

# Application de la méthode EF-modale à l'étude de réseaux périodiques ouverts

Miguel Molerón<sup>a</sup>, Simon Félix<sup>a</sup>, Vincent Pagneux<sup>a</sup>, Olivier Richoux<sup>a</sup>, Judicaël Picaut<sup>b</sup>

a. LAUM, UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085 LE MANS

b. IFSTTAR, Route de Bouaye. 44341 BOUGUENAI

## Résumé :

Ce travail présente l'application de la méthode EF-modale à l'étude de la propagation acoustique dans des quartiers, considérés comme des réseaux périodiques ouverts. L'idée principale est de transformer le domaine original ouvert en un guide d'ondes équivalent, en remplaçant les ouvertures par de PML (perfectly matched layers). Ensuite, le processus se divise en deux étapes. La première est obtenir les modes périodiques transverses du guide par une méthode éléments finis (EF). Après, ces modes sont utilisés dans une formulation multimodale de la propagation dans la direction longitudinale.

## Abstract :

This work presents the application of the modal-FE method to the study of open periodic lattices, which can be regarded as regular distributions of buildings. The main idea is to turn the original open domain on an equivalent closed waveguide, closing the openings with perfectly matched layers (PML). Following the process is divided into two steps. First, the eigenmodes of the transverse cross-sections are computed using the finite elements (FE) method. Secondly, these modes are introduced into a modal formulation to describe the sound propagation along the waveguide.

**Mots clefs :** réseaux périodiques ouverts ; théorème de Bloch-Floquet ; propagation multimodale

## 1 Introduction

La méthode EF-modale fut présentée la première fois dans [9] pour l'étude de la propagation acoustique dans des rues irrégulières. L'idée principale de la méthode est de transformer le domaine original ouvert en un guide d'ondes fermé équivalent. Pour cela, les ouvertures du guide sont remplacées par des PML et la procédure se divise en deux étapes principales. Dans un premier temps, les modes propres dans les coordonnées transversales sont obtenus numériquement par la méthode des éléments finis (EF). Ensuite, ces modes sont introduits dans un formalisme multimodal décrivant la propagation du son le long du guide [7, 5]. Le fait de résoudre le problème transverse par EF permet de traiter des domaines de propagation à géométrie et conditions aux limites complexes, ce qui rend cette méthode adaptée pour des nombreuses applications dans le domaine de l'acoustique urbaine. Par exemple, des travaux précédents [9, 10] ont montré la possibilité de modéliser des conditions météorologiques variables dans la rue, des façades irrégulières ou des matériaux avec différentes impédances acoustiques aux façades.

Plus récemment, des efforts ont été focalisés en vue d'adapter la méthode à un échelle plus grande, afin de prendre en compte non seulement les phénomènes ayant lieu dans la rue, mais aussi l'influence de l'environnement entourant. Comme une première étude à ce sujet, la référence [6] présente l'extension de la méthode à la modélisation d'intersections entre rues perpendiculaires. Cette étude montra que cela peut être réalisé en ajoutant une PML additionnelle, remplaçant l'ouverture vers la rue adjacente. Avec le même but, nous présentons dans cette communication l'application de la méthode à l'étude de réseaux périodiques ouverts, qui peuvent être considérés comme de distributions régulières

de bâtiments ou quartiers. Comme nous le montrons, cela est possible grâce à l'implémentation de conditions aux limites périodiques lors du calcul par EF des modes transverses. Nous présentons deux types de problèmes : un réseau fini, où nous nous intéressons à obtenir le champ de pression dans le domaine, et un réseau infini où l'objectif est de trouver les nombres d'ondes de Bloch, caractérisant la propagation acoustique dans le milieu.

## 2 Le réseau fini

Nous voulons étudier la propagation acoustique dans le domaine représenté sur la figure 1.a. Il s'agit d'une série de rangées de bâtiments rectangulaires disposées sur un sol. Les bâtiments sont périodiquement distribués selon  $y$ , avec période  $D_y$ .  $\Omega$  représente le domaine et  $\Gamma_N$  ses frontières (sol et bâtiments). Toutes les frontières sont considérées comme étant parfaitement réfléchissantes. Nous supposons une excitation sous la forme d'une onde plane, avec un angle d'incidence  $\theta$  par rapport à l'axe  $x$ . Ensuite, le domaine est fermée dans la partie supérieure avec une PML. En outre, le théorème de Bloch-Floquet [3] appliqué dans la direction  $y$  impose la condition suivante sur le champ de pression :

$$p(x, y + mD_y, z) = e^{jk \sin(\theta)mD_y} p(x, y, z), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

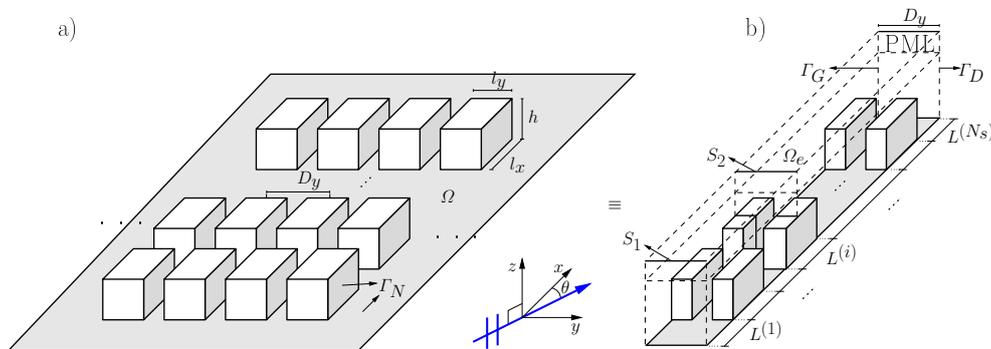


FIGURE 1 – a) Réseau constitué d'un nombre fini de rangées suivant  $y$ . b) guide d'ondes équivalent.

D'après l'équation (1),  $\Omega$  peut se réduire au domaine équivalent fermé  $\Omega_e$  montré sur la figure 1.b, qui peut être considéré comme un guide d'ondes à section transversale constante par morceaux, délimité par les frontières  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$  dans les parties latérales, et par la PML dans la partie supérieure. Pour simplifier la représentation, nous avons considéré seulement deux sections transversales différentes, appelées  $S_1$  et  $S_2$  sur la figure 1. Le problème à résoudre dans ce nouveau domaine s'écrit

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \right) + k^2 \right) p(x, y, z) = 0, \forall (x, y, z) \in \Omega_e; \\ \partial_n p(x, y, z) = 0, \forall (x, y, z) \in \Gamma_N; \\ p(x, y \in \Gamma_D, z) = \mu_y p(x, y \in \Gamma_G, z); \\ \partial_n p(x, y \in \Gamma_G, z) = -\mu_y \partial_n p(x, y \in \Gamma_G, z), \end{cases} \quad (2)$$

où  $k$  est le nombre d'onde,  $\partial_n$  désigne la dérivée normale sortante par rapport aux frontières,  $\mu_y = \exp(jk \sin(\theta)D_y)$  est le déphasage imposé par le théorème de Bloch-Floquet (1), et  $\tau$  est le coefficient de la PML, qui est défini par

$$\tau = \begin{cases} Ae^{j\beta}, & \text{dans la PML;} \\ 1, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3)$$

avec  $\text{Re}\{\tau\}\text{Im}\{\tau\} > 0$ . Le problème peut maintenant être traité de la même manière que ceux présentés dans [9, 6]. Dans chaque segment droit  $i$  du guide ( $i = 1, 2, \dots, N_s$ , avec  $N_s$  le nombre total de segments), le problème transverse est discrétisé suivant une méthode EF (voir annexe A) et le problème (2) prend la forme matricielle suivante :

$$\vec{P}''(x) + (k^2 - \mathbf{M}_b^{-1} \mathbf{K}_b) \vec{P}(x) = \vec{0}, \quad (4)$$

où la  $n$ -ième composante de  $\vec{P}(x)$  est la valeur de  $p(x, y, z)$  au nœud  $n$  à la coordonnée  $x$  :  $P_n(x) = p(x, y_n, z_n)$ , avec  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  étant le nombre total de nœuds. Le symbole " représente la dérivée seconde par rapport à  $x$ , et  $\mathbf{K}_b$  et  $\mathbf{M}_b$  sont les matrices de raideur et masse, respectivement, issues de la forme variationnelle des opérateurs différentiels transversaux. La différence principale par rapport aux travaux précédents est que, dans ce cas, ces matrices doivent être modifiées pour satisfaire la condition de périodicité suivant  $y$  (cette procédure est détaillée dans l'annexe A). La solution générale de l'équation (4) peut être exprimée en fonction des vecteurs propres  $\vec{\Phi}_n$  et valeurs propres  $\alpha_n$  de la matrice  $\mathbf{M}_b^{-1}\mathbf{K}_b$  :

$$\vec{P}^{(i)}(x) = \Phi \left( \mathbf{D}(x)\vec{C}_1 + \mathbf{D}(L^{(i)} - x)\vec{C}_2 \right), \quad (5)$$

où  $\Phi$  est une matrice contenant les vecteurs propres ;  $\mathbf{D}(x)$  est une matrice diagonale telle que  $D_{nn} = \exp(jk_{xn}x)$ , avec  $k_{xn} = (k^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$  ;  $L^{(i)}$  est la longueur du segment ; et les vecteurs  $\vec{C}_1$  et  $\vec{C}_2$  sont les amplitudes modales des ondes progressives et régressives, respectivement, qui sont obtenues à partir des conditions aux extrémités du segment. Pour trouver ces coefficients, nous utilisons la méthode multimodale utilisée dans [9, 6]. A chaque changement de section, nous écrivons les équations de continuité de pression et vitesse normale. Ensuite, nous imposons une condition de sortie sous la forme d'une matrice d'impédance  $\mathbf{Z}$  (où admittance  $\mathbf{Y}$ ), définie par  $\vec{P} = \mathbf{Z}\vec{U}$  (où  $\vec{U} = \mathbf{Y}\vec{P}$ ), avec  $\vec{U} = \partial_x \vec{P}$ . Après, à partir des équations de continuité, la condition en sortie est ramenée, pas à pas, jusqu'à l'entrée. Finalement, à partir d'une condition source sous la forme d'un champ de pression imposé à entrée (une onde plane dans ce cas), le champ peut être calculé partout dans le guide.

### 3 Le réseau infini

Considérons maintenant un réseau périodique infini en  $x$  et  $y$ . L'application du théorème de Bloch-Floquet dans ces deux directions permet de réduire le domaine à une cellule élémentaire du réseau, représentée sur la figure 2.a. L'objectif ici est trouver les nombres d'onde de Bloch dans la direction longitudinale,  $k_{Bx}$ , permettant de caractériser la propagation acoustique dans le milieu. Pour cela nous utilisons la même procédure que Duclos *et coll.* dans [4], où un problème similaire été traité, consistant en un réseau 2D de cylindres. A partir de la méthode multimodale, nous obtenons la matrice de diffusion de la cellule élémentaire, reliant les ondes entrantes et sortantes de chaque côté de la cellule (voir figure 2.b) :

$$\begin{pmatrix} \vec{C}_a \\ \vec{C}_d \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \vec{C}_b \\ \vec{C}_c \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Compte tenu de la symétrie du problème, cette matrice peut s'écrire comme :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

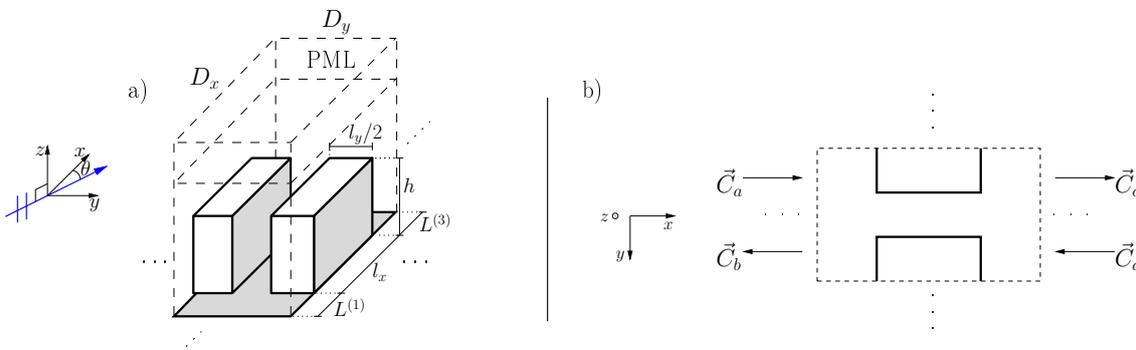


FIGURE 2 – a) cellule élémentaire du réseau periodique infini en  $x$  et  $y$ . b) ondes entrantes et sortantes de chaque côté de la cellule élémentaire, vue du dessus.

où  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{R}$  sont les matrices de transmission et réflexion, respectivement. Maintenant, la périodicité dans la direction  $x$  impose

$$\begin{pmatrix} \vec{C}_c \\ \vec{C}_d \end{pmatrix} = \mu_x \begin{pmatrix} \vec{C}_a \\ \vec{C}_b \end{pmatrix}, \quad (8)$$

avec  $\mu_x = \exp(jk_{Bx}D_x)$ . La relation (10) en combinaison avec la définition de la matrice de diffusion (8) conduit au problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{R} \\ [0] & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{C}_a \\ \vec{C}_d \end{pmatrix} = \mu_x \begin{bmatrix} \mathbf{I} & [0] \\ \mathbf{R} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{C}_a \\ \vec{C}_d \end{pmatrix}, \quad (9)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Finalement, l'obtention des valeurs propres  $\mu_x$  donne directement les nombres d'ondes de Bloch  $k_{Bx}$  recherchés.

Dans le cas de géométries fermées, les diagrammes de bandes sont tracés en gardant uniquement les solutions propagatives (*ie.* en négligeant les solutions  $\mu_x$  telles que  $\text{Im}\{k_{Bx}\} \neq 0$ ). Par contre, dans notre cas, due à la présence de la PML, aucune des solutions trouvées peut être purement propagative. Pour cette raison, une valeur limite  $\gamma = |\text{Im}\{k_{Bx}\}| > 0$  doit être acceptée afin de tracer les diagrammes de bandes pour ce type de domaine.

## 4 Résultats

Nous présentons maintenant quelques résultats obtenus avec les méthodes décrites précédemment. Les paramètres géométriques arbitraires sont  $(l_x, l_y, h) = (0.5, 0.2, 0.5)$ ,  $L^{(1)} = L^{(3)} = 0.25$  et  $D_y = 0.5$ ,  $D_x$  étant la longueur caractéristique du problème. Nous considérons une excitation du type onde plane avec incidence normale,  $\theta = 0$ . La figure 3.a montre le diagramme de bandes du réseau infini pour trois valeurs différents de  $\gamma$ . On constate que le nombre de solutions « propagatives » se réduit à mesure que  $\gamma$  diminue. Nous montrons également deux exemples de la valeur absolue du champ de pression dans un réseau fini, constitué de 6 rangées de bâtiments avec les mêmes dimensions que le cas précédent. Ils illustrent deux effets typiques dans des réseaux périodiques. Dans le premier exemple, représenté sur la figure 3.b, la fréquence d'excitation est comprise dans la petite bande interdite autour de  $kD_x/\pi = 4$ . Nous voyons comme le champ de pression s'atténue le long de la coordonnée  $x$ . Dans le deuxième cas (figure 3.c) la fréquence est située dans une bande « propagative »,  $kD_x/\pi = 3.54$ . Nous observons donc un effet de résonance du réseau. Ces résultats sont intéressants du point de vue de l'acoustique urbaine, car on montre que ce type de comportements peuvent se manifester même dans le cas d'un milieu fini (cas d'un quartier).

## Conclusions

La méthode EF-modale peut être adaptée à l'étude de réseaux périodiques ouverts finis et infinis. Nous avons vu que, du fait du caractère évanescents des nombres d'onde de Bloch trouvés, une valeur limite de sa partie imaginaire doit être acceptée afin de tracer les diagrammes de bandes de ce type de milieu. En outre, les résultats ont montré que des phénomènes typiques de réseau peuvent apparaître même pour des milieux constitués d'un nombre réduit de rangées. Cette méthode représente donc un outil permettant d'évaluer l'influence de la morphologie d'un quartier dans la propagation acoustique.

## Annexe A. Calcul des modes transverses par EF

Dans cette partie, nous nous intéressons au calcul des modes propres des sections  $S_1$  et  $S_2$  représentées sur la figure 1.b. Pour chaque section, le problème à résoudre vient donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \alpha^2 \right) \phi(y, z) = 0, \forall (y, z); \\ \partial_n \phi(y, z) = 0, \forall (y, z) \in \Gamma_N; \\ \phi(y \in \Gamma_D, z) = \mu_y \phi(y \in \Gamma_G, z); \\ \partial_n \phi(y \in \Gamma_G, z) = -\mu_y \partial_n \phi(y \in \Gamma_G, z), \end{array} \right. \quad (10)$$

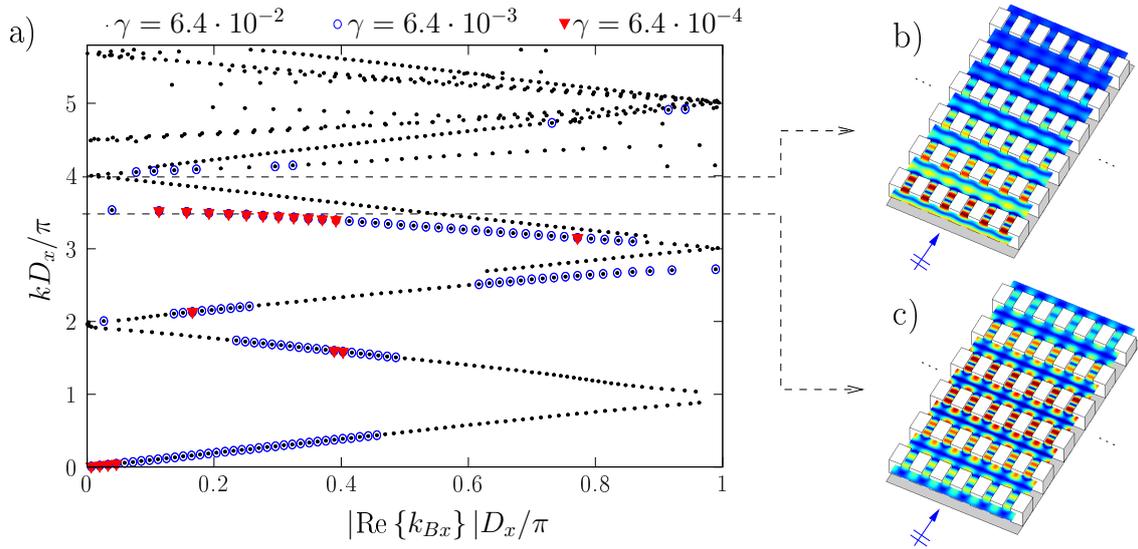


FIGURE 3 – a) Diagramme de bandes obtenu pour le réseau infini pour différentes valeurs de  $\gamma$ . b) champ de pression dans le plan horizontal à la hauteur  $z = 0.4$  d'un reseau fini constitué de 6 rangées, excité dans une bande interdite. c) même cas que b) mais excité dans une bande « propagative ».

où  $\alpha$  est le nombre d'onde dans le plan. Le problème est discrétisé suivant une méthode EF standard, avec des éléments triangulaires linéaires (voir figure 4).  $\Gamma_N$  représente des frontières parfaitement réfléchissantes, alors que  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$  sont des frontières périodiques. Le maillage est généré de façon à ce que les nœuds placés sur les frontières  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_G$  soient symétriques par rapport à l'axe vertical. De plus, par souci de simplicité, on impose un maillage identique dans la zone commune aux deux sections transversales,  $S_1 \cap S_2$  [9]. Le champ est ensuite développé sur la base des fonctions d'interpolation  $\psi_n(y, z)$  choisies (polynômes de Legendre du premier ordre dans notre cas) :

$$\phi(y, z) = \sum_{n=1}^N \Phi_n \psi_n = {}^t \vec{\psi} \vec{\Phi}, \quad (11)$$

et la forme discretisée du problème (10) prend la forme

$$(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M}) \vec{\Phi} = \vec{u}, \quad (12)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont les matrices de masse et raideur, respectivement :

$$K_{mn} = \int_S \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \right) dS, \quad (13)$$

$$M_{mn} = \int_S \psi_m \psi_n dS, \quad (14)$$

et le term  $u_n$  de  $\vec{u}$  est donné par :

$$u_n = \int_{\Gamma} \partial_n \phi \psi_n d\Gamma, \quad (15)$$

avec  $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_G \cup \Gamma_D$ . Il est facile de prouver que ces termes sont nuls pour tous les nœuds sauf pour ceux qui sont localisés sur les frontières périodiques.

Afin d'écrire le problème sous une forme plus compacte, nous pouvons définir la matrice  $\mathbf{D} = \mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M}$ . Ensuite, le problème est réordonné afin de faire apparaître d'abord les nœuds appartenant à  $\Gamma_G$  (indice  $G$ ), suivies par les nœuds intérieurs ( $I$ ), et finalement ceux appartenant à la frontière  $\Gamma_D$  ( $D$ ) [1]. Il vient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{GG} & \mathbf{D}_{GI} & \mathbf{D}_{GD} \\ \mathbf{D}_{IG} & \mathbf{D}_{II} & \mathbf{D}_{ID} \\ \mathbf{D}_{DG} & \mathbf{D}_{DI} & \mathbf{D}_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\Phi}_G \\ \vec{\Phi}_I \\ \vec{\Phi}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_G \\ \vec{0} \\ \vec{u}_D \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Les deux dernières conditions de (10) peuvent maintenant se traduire par les deux expressions vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_D = \mu_y \vec{\Phi}_G, \\ \vec{u}_D = -\mu_y \vec{u}_G. \end{cases} \quad (17)$$

Par conséquent, en appliquant les conditions (17) dans (16) et réalisant quelques opérations, nous obtenons le problème aux valeurs propres pour les inconnues  $\vec{\Phi}_G$  et  $\vec{\Phi}_I$  :

$$\mathbf{D}_b \begin{pmatrix} \vec{\Phi}_G \\ \vec{\Phi}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

avec

$$\mathbf{D}_b = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{D}_{GG} + \mu_y \mathbf{D}_{GD} + \mu_y^{-1} \mathbf{D}_{DG} + \mathbf{D}_{DD} & \mathbf{D}_{GI} + \mu_y^{-1} \mathbf{D}_{DI} \\ \hline \mathbf{D}_{IG} + \mu_y \mathbf{D}_{ID} & \mathbf{D}_{II} \end{array} \right] = \mathbf{K}_b - \alpha^2 \mathbf{M}_b. \quad (19)$$

Les valeurs propres  $\alpha_m$  sont obtenues comme les valeurs de  $\alpha$  qui satisfont  $\det\{\mathbf{D}_b\} = 0$  et les modes propres sont les vecteurs propres associés  $\vec{\Phi}_n$ . Finalement, les valeurs des inconnues éliminées  $\vec{\Phi}_D$  peuvent être directement obtenues grâce à (18).

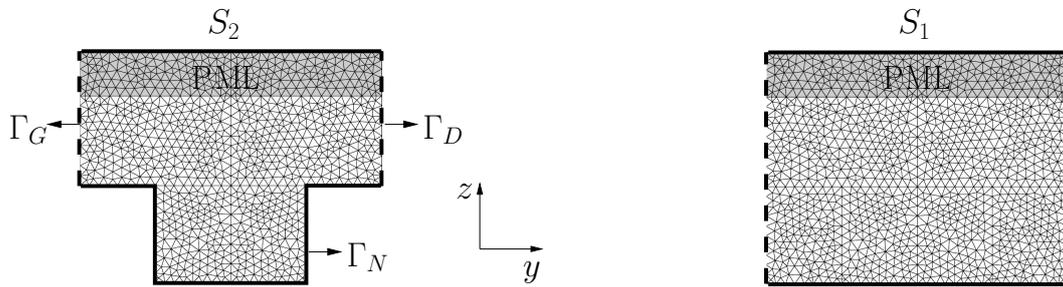


FIGURE 4 – Exemple de maillage des sections transversales.  $\Gamma_N$  représente des frontières rigides, en trait épais continu.  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$  représentent les frontières périodiques, en trait discontinu.

## Références

- [1] J.-F. Allard, O. Dazel, G. Gautier, J.-P Groby. Porous medium with corrugated surface. *J. Acoust. Soc. Am.* **129** 3 (2011).
- [2] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, **114** 2 (1994) 185-200.
- [3] L. Brillouin. Wave propagation in periodic structures. McGraw-Hill, New York, 1946.
- [4] A. Duclos, D. Lafarge, V. Pagneux. Transmission of acoustic waves through 2D phononic crystal : visco-thermal and multiple scattering effects. *Eur. Phys. J. : Appl. Phys.* **45** 1 (2009) 11302.
- [5] S. Félix, V. Pagneux. Sound propagation in rigid bends : A multimodal approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, **110** 3 (2001) 1329-1337.
- [6] M. Molerón, S. Félix, A. Pelat, V. Pagneux, J. Picaut, O. Richoux, A coupled modal-FE method for the sound propagation modeling in urban canyons, *Internoise 2010*. Lisbon, Portugal, 2010
- [7] V. Pagneux, N. Amir, J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I : Theory and Validation. *J. Acoust. Soc. Am.*, **100** 4 (1996) 2034-2048.
- [8] A. Pelat, S.Félix, V. Pagneux, On the use of leaky modes in open waveguides for the sound propagation modeling in street canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, **126** 6 (2009) 2864-2872.
- [9] A. Pelat, S. Félix, V. Pagneux. A coupled Modal-FE method for the wave propagation in irregular open waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.* **129**. (2011, to appear)
- [10] A. Pelat, S. Félix, V. Pagneux. Coupled Modal-Finite Element method of the sound propagation in a non uniform street canyon. *Euronoise 2009*. Edinburgh, Scotland. 2009.