps et remaillage. *Revue Européenne des éléments finis*. **12** 427-459
- [3] Anderson M., Kimn J.-H. 2007 A numerical approach to space-time finite elements for the wave equation. *Journal of Computational Physics*. **226** 466-476
- [4] Donea R., Huerta A., Sarrate J. 2001 Arbitrary Lagrangian-Eulerian for fluid-rigid body interaction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 3171-3188
- [5] Feng Y. T., Peric D. 2000 A time-adaptive space-time finite element method for incompressible Lagrangian flows with free surfaces : computational issues. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 499-518
- [6] Hughes T. J. R., Hulbert G. 1988 Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates . *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **66** 339-363
- [7] Idesman A. V. 2007 Solution of linear elastodynamics problems with space-time finite elements on structured and unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196** 1787-1815
- [8] Jourdan F., Bussy P. 2000 Large time increment method in dynamic regularization : sheet cutting simulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 1245-1259
- [9] Ladevèze P. 1999 Non linear computational structural mechanics, new approaches and non incremental methods of calculation. Springer Verlag
- [10] Tezduyar T. E., Sathe S., Keedy R., Stein K. 2006 Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195** 2002-2027