

# Propagation du son dans des guides d'ondes irréguliers : Approximation unidirectionnelle pour une application à l'acoustique urbaine

JEAN-BAPTISTE DOC<sup>a</sup>, BERTRAND LIHOREAU<sup>a</sup>, SIMON FÉLIX<sup>a</sup>

a. LAUM, CNRS, avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France.

## Résumé :

*Modéliser la propagation acoustique dans un guide d'onde irrégulier peut représenter un coût numérique élevé. Pour réduire le temps de calcul, deux modèles unidirectionnels sont développés. Le premier, basé sur une équation parabolique, permet de tenir compte des irrégularités du guide à travers un changement de variables. Le second est basé sur un développement modal. Les modèles obtenus sont comparés à une solution de référence. Lorsque les irrégularités sont modérées, les modèles unidirectionnels donnent des résultats satisfaisants.*

## Abstract :

*Modeling acoustic propagation in an irregular waveguide can lead to high computational cost. To reduce the computation time, two "one-way" models are developed. The first, based on a parabolic equation, takes into account the waveguide irregularities through a change of variables. The second is based on a modal expansion. The models are compared to a reference solution. When irregularities are moderate, unidirectional models give satisfactory results.*

**Mots clefs :** Guide d'ondes, Approximation unidirectionnelle, Equations paraboliques

## Introduction

Dans le domaine de l'acoustique, de nombreuses méthodes sont employées pour modéliser la propagation du son dans des guides d'ondes de géométrie complexe [1]. Lorsque la section de ce type de guide d'ondes varie lentement, le taux d'ondes retours est très faible et la rétropropagation peut alors être négligée. Dans ce cas, le champ de pression peut être approché en considérant uniquement les ondes se propageant selon une direction privilégiée. Ce type d'approximation est couramment utilisé aussi bien dans l'acoustique sous-marine que dans l'acoustique environnementale. Traditionnellement, la méthode des équations paraboliques [2] est alors utilisée pour approximer l'équation d'ondes.

Le but de ce travail est de développer deux modèles basés sur une approximation unidirectionnelle de la propagation du son dans des guides d'ondes irréguliers et de présenter les capacités de modélisation de telles approches. La première méthode est basée sur l'utilisation des équations paraboliques adaptées à la prise en compte de la variation de section du guide. La seconde méthode est basée sur une approche multimodale adaptée à une approximation unidirectionnelle. Dans un premier temps, ces deux méthodes vont être présentées ; dans un second temps une comparaison entre ces deux méthodes sera effectuée pour une géométrie donnée.

## 1 Méthodes one-way

Cette partie présente deux modèles de propagation du son en guide d'ondes irréguliers issus d'une approximation unidirectionnelle. Ces deux modèles ondulatoires sont basés sur l'équation de Helmholtz en régime harmonique ( $k = \frac{2\pi f}{c_0}$ ) en dehors des sources. L'équation d'ondes s'écrit alors  $(\Delta + k^2)p = 0$ .

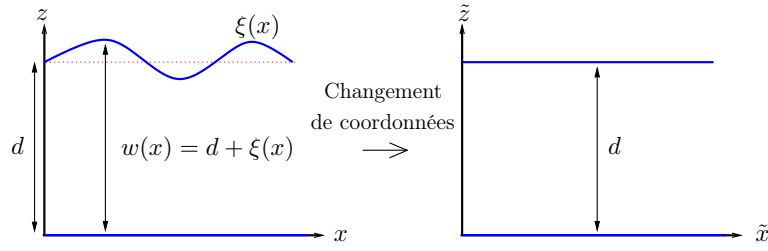


FIGURE 1 – Illustration du changement de coordonnées.

Cette partie présente deux méthodes d'approximation de l'équation de Helmholtz pour obtenir en une équation d'ondes unidirectionnelle en guide d'ondes irréguliers.

## 1.1 Equation parabolique

L'équation parabolique consiste à approximer l'équation de Helmholtz en une équation différentielle d'ordre un. Pour cela, l'équation de Helmholtz peut être développée sous la forme

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} + ik\mathcal{Q} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - ik\mathcal{Q} \right) + ik \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{Q} - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] p(x, z) = 0, \quad (1)$$

avec  $\mathcal{Q} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_z}$  le pseudo-opérateur transverse où  $\mathcal{L}_z = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Si l'on fait l'hypothèse qui consiste à négliger les ondes retours et leurs couplages avec les ondes aller, l'équation (1) peut être simplifiée :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - ik\mathcal{Q} \right) p^+(x, z) = 0. \quad (2)$$

L'équation (2) est une solution exacte de la propagation du son en guide droit homogène, l'approximation unidirectionnelle n'apporte aucune source d'erreur dans ce cas.

Pour prendre en compte la variation de la section du guide d'ondes, nous opérons un changement de coordonnées pour transformer un guide irrégulier homogène en un guide droit hétérogène. La figure 1 présente le type de géométrie étudiée : un guide d'onde avec sa paroi inférieure droite et sa paroi supérieure irrégulière.  $w(x)$  représente la largeur locale du guide d'ondes qui varie autour d'une largeur moyenne noté  $d$ . Le changement de coordonnées est défini par :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, & (3a) \\ \tilde{z} = \frac{d}{d + \xi(x)} z = \frac{d}{w(x)} z. & (3b) \end{cases}$$

Un nouveau gradient de pression peut être défini d'après les équations (3a) and (3b), il s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \left( \frac{\xi'(x)}{w(x)} \tilde{z} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, & (4a) \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{w(x)} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}. & (4b) \end{cases}$$

En appliquant les équations (4a) et (4b) à l'équation d'onde unidirectionnelle (2), on obtient une équation d'onde one-way pour les guides d'ondes irréguliers :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\xi'(x)}{w(x)} \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - ik \left( \tilde{\mathcal{Q}} - 1 \right) \right] \tilde{\phi}(x, \tilde{z}) = 0, \quad (5)$$

où  $\tilde{\mathcal{Q}} = \sqrt{1 + \tilde{\mathcal{L}}_z}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}_z = \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{w(x)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$ . Cette équation est écrite avec la variable enveloppe de pression qui se définit par  $\tilde{\phi}(x, \tilde{z}) = \tilde{p}(x, \tilde{z}) e^{-ik_0 x}$ .

L'équation (5) a une forme similaire à celle présentée par Evans [3], à l'exception du changement de coordonnées qui, dans notre cas, peut répercuter la variation de géométrie du guide au niveau de l'évolution de la largeur transverse.

Entre les équations (2) et (5), on peut constater que deux nouveaux termes apparaissent :

- $\frac{\xi'(x)}{w(x)} \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$  prend en compte le changement de courbure locale du guide,
- $\frac{d^2}{w(x)^2}$  prend en compte l'élargissement du guide.

Si l'on considère des variations lentes de la géométrie du guide d'ondes, la fonction  $\xi(x)$  peut être considérée constante sur un intervalle  $[x, x + \Delta x]$  et la solution de l'équation d'onde (5) peut s'écrire

$$\tilde{\phi}(x + \Delta x, \tilde{z}) = e^{\frac{\xi'(x)}{w(x)} \tilde{z} \Delta x \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}} e^{ik_0 \Delta x (\tilde{Q}-1)} \tilde{\phi}(x, \tilde{z}). \quad (6)$$

Pour la résolution numérique de l'équation (6), l'opérateur  $\mathcal{Q}$  est approximé par un développement de Padé [4]. Des coefficients de Padé complexes [5] sont utilisés afin de faire décroître les modes évanescents générés par le changement de section du guide d'ondes. De plus, l'opérateur exponentiel est développé à l'ordre un. L'équation alors obtenue est discrétisée selon  $\tilde{z}$  en utilisant les différences finies. Un algorithme de propagation pas à pas est alors obtenu pour calculer le champ à n'importe quelle distance pour un état initial donné.

## 1.2 Méthode multimodale

La méthode multimodale [6] consiste à projeter l'équation de Helmholtz sur une base de modes transverses. Les modes transverses du guide d'ondes sont alors utilisés pour discrétiser le problème transverse selon l'axe  $z$ . Pour cela, l'équation de Helmholtz peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (7)$$

avec  $q$  le gradient de pression longitudinale :  $q = \frac{\partial p}{\partial x}$ .  $p$  et  $q$  peuvent être définis :

$$\begin{cases} p = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) g_n(x, z) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) g_n(x, z), \end{cases} \quad (8b)$$

avec les modes transverses  $g_n(x, z)$ , qui pour un guide d'onde irrégulier avec condition de Neumann aux parois, s'écrivent

$$g_n(x, z) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{w(x)}} \cos\left(\frac{n\pi}{w(x)} z\right). \quad (9)$$

Les modes transverses ainsi définis satisfont la relation d'orthogonalité  $\int_0^{w(x)} g_n g_m dz = \delta_{nm}$ . La projection de l'équation (7) sur les modes transverses permet d'obtenir le système d'équations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -F & 1 \\ -K^2 & F^t \end{pmatrix}}_{[H]} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \quad (10)$$

où  $K$  est une matrice diagonale correspondant à la relation de dispersion  $K_{nm} = k_n \delta_{nm}$  avec  $k_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{w(x)}\right)^2}$ .  $F$  est une matrice avec des termes non-diagonaux qui, pour des conditions de Neumann

aux parois, s'exprime

$$F_{nm} = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ et } m > 0, & (11a) \\ \frac{-\xi'}{2w} & n = 0 \text{ et } m = 0, & (11b) \\ \frac{-\xi'}{w} \sqrt{2} (-1)^n & n > 0 \text{ et } m = 0, & (11c) \\ \frac{-\xi'}{w} & n = m \neq 0, & (11d) \\ \frac{2\xi'}{w} (-1)^{n+m} \left[ \frac{n^2}{m^2 - n^2} \right] & \text{sinon.} & (11e) \end{cases}$$

La matrice d'admittance  $Y$  peut être définie comme  $Q = YP$ . D'après l'équation (10), pour calculer la pression à l'intérieur du guide d'ondes, cela revient à résoudre l'équation différentielle d'ordre un

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (Y - F)P. \quad (12)$$

L'équation différentielle (12) est une forme de solution de l'équation de Helmholtz. Une approximation unidirectionnelle de cette équation peut être obtenue en partant du principe qu'un champ de pression peut être décomposé selon des composantes propagative  $P^+$  et rétro-propagative  $P^-$ , cela revient à écrire  $P = P^+ + P^-$ . Le gradient longitudinal de la pression peut alors s'écrire  $Q = iKP^+ - iKP^-$ . En utilisant la matrice d'admittance, le gradient de la pression peut également prendre la forme  $Q = Y(P^+ + P^-)$ . Donc, si l'on néglige les composantes retours du champ de pression ( $P^- = 0$ ), cela veut dire que la matrice d'admittance prend la forme  $Y_{nm} = iK$ .

Pour résoudre numériquement l'équation (12), nous choisissons d'utiliser une méthode de Magnus [7]. Cela revient à résoudre l'équation

$$P(x + \Delta x) = [E_1 + E_2 Y(x + \frac{\Delta x}{2})]^{-1} P(x), \quad (13)$$

avec

$$e^{-\Delta x [H(x + \frac{\Delta x}{2})]} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

## 2 Evaluation des modèles one-way

Pour quantifier l'erreur apportée par l'approximation unidirectionnelle et comparer les hypothèses formulées d'un modèle à l'autre, nous proposons dans cette partie une comparaison entre les modèles one-way et une solution de référence.

### 2.1 Solution de référence

Nous choisissons comme solution de référence la méthode multimodale [7]. La matrice d'admittance est alors obtenue en faisant le rapport des deux équations du système (10). En partant d'une condition de rayonnement en sortie du guide (tube infini), il est possible de ramener l'impédance jusqu'à l'entrée du guide en résolvant l'équation

$$Y(x - \Delta x) = [E_3 + E_4 Y(x)] [E_1 + E_2 Y(x)]^{-1}. \quad (15)$$

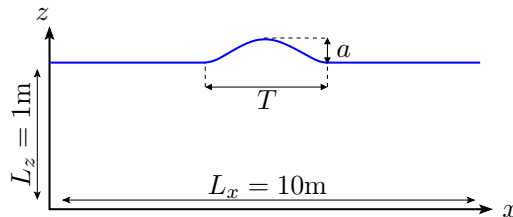


FIGURE 2 – Exemple de géométrie étudiée.

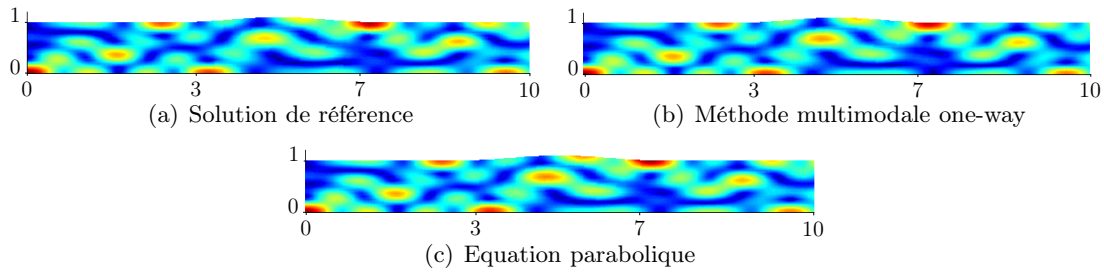


FIGURE 3 – Cartographies du champ de pression pour les trois modèles.

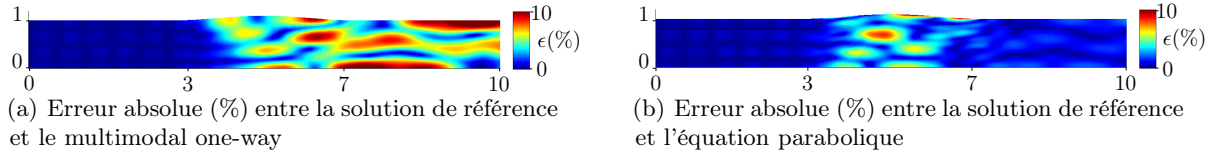


FIGURE 4 – Erreur absolue des modèles one-way pour un guide d'ondes irrégulier.

## 2.2 Géométrie étudiée

La géométrie du guide d'ondes correspond à un élargissement ou à un rétrécissement local de la section transverse. L'irrégularité est définie comme une période de fonction cosinus de période  $T$  et d'amplitude  $a$ . La figure 2 présente le type de géométrie étudiée.

## 2.3 Comparaison du champ de pression

Pour évaluer les modèles one-way, nous allons comparer le champ de pression entre la solution de référence et les deux modèles présentés dans la partie 1. La géométrie étudiée est celle présentée à la figure 2 avec  $T = 4\text{m}$  et  $a = 0.1\text{m}$ . La longueur d'onde est fixée à  $\lambda = 0.58\text{m}$ , la condition initiale consiste à imposer à 1 les coefficients de chacun des modes propagatifs.

La figure 3 présente les cartographies du module de la pression à l'intérieur du guide d'ondes pour la solution de référence et des deux modèles one-way. On peut constater que le champ de pression est correctement modélisé par les deux méthodes de propagation unidirectionnelle.

Si l'on définit une erreur absolue  $\epsilon = |p_{\text{one-way}} - p_{\text{ref}}| / |\max(p_{\text{ref}})|$ , on peut tracer la figure 4 qui représente les cartographies d'erreur pour chacun des modèles one-way. Avant l'irrégularité ( $x \in [0, 3]$ ) l'erreur absolue est pratiquement nulle, ce qui permet de valider l'approximation unidirectionnelle puisque pour cette configuration il y a très peu d'ondes retours.

La figure 4(a) nous renseigne sur le fait que l'erreur commise par le multimodal one-way dans la zone de l'irrégularité ( $x \in [3, 7]$ ) s'étend à la partie droite suivante ( $x \in [7, 10]$ ). Cela n'est pas le cas pour l'approche parabolique (figure 4(b)). L'erreur dans la zone de l'irrégularité provient d'un mauvais couplage entre les modes du fait des différentes hypothèses formulées lors de l'approximation unidirectionnelle.

## 2.4 Effet de l'amplitude de l'irrégularité

Pour observer l'effet de l'amplitude de l'irrégularité sur l'erreur commise par les modèles one-way, on définit une erreur relative intégrant le champ transversalement et longitudinalement. Ainsi, tout un champ de pression est ramené à une valeur correspondant à son erreur relative par rapport à la solution de référence.

La figure 5 présente l'évolution de cette erreur relative en fonction de l'amplitude de l'irrégularité pour la précédente configuration ( $\lambda = 0.58\text{m}$  et  $T = 4\text{m}$ ). Pour de très petites amplitudes d'irrégularité, on peut constater que le multimodal one-way tend vers le modèle de référence, alors que le modèle parabolique conserve toujours une faible erreur du fait de l'approximation du pseudo-opérateur transverse  $\mathcal{Q}$ . Plus

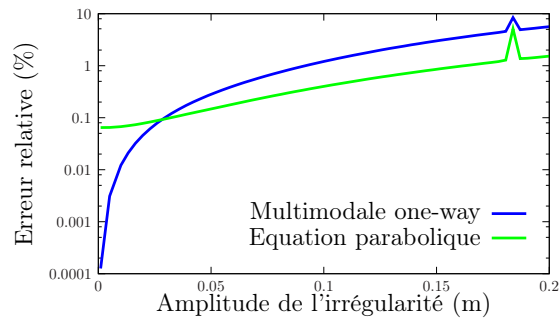


FIGURE 5 – Erreur relative des modèles one-way en fonction de l'amplitude de l'irrégularité.

l'amplitude de l'irrégularité augmente, plus l'erreur est importante puisque le taux d'ondes retours dans ce cas augmente également. On constate également que l'écart entre les erreurs relatives des deux modèles se creuse en défaveur du multimodal one-way. Pour  $a \simeq 0.18\text{m}$ , on se trouve à un passage à la coupure à l'intérieur de l'irrégularité avec un nombre de modes propagatifs qui augmente du fait de l'élargissement de la section du guide. Les deux modèles sont sensibles à cette coupure.

## Conclusion

Les observations qui viennent d'être faites ne sont valables que pour la géométrie qui a été étudiée. Il ressort tout de même de cette comparaison que le modèle basé sur les équations paraboliques paraît mieux modéliser le champ de pression à l'intérieur d'un guide d'ondes irrégulier, avec une erreur dans la zone de l'irrégularité qui n'est pas propagée dans la suite du guide. Il est évident que d'autres paramètres comme la longueur d'ondes ou le nombre d'irrégularités successives ont un impact direct sur les possibilités des modèles. Il pourrait être intéressant d'étendre l'étude à ces paramètres.

La principale perspective de ce travail est l'utilisation de l'équation parabolique pour une modélisation à trois dimensions des guides d'ondes irréguliers. Ces derniers auront la particularité d'être ouverts afin de représenter l'ouverture des rues sur le ciel, la prise en compte des irrégularités permettra de considérer l'effet des façades d'immeubles sur la diffusion du son.

## Remerciements

Les auteurs remercient le conseil régional des Pays de la Loire pour son soutien financier. Ce travail a été également soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre de l'ANR AcouVille (ANR-09-JCJC-0009-01).

## Références

- [1] L. Campos : Some general properties of the exact acoustic fields in horns and baffles, *J. Sound Vib.*, 95(2) : 177-201, 1984.
- [2] F. Tappert : The parabolic approximation method, Springer Berlin / Heidelberg, 1977.
- [3] R.B. Evans : The flattened surface parabolic equation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 104(4) : 2167-2173, 1998.
- [4] A. Bamberger, B. Engquist, L. Halpern, and P. Joly : Higher Order Paraxial Wave Equation Approximations in Heterogeneous Media, *J. Appl. Math.*, 48(1) : 129-154, 1988.
- [5] Y.Y. Lu : A complex coefficient rational approximation of  $\sqrt{(1+x)}$ , *Appl. Num. Math.*, 27(2) : 141 - 154, 1998.
- [6] V. Pagneux, N. Amir and J. Kergomard : A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I. Theory and validation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(4) : 2034-2048, 1996.
- [7] V. Pagneux : Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies, *J. Comp. Appl. Math.*, 234(6) : 1834 - 1841, 2010.