

Mesure des courbes de dispersion des ondes guidées circonférentielles dans une coque elliptique par retournement temporel.

M. Chekroun^a, Q. Grimal^a, E. Cochard^b, JG. Minonzio^a, C. Prada^b, P. Laugier^a

a. *Laboratoire d'Imagerie Paramétrique (LIP), 15 rue de l'École de Médecine, 75006 PARIS*

b. *Institut Langevin, ESPCI, 10 rue Vauquelin, 75005 PARIS*

Résumé :

Le retournement temporel permet de déterminer la position de sources acoustiques à partir du signal reçu sur un réseau de récepteurs. Dans le cas d'une onde guidée circonférentielle dans un tube à section circulaire, rayonnant dans le milieu extérieur, la position des points de rayonnement donne accès à la vitesse de phase des ondes circonférentielle et permet de reconstruire les courbes de dispersion. Une analyse de la géométrie de l'objet permet d'étendre la méthode au cas de sections elliptiques. Les résultats sont validés par simulations numériques par différences finies.

Abstract :

Time reversal allows to recover the position of acoustic sources from the recorded signal at a receiver array. In the case of circumferential guided waves in a circular cylindrical shell, radiating in the surrounding medium, the position of the radiating points is linked to the phase velocity of the wave and allows to estimate the dispersion curves. An analysis of the object geometry is used to extend the method to elliptical cylindrical shells. These results are validated with finite difference numerical simulations.

Mots clefs : Onde guidée ; section elliptique ; retournement temporel

1 Introduction

Les ondes circonférentielles sont des ondes se propageant autour d'un objet de révolution. Elles rayonnent dans le fluide formant le milieu extérieur, et contribuent en particulier au champ diffracté par un diffuseur [1, 2]. Dans le cas d'un tube cylindrique, lorsque l'épaisseur de coque est faible devant le rayon du tube, ces ondes circonférentielles sont analogues aux modes de Lamb dans une plaque plane [3]. L'utilisation du retournement temporel permet dans le cas de tubes à section circulaire de retrouver les courbes de dispersion de ces ondes circonférentielles à partir du champ rayonné à l'extérieur du tube [4, 5].

Des mesures expérimentales et des simulations numériques ont montré que des ondes guidées circonférentielles jouaient un rôle dans la propagation d'ondes ultrasonores au niveau du col du fémur [6]. L'estimation de leurs courbes de dispersion permettrait de mieux caractériser le col du fémur, de section grossièrement elliptique, et d'apporter des informations décisives lors du diagnostic de la fragilité osseuse. En vue de son application au col du fémur, nous proposons une modification de la méthode [4, 5] qui permet son utilisation pour caractériser des coques elliptiques.

2 Section circulaire

Une onde guidée circonférentielle est générée au niveau de la surface d'un objet si elle est excitée à un angle d'incidence β par rapport à la normale à cette surface (Fig. 1(a)), donné par la relation de

Snell-Descartes

$$\sin(\beta) = \frac{c_0}{c_\phi}, \quad (1)$$

dans laquelle c_0 est la vitesse des ondes dans le milieu environnant et c_ϕ la vitesse de phase de l'onde circconférentielle émise à la fréquence considérée.

Si une onde éclaire un objet circulaire, on observe la génération d'une paire d'ondes circconférentielles autour de l'objet en deux points particuliers A et B symétriques de part et d'autre du plan défini par la direction de l'onde incidente et l'axe du cylindre [4]. Ces ondes circconférentielles rayonnent dans le milieu extérieur au cours de leur propagation avec le même angle β par rapport à la normale à l'objet.

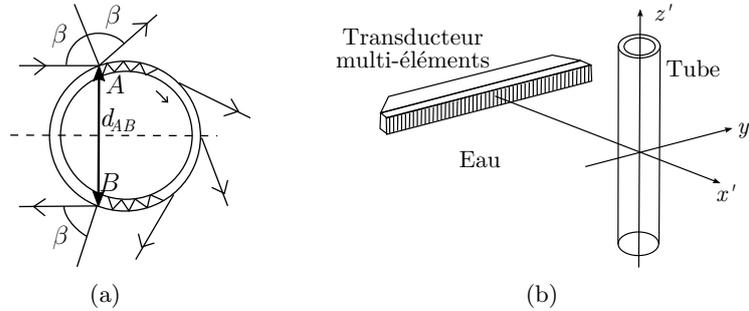


FIGURE 1 – Illustration sur une coque circulaire, d'après [5]. (a) Génération et rayonnement des ondes circconférentielles, (b) dispositif de mesure.

Les fronts d'onde rayonnés enregistrés en se plaçant loin de l'objet semblent provenir de deux sources secondaires placées au centre de l'objet et espacées d'une distance d_{AB} . La position de ces sources, et donc la distance d_{AB} , peut être évaluée à l'aide d'un réseau de transducteurs (Fig. 1(b)) en retournant temporellement le signal rétrodiffusé et en localisant les taches de refocalisation.

Dans le cas d'une coque à section circulaire de rayon R extérieur connu, la vitesse de phase des ondes circconférentielles peut s'exprimer à l'aide de la relation (2)

$$c_\phi = \frac{2Rc_0}{d_{AB}}. \quad (2)$$

3 Section elliptique

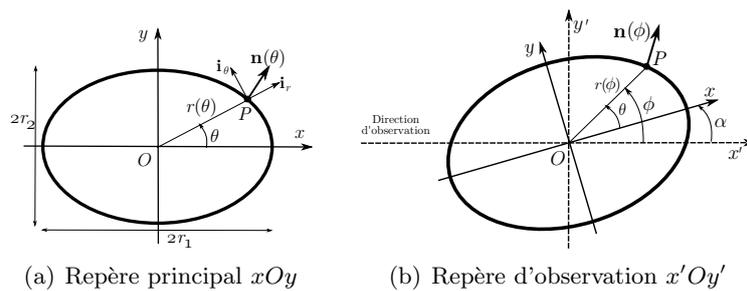


FIGURE 2 – Notations des grandeurs relatives à l'ellipse.

Les notations relatives à l'ellipse sont reportées sur la figure 2(a). On note r_1 le demi grand axe et r_2 le demi petit axe de l'ellipse. L'ellipse est caractérisée par son rapport r_2/r_1 , qui vaut 1 dans le cas du cercle. L'ellipse est décrite dans le repère xOy lié aux axes principaux par son équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{r_2}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\theta)}} \quad \text{avec} \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}. \quad (3)$$

En un point de la courbe, le vecteur normal unitaire $\mathbf{n}(\theta)$ orienté vers l'extérieur est défini par :

$$\mathbf{n}(\theta) = n_r \mathbf{i}_r + n_\theta \mathbf{i}_\theta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_r = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r(\theta)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}} \\ n_\theta = \frac{-\frac{\partial r}{\partial \theta}}{\sqrt{r(\theta)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}} \end{cases} \quad (4)$$

La direction d'observation forme un angle α avec l'axe principal de l'ellipse. On définit ainsi le repère d'observation $x'Oy'$, avec un nouvel angle polaire ϕ pour l'ellipse tel que $\phi = \theta + \alpha$ (Fig. 2(b)).

Les composantes de vecteur normal en un point P de l'ellipse s'écrivent alors :

$$\mathbf{n}(\phi) = \begin{cases} n_{x'} = \frac{\cos \phi - e^2 \cos \alpha \cos(\alpha - \phi)}{\sqrt{e^2 (e^2 - 2) \cos^2(\alpha - \phi) + 1}} \\ n_{y'} = \frac{\sin \phi - e^2 \sin \alpha \cos(\alpha - \phi)}{\sqrt{e^2 (e^2 - 2) \cos^2(\alpha - \phi) + 1}} \end{cases} \quad (5)$$

Et les coordonnées de ce point P sont :

$$\begin{cases} x'_P = \frac{r_2 \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \\ y'_P = \frac{r_2 \sin \phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \end{cases} \quad (6)$$

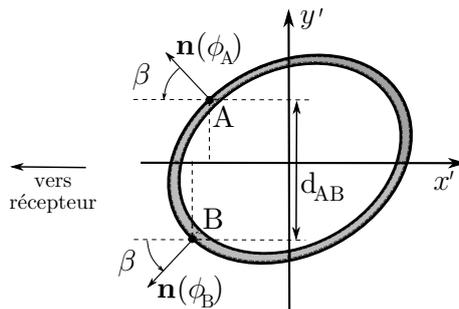


FIGURE 3 – Points d'émergence A et B d'une onde circonférentielle dans une coque elliptique vue par un récepteur situé loin de l'objet.

Pour observer le rayonnement des ondes circonférentielles hors de l'ellipse on se place à grande distance de l'objet. Les points d'émergence de l'onde circonférentielle dans la direction d'observation correspondent, en première approximation, aux points A et B pour lesquels la normale extérieure à l'ellipse forme un angle β avec la direction d'observation x' (Fig 3).

Des considérations géométriques permettent de relier d_{AB} à β de manière unique, et donc à la vitesse de phase c_ϕ . Le raisonnement est tenu ici pour une unique onde et une unique vitesse de phase (sans perte de généralité). L'expression de la vitesse de phase en fonction de la distance d_{AB} mesurée est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} n_{x'}(\phi_A) = n_{x'}(\phi_B) & \text{et} & n_{x'}(\phi_A) < 0 & \text{(i)} \\ n_{y'}(\phi_A) = -n_{y'}(\phi_B) & & & \text{(ii)} \\ d_{AB} = \sqrt{(y'_P(\phi_A) - y'_P(\phi_B))^2} & & & \text{(iii)} \\ c_\phi = \frac{c_0}{n_{y'}(\phi_A)} & & & \text{(iv)} \end{cases} \quad (7)$$

Dans le cas général l'expression $c_\phi = f(d_{AB}, c_0, r_1, r_2, \alpha)$ est difficile à obtenir analytiquement et le système se résout numériquement.

On distingue deux cas particuliers, où l'axe focal de l'ellipse est parallèle à la direction d'observation ($\alpha = 0$) ou est perpendiculaire à celle-ci ($\alpha = \pi/2$). Dans ce cas, l'objet est symétrique par rapport à l'axe x' , et le système (7) se simplifie et donne :

$$c_\phi(\alpha = 0) = \frac{c_0}{r_1 d_{AB}} \sqrt{4r_2^4 + (r_1^2 - r_2^2)d_{AB}^2} \quad (8)$$

$$c_\phi(\alpha = \pi/2) = \frac{c_0}{r_2 d_{AB}} \sqrt{4r_1^4 + (r_2^2 - r_1^2)d_{AB}^2} \quad (9)$$

On retrouve bien la relation (2) valable pour le cercle lorsque $r_1 = r_2$.

4 Approximation d'une ellipse par un cercle : erreurs

4.1 Cercle équivalent

On peut être tenté d'approcher une section faiblement elliptique par un cercle équivalent, en définissant un rayon équivalent R_{eq} égal à la moyenne quadratique des demi-axes de l'ellipse r_1 et r_2 . La vitesse de l'onde circonférentielle évaluée en considérant un cercle de rayon R_{eq} est alors

$$c_{cercle} = \frac{2R_{eq}c_0}{d_{AB}} \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}. \quad (10)$$

L'écart relatif ε (en %) entre la vitesse de phase de l'onde circonférentielle $c_{ellipse}(\alpha)$ (Eq. 7) et la vitesse c_{cercle} (Eq 10) évaluée en faisant l'hypothèse d'un objet circulaire de rayon R_{eq} est défini par :

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{c_{cercle} - c_{ellipse}(\alpha)}{c_{ellipse}(\alpha)} \times 100. \quad (11)$$

Par définition, on a $\varepsilon = 0$ pour $r_1 = r_2$.

4.2 Écart moyen pour différentes orientations α

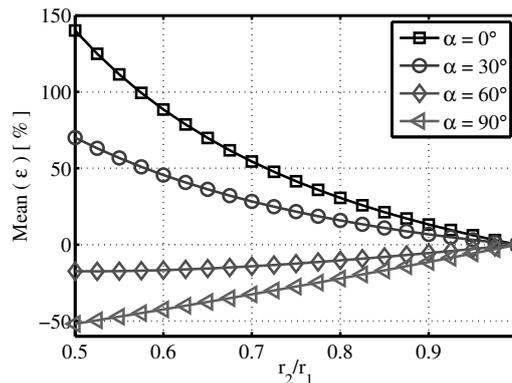


FIGURE 4 – Écart relatif ε en fonction du rapport r_2/r_1 de l'ellipse et de l'angle d'inclinaison α avec la direction de l'onde incidente.

Sur la figure 4, chaque point représente la moyenne des écarts relatifs sur toutes les valeurs de d_{AB} possibles. Les courbes montrent l'évolution de ε en fonction de r_2/r_1 et de α . Les écarts sont beaucoup plus importants pour de faibles inclinaisons α , car l'ellipse présente aux récepteurs une courbure qui varie très rapidement et dont le rayon est plus faible que celle du cercle. Pour un angle d'inclinaison de

environ 45 degrés, l'écart devient assez proche de 0 quel que soit le rapport r_2/r_1 , car l'ellipse présente alors une courbure proche de celle du cercle équivalent.

Pour $\alpha=60$ et 90° , la c_ϕ sera sous-évaluée, et pour $\alpha=0$ et 30° la vitesse est surévaluée. L'écart est supérieur à $\pm 10\%$ dès que le rapport r_2/r_1 est inférieur à 0,9, et devient d'autant plus important que r_2/r_1 diminue. Il n'est donc pas possible de faire une approximation de cercle dans le cas d'une coque elliptique pour évaluer les courbes de dispersion des ondes circonférentielles, même pour des coque faiblement elliptiques.

5 Validation avec des simulations FDTD

Les simulations sont réalisées avec le code de différences finies dans le domaine temporel (code SIMSONIC), utilisé ici dans sa version 2D [7]. Le schéma 5 décrit la configuration des simulations.

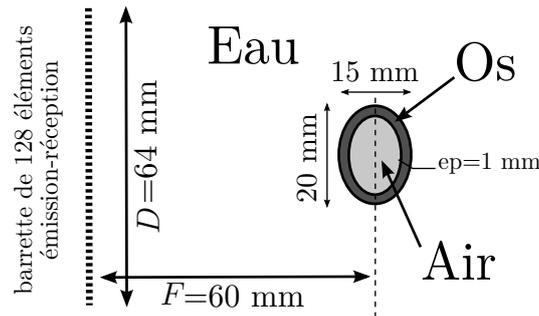


FIGURE 5 – Configuration pour les simulations numériques.

La section extérieure du tube est une ellipse de rapport $r_2/r_1=0,75$, avec $r_1=10$ mm. L'épaisseur est constante et égale à $ep=1$ mm. Ses propriétés mécaniques sont celles de l'os cortical, considéré comme étant isotrope transverse, avec comme paramètres de Lamé dans le plan de la propagation $\lambda=17.6$ GPa et $\mu=6$ Gpa, et une densité $\rho=1,85$ g.cm⁻³ [8]. Le tube est rempli d'air et immergé dans de l'eau.

L'émission-acquisition se fait au moyen d'une barrette de 128 éléments. On utilise la configuration utilisée dans [4, 5]. Pour des raisons de temps de calcul, on considère uniquement 32 émissions différentes par des émetteurs également répartis le long de la barrette. La réception se fait avec les 128 récepteurs. Les impulsions émises sont de fréquence centrale $f_0=1$ MHz. La distance d_{AB} est déterminée avec la méthode DORT [5, 9], qui consiste à déterminer la matrice de transfert inter-éléments du réseau $k_{mn}(t)$ correspondant au signal reçu par l'élément m pour une émission effectuée par l'élément n . Cette matrice est ensuite décomposée en valeurs singulières pour chaque fréquence. Cette méthode permet en outre de séparer les différentes contributions dans le signal enregistré. On rétropropage alors les 4 premiers vecteurs singuliers pour obtenir les distances d_{AB} relatives aux modes d'onde circonférentielles les plus importants.

La figure 6 présente les courbes de dispersions évaluées avec la méthode DORT à partir des résultats de la simulation, comparés aux courbes théoriques pour une plaque. Ces résultats sont en accords avec ceux de la figure 4 ; pour $\alpha=0^\circ$, c_ϕ est fortement surévalué ($\sim +50\%$) si l'on fait une approximation de cercle, et pour $\alpha=90^\circ$, c_ϕ est sous-évalué ($\sim -30\%$). En appliquant les relations (8) et (9), l'erreur commise devient plus faible pour les faibles c_ϕ , mais reste de l'ordre de 10% pour les plus fortes vitesses. Les résultats pour $\alpha=0^\circ$ sont plus bruités car l'ellipse a une section apparente plus petite ($2r_2$) face à la barrette, et les distances mesurées d_{AB} sont alors plus courtes que pour $\alpha=90^\circ$.

6 Conclusions

Pour évaluer les courbes de dispersion des ondes circonférentielles autour d'un tube de section elliptique avec la méthode DORT, l'approximation de cercle est insuffisante, même pour des sections très faiblement elliptiques. Une analyse de la géométrie de l'objet permet d'effectuer une correction sur le

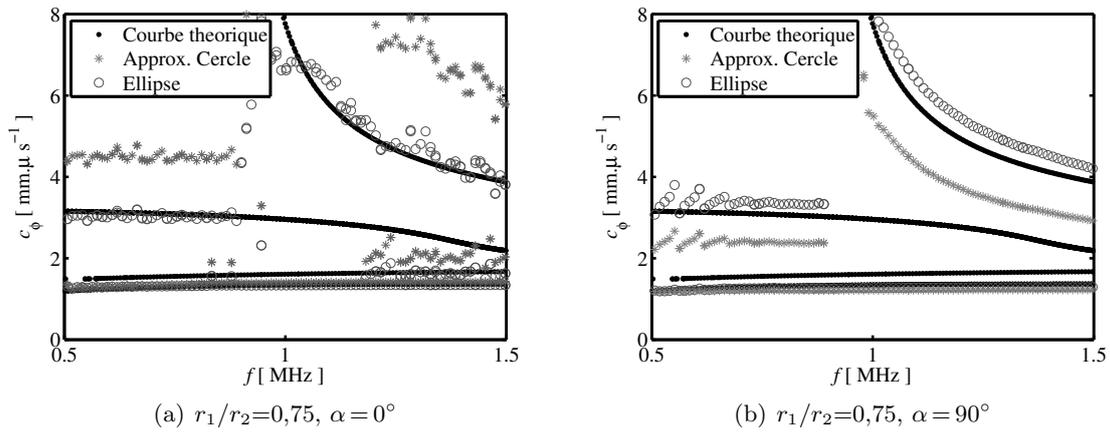


FIGURE 6 – Courbes de dispersion des ondes circonférentielles autour d’une coque elliptique. En noir : modes de Lamb théoriques dans une plaque chargée d’eau sur une de ses faces et d’air sur l’autre. En * : approximation de cercle (Eq. (10)), et en \circ : ellipse avec les relations (8) et (9).

calcul des vitesses de phase. Toutefois, il subsiste une erreur pour les fortes vitesses de phases de l’ordre de 10%, qui nécessite une analyse plus complète de la propagation de ces ondes circonférentielles et du signal rétrodiffusé.

Références

- [1] R. D. Doolittle, H. Uberall, and P. Uginčius. Sound scattering by elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 43(1) :1–14, 1968.
- [2] G. V. Frisk and H. Uberall. Creeping waves and lateral waves in acoustic scattering by large elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(1) :46–54, 1976.
- [3] G.S. Sammelmann, D. H. Trivett, and R. H. Hackman. The acoustic scattering by a submerged, spherical shell. I : The bifurcation of the dispersion curve for the spherical antisymmetric Lamb wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1) :114–124, 1989.
- [4] J.L. Thomas, P. Roux, and M. Fink. Inverse Scattering with an Acoustic Time-Reversal Mirror. *Phys. Rev. Lett.*, 72 :637–640, 1994.
- [5] C. Prada and M. Fink. Separation of interfering acoustic scattered signals using the invariants of the time-reversal operator. Application to Lamb waves characterisation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104(2) :801–807, 1998.
- [6] J. Grondin, Q. Grimal, K. Engelke, and P. Laugier. potential of first arriving signal to assess cortical bone geometry at the hip with QUS : A model based study. *Ultrasound Med. Biol.*, 36(4) :656–666, 2010.
- [7] E. Bossy and Q. Grimal. Numerical methods for ultrasonic bone characterization. In P. Laugier and G. Haiat, editors, *Bone Quantitative Ultrasound*, chapter 8, pages 181–228. Springer, 2011.
- [8] E. Bossy, M. Talmant, and P. Laugier. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115 :2314–2324, 2004.
- [9] J.-G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, D. Clorennec, and M. Fink. Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator : Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(2) :789–798, 2005.