

# **ETUDE NUMERIQUE DES VORTEX DE DEAN DANS UN ECOULEMENT D'UN FLUIDE VISCOELASTIQUE DANS UNE CONDUITE COURBE**

Mohammed **BOUTABAA**<sup>a,\*</sup>, Gilmar **MOMPEAN**<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Département de Mécanique, Université de Chlef, BP 151 Hay Es-Salem 02000 Chlef (Algérie)

<sup>b</sup>Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR-CNRS 8107, Polytech'Lille, Cité Scientifique, 59655 (France).

## **RÉSUMÉ**

Le travail présenté est une synthèse de travaux sur les vortex de Dean qui s'opèrent dans les conduites courbes. On présente les résultats de simulations numériques **3D**, de l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite courbe en **U** pour des nombres de Dean ( $D_n$ ) allant de 50 à 500, pour des nombres de Deborah ( $D_e$ ) allant de 0,1 à 0,5 et pour différents rapports d'aspect de la section d'écoulement ( $A_r$ ) allant de 1 à 12. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations de conservation, et l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (PTT) représentant le fluide viscoélastique. Les résultats obtenus mettent en évidence l'influence de l'inertie, de la viscoélasticité et du rapport d'aspect sur la structure et la formation des vortex de Dean dans l'écoulement principal.

**Mots Clés** : fluide viscoélastique, modèle PTT, conduite courbe, vortex de Dean, section carrée, section rectangulaire.

## **ABSTRACT**

This study is devoted to the **3D** numerical simulation of developing flows of viscoelastic fluids through a curved duct of square cross-section and rectangular cross-section. The Phan-Thien-Tanner (PTT) model is used to represent viscoelastic effects. The numerical method uses a finite volume discretization with a staggered grid, and the equations are written in general orthogonal coordinates. The numerical simulations are produced for Dean numbers ( $D_n$ ) varying from 50 to 500, and Deborah numbers ( $D_e$ ) varying from 0,1 to 0,5. The aspect ratios ( $A_r$ ) are varying from 1 to 12. The study shows the influence of inertial effects, aspect ratio and viscoelasticity on the vortex structure and the onset of additional vortices in the main flow.

**Key words**: viscoelastic fluid, PTT model, curved duct, Dean vortex, square cross-section, rectangular cross-section.

## **NOMENCLATURE**

$D_n$  : nombre de Dean.

$D_e$  : nombre de Deborah.

$R_e$  : nombre de Reynolds.

$D_H$  : diamètre hydraulique.

$R_c$  : rayon de courbure moyenne.

$a$  : hauteur de la section d'écoulement.

$b$  : largeur de la section d'écoulement.

$A_r$  : rapport d'aspect.

$\lambda$  : temps de relaxation (s)

$U$  : vitesse débitante (m/s)

$\nabla$  : opérateur nabla

$\mathbf{u}$  : vecteur vitesse (m/s)

$\rho$  : masse volumique du fluide (kg/m<sup>3</sup>)

$D./Dt$  : dérivée particulaire

$p$  : pression du fluide ( $P_a$ )

$I$  : matrice identité

$\eta_s$  : viscosité newtonienne du solvant (Pl)

$\eta_p$  : viscosité polymérique du fluide (Pl)

$\mathbf{S}$  : tenseur symétrique des taux de déformation

$\boldsymbol{\tau}$  : tenseur des contraintes polymériques

$\{\boldsymbol{\tau}\}$  : trace du tenseur  $\boldsymbol{\tau}$

$\varepsilon$  : paramètre d'extensibilité du modèle PTT

## 1. INTRODUCTION

Les écoulements dans les conduites courbes sont présents dans des applications industrielles diverses, tels que les échangeurs de chaleur, les systèmes de refroidissement des aubes de turbines et des chambres de combustion, les systèmes de chauffe, les réacteurs chimiques et les systèmes de mélange. L'importance de ces écoulements réside dans la présence d'écoulements secondaires, qui favorisent nettement les taux d'échange et de transfert de la masse, de la chaleur, de la quantité de mouvement et du mélange. Dean [1], fut le premier à étudier les instabilités dues aux courbures des lignes de courant d'un écoulement pleinement développé d'un fluide newtonien, il a montré, dans une analyse mathématique, qu'au delà d'une valeur critique du nombre de Dean  $D_n$ , une paire de cellules vortex (appelées vortex de Dean) apparaît au sein de l'écoulement à proximité de la paroi externe de la conduite courbe. Plusieurs définitions ont été adoptées pour le nombre de Dean, une revue de ces définitions, a été faite par Berger et al. [2]. Dans la présente étude il est défini par :

$$D_n = R_e (D_H / R_c)^{1/2}, \text{ avec } D_H = 4ab / 2(a+b), \text{ et } R_e = \rho U D_H / (\eta_s + \eta_p).$$

La première analyse théorique montrant l'existence des écoulements secondaires dans les conduites courbes à section rectangulaire, a été faite par Ito [3]. Plusieurs auteurs ont réalisé des travaux expérimentaux, théoriques et numériques, sur les conduites courbes à section carrée ou rectangulaire, plusieurs aspects du problème ont été abordés, on cite à titre d'exemple, l'effet du chauffage de la conduite, (Cheng et Akiyama [4], Chandratilleke et Nursubyakto [5]), l'effet du rapport d'aspect  $A_r$ , (Ligrani et Niver [6], Cheng et Akiyama [4], Chandratilleke et Nursubyakto [5], fellouah et al. [7]) ainsi que l'effet du taux de courbure (fellouah et al. [7]).

L'effet de la viscoélasticité, ou l'étude des vortex de Dean au sein des écoulements de fluides viscoélastiques sont relativement peu nombreuses (Jitoche et Robertson [8] Phan-Thien et Zheng [9]), les travaux de Joo et Shaqfeh [10] et [11] sont d'une importance majeure, ils ont montré qu'au sein d'un fluide viscoélastique, les instabilités de Dean résultent de deux mécanismes : un mécanisme purement élastique et un autre mécanisme purement inertiel. L'effet de l'élasticité a été étudié pour un fluide PTT par Boutabaa et al. [12], et pour un fluide MPTT par Helin et al. [13].

L'objectif de la présente étude est de simuler numériquement les effets de l'inertie par la variation du nombre de Dean  $D_n$ , du rapport d'aspect  $A_r$  défini par  $A_r = b/a$  et de l'élasticité, par la variation du nombre de Deborah  $D_e$  défini par :  $D_e = \lambda U / D_H$ , sur la structure des vortex de Dean au sein d'un fluide viscoélastique de Phan-Thien-Tanner (PTT) s'écoulant dans une conduite rectangulaire courbe à 180° en forme de U.

## 2. EQUATIONS GOUVERNANTES

Nous considérons dans cette étude, l'écoulement laminaire isotherme tridimensionnel d'un fluide viscoélastique incompressible. Le problème est régi par les équations suivantes :

### 2.1. Equation de conservation de la masse

Pour un fluide incompressible, en écoulement permanent, l'équation de conservation de masse s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

### 2.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

Pour un fluide viscoélastique, en écoulement permanent, l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho (D\mathbf{u} / Dt) = \nabla(-p\mathbf{I} + 2\eta_s \mathbf{S} + \boldsymbol{\tau}) \tag{2}$$

### 2.3. Equation constitutive de Phan-Thien-Tanner

Le modèle choisi, pour modéliser la viscoélasticité du fluide est le modèle de Phan-Thien-Tanner, la loi de comportement s'écrit :

$$f(\{\boldsymbol{\tau}\})\boldsymbol{\tau} + \lambda[(D\boldsymbol{\tau} / Dt) - \boldsymbol{\tau}\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T\boldsymbol{\tau}] = 2\eta_p \mathbf{S} \tag{3}$$

Dans la présente étude, on a utilisé la formulation exponentielle du modèle PTT [14], où la fonction  $f$  est définie par :

$$f(\{\boldsymbol{\tau}\}) = \exp[(\varepsilon\lambda / \eta_p) \cdot \{\boldsymbol{\tau}\}] \quad (4)$$

(Notons que dans le cas où  $\varepsilon$  est nul, le modèle PTT se réduit au modèle d'Oldroyd-B).

### 3. EQUATIONS EN COORDONNEES ORTHOGONALES GENERALISEES

L'utilisation des coordonnées orthogonales généralisées est d'un intérêt certain pour simuler les écoulements évoluant dans des géométries présentant des frontières courbes ou aiguës, ou les écoulements en présence d'obstacles. Cette méthode a été utilisée par de nombreux auteurs, tels que Pope [15], Thais et al. [16]. Nous utilisons ce système de coordonnées dans la présente étude. Les équations (1), (2) et (3) sont réécrites en fonction des coordonnées orthogonales généralisées  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ .

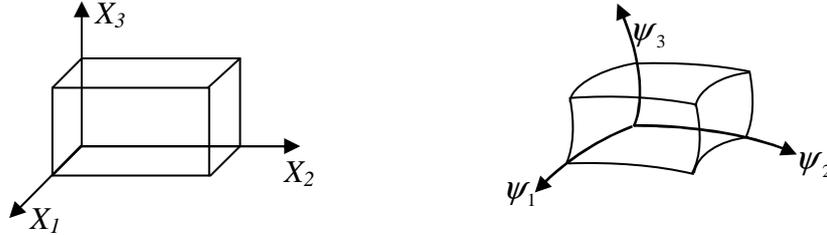


Fig. 1. Coordonnées cartésiennes et coordonnées orthogonales généralisées.

#### 3.1. Equation de conservation de la masse

$$\sum_i \nabla_{\cdot(i)} (V_i) = 0 \quad (5)$$

Où  $V_i$  est le champ des vitesses contravariantes physiques et  $\sum_i \nabla_{\cdot(i)}$  l'opérateur de divergence généralisé.

#### 3.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho V_j)}{\partial t} + \sum_i \nabla_{\cdot(i)} (\rho V_i V_j - T_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \sum_i H_j^i (\rho V_i V_j - T_{ij}) + \sum_i H_i^j (\rho V_i V_i - T_{ii}) \quad (6)$$

Où  $T_{ij} = \tau_{ij} + 2\eta_s S_{ij}$  est la somme des composantes physiques du tenseur polymérique et des composantes des tensions newtoniennes exprimées en coordonnées orthogonales généralisées.

$H_i^j$ , les facteurs d'étirement, sont définis à partir de la matrice Jacobienne de la transformation des coordonnées  $x_i \rightarrow \psi_i$  et  $\partial \xi_j$  les variations des longueurs physiques curvilignes.

#### 3.3. Equation constitutive du fluide de Phan-Thien-Tanner

L'équation du fluide de Phan-Thien-Tanner (PTT) en coordonnées orthogonales généralisées, résulte de la transformation du tenseur du second ordre provenant de l'advection du tenseur  $\boldsymbol{\tau}$ , elle s'exprime comme suit

$$f(\{\tau_{ij}\})\tau_{ij} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \tau_{ij}) - \sum_k H_k^i V_k \tau_{kj} + \sum_k H_i^k V_i \tau_{kj} \right) + \lambda \left( \sum_k H_j^k V_j \tau_{ik} - \sum_k H_k^j V_k \tau_{ik} - \sum_k L_{ik} \tau_{kj} - \sum_k L_{jk} \tau_{ki} \right) = 2\eta_p S_{ij} \quad (7)$$

Avec  $L_{ij}$  les composantes de l'opérateur du gradient de vitesse généralisé.

## 4. METHODE NUMERIQUE

### 4.1. Discrétisation spatiale

La méthode des volumes finis avec un maillage décalé est utilisée pour discrétiser les équations de conservation et l'équation constitutive de fluide PTT. La pression et les composantes normales du tenseur viscoélastique sont évaluées aux centres des volumes de contrôle, tandis que les composantes de cisaillement sont stockées aux milieux des arêtes des volumes de contrôle. Les vitesses sont stockées et calculées aux centres des faces des volumes de contrôle. Les termes de

diffusion des équations de quantité de mouvement sont calculés par un schéma de différences centrées du second ordre, les termes non linéaires (flux convectifs) des équations de quantité de mouvement et les termes d'advection de l'équation constitutive de PTT sont évalués par le schéma QUICK proposé par Leonard [17]. Pour améliorer la stabilité numérique des calculs, nous avons utilisé l'algorithme EVSS (Elastic Viscous Split Stress) développé par Rajagopalan et al. [18].

#### 4.2. Discrétisation temporelle

La procédure de découplage de la pression utilisée, découle de l'algorithme « Marker and Cell » de Harlow et Welch [19]. Le système linéaire symétrique obtenu pour la pression est résolu par la méthode de Choleski.

#### 4.3. Géométrie, maillage et conditions aux limites

La conduite d'écoulement (Fig. 2), est composée de: (i) un canal droit à l'entrée de longueur  $L_e = 10a$ . (ii) un canal courbe à 180° de rayon intérieur  $R_1 = 18a$  et de rayon extérieur  $R_2 = 19a$ . (iii) un canal droit à la sortie semblable à celui de l'entrée. La section d'écoulement est rectangulaire de largeur variable  $b$  et de hauteur  $a$ .

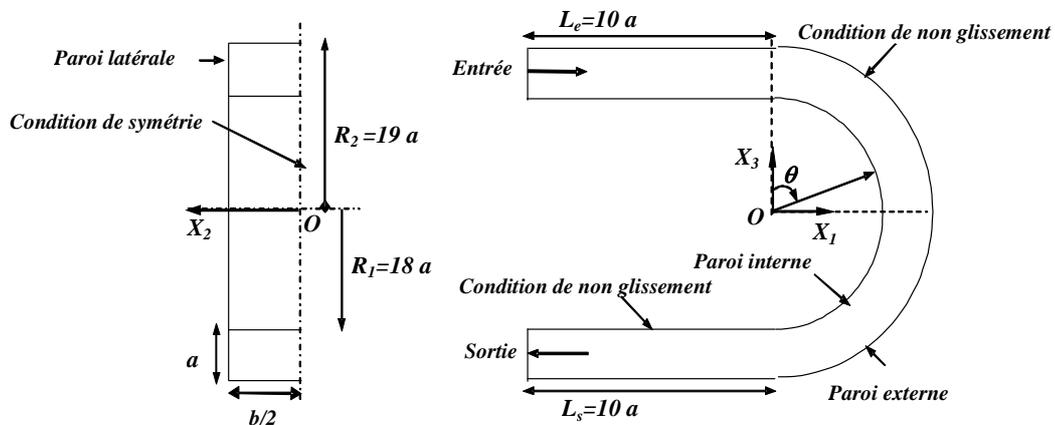


Fig. 2. Géométrie de la conduite d'écoulement.

Un maillage non uniforme est utilisé: 95 nœuds dans la direction de l'écoulement (maillage cartésien de 10 noeuds sur chacun des canaux droits, un maillage polaire de 75 nœuds sur le canal courbe), le maillage sur la section d'écoulement est variable selon le rapport d'aspect, il est composé de J nœuds sur la largeur et K nœuds sur la hauteur, les données sont groupées dans le tableau 1. Un profil de Poiseuille est imposé à  $u$  à l'entrée de la conduite. La condition de non glissement est imposée sur les parois, et une condition de symétrie est utilisée le long du plan médian de la conduite.

### 5. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Les contours de la fonction de courant (qui matérialisent les vortex de Dean) sur la section transversale située à la position angulaire 180° (section d'écoulement située à la fin du tronçon courbe de la conduite d'écoulement) sont présentés pour différentes valeurs de  $D_n$  allant de 50 à 500, et pour des rapports d'aspect  $A_r$  respectivement de 1 et 2, 4, 8 et 12. Les vortex de Dean à la position angulaire 180° sont présentés pour différentes valeurs du nombre de Deborah  $D_e$ .

#### 5.1. Effets de l'inertie

Les figures 3, 4, 5 et 6 montrent que: Pour les nombres de Dean relativement faibles  $D_n \leq 100$ , l'écoulement secondaire se traduit par l'apparition d'une seule paire de vortex, pour toutes les valeurs du rapport d'aspect  $A_r$ . a  $D_n = 150$ , des vortex additionnels apparaissent pour le rapport d'aspect  $A_r = 1$  et pour le rapport d'aspect  $A_r = 12$ , pour les autres sections ( $A_r = 2, 4$  et 8), le régime à deux vortex persiste. Pour les nombres de Dean élevés  $D_n > 150$  les vortex additionnels apparaissent pour toutes les valeurs de  $A_r$ . On remarque l'apparition de plusieurs paires de vortex additionnels,

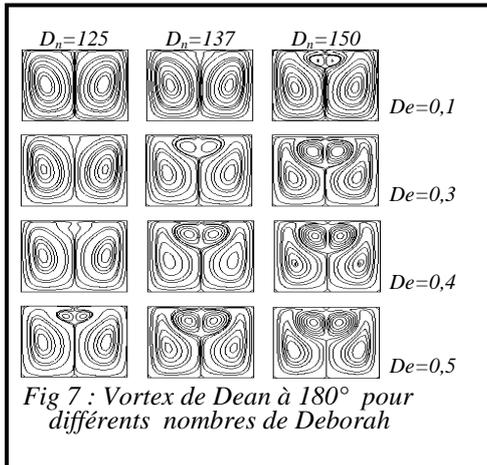
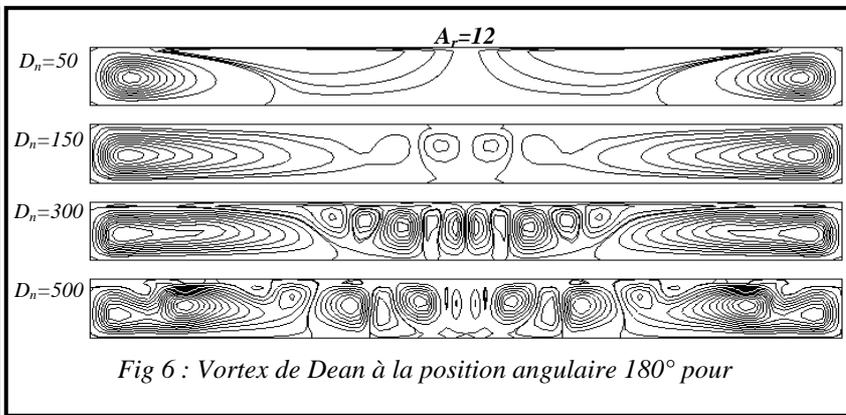
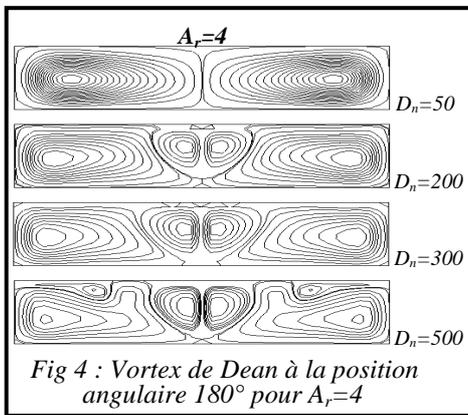
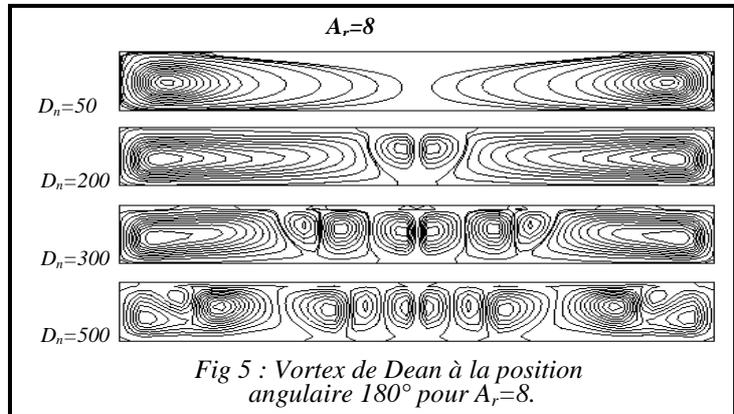
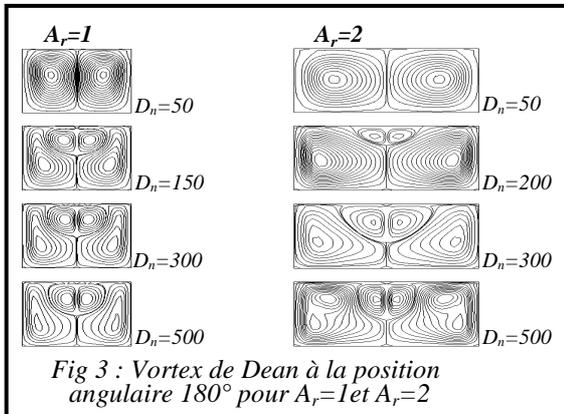
[(4 paires de vortex à  $D_n=300$  et  $A_r=8$ ), (5 paires de vortex à  $D_n=500$  et  $A_r=8$ ), (6 paires de vortex à  $D_n=300$  et  $A_r=12$ ), (7 paires de vortex à  $D_n=500$  et  $A_r=12$ )].

### 5.2. Effet du rapport d'aspect

Les figures, 3, 4, 5 et 6, montrent l'influence du rapport d'aspect  $A_r$  sur la structure de l'écoulement secondaire, en effet, pour  $A_r=1$ ,  $A_r=2$  et  $A_r=4$ , on observe l'apparition d'une seule paire de vortex additionnels au delà d'un nombre de Dean critique, et que seulement au delà de  $D_n=500$ , qu'il est possible de voir d'autres vortex se former. Pour  $A_r=8$  et  $A_r=12$  (sections d'écoulement rectangulaires à fort et moyen allongement), plusieurs paires de vortex de Dean apparaissent pour les nombre de Dean relativement élevés (allant jusqu'à 6 ou 7 paires de vortex).

### 5.3. Effets de la viscoélasticité

L'effet de la viscoélasticité est étudié pour une section d'écoulement carrée ( $A_r=1$ ), les calculs sont faits pour des nombres de Deborah  $De$ , allant de 0,1 à 0,5. La figure 7, montre qu'en augmentant le nombre de Deborah pour un nombre de Dean fixé, les vortex de Dean apparaissent et deviennent plus intenses et plus grands, ce qui confirme l'idée que la viscoélasticité favorise l'apparition des vortex de Dean dans l'écoulement.



$A_r$	1	2	4	8	12
J x K	1 6 x 3 1	1 6 x 3 1	2 0 x 2 1	3 0 x 2 1	4 0 x 2 1
I x J x K	95x16x31	95x16x31	95x20x21	95x30x21	95x40x21

Tableau 1. Maillage utilisé en fonction du rapport d'aspect

## CONCLUSION

L'étude numérique montre clairement l'influence de l'inertie, du rapport d'aspect et de la viscoélasticité, sur la structure de l'écoulement secondaire au sein d'un fluide viscoélastique, obéissant au modèle de Phan-Thien-Tanner, s'écoulant dans une conduite courbe à section rectangulaire. Le développement des vortex de Dean est lié simultanément aux paramètres géométriques et aux paramètres de l'écoulement, la viscoélasticité joue un rôle favorisant à l'anticipation et à l'intensification des vortex de Dean. D'autres travaux peuvent compléter la présente étude, tels que l'exploration des écoulements à faibles Reynolds, les conduites à grand rayon de courbure et éventuellement d'autres formes de la section d'écoulement.

## 6. RÉFÉRENCES

- [1] W. R. Dean, *Fluid motion in a curved channel*, *Proc. R. Soc. Lond. A121*, 402-420, 1928.
- [2] S. A. Berger, L. Talbot, L. S. Yao, *Flow in curved pipes*, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 15, 1983, 461-512.
- [3] H. Ito, *Theory on laminar flow through curved pipes of elliptic and rectangular cross-section*, *Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ. Sendai Japan, Vol. 1*, pp 1-16, 1951.
- [4] K. C. Cheng, M. Akiyama, *Laminar forced convection heat transfer in curved rectangular channels*, *Int. J. Heat Mass Transfer* 13, 471-490, 1970.
- [5] T. T. Chandratilleke, Nursubyakto, *Numerical prediction of secondary flow and convective heat transfer in externally heated curved rectangular ducts*, *Int. J. Thermal Sci.*, 42, 187-198, 2003.
- [6] P. M. Ligrani, R. D. Niver, *Flow visualization of Dean vortices in a curved channel with 40:1 aspect ratio*, *Phys. Fluids* 31, 3605-3617, 1988.
- [7] H. Fellouah, C. Castelain, A. Ould El Mokhtar, H. Peerhossaini, *A criterion for detection of the onset of Dean instability in Newtonian fluids*, *European J. of Mech. B/Fluids* 25 505-531, 2006.
- [8] W. Jitchote, A. M. Robertson, *Flow of second order fluids in curved pipes*, *J. Non-Newtonian fluid Mech.* 90, 2000, 91-116.
- [9] N. Phan-Thien, R. Zheng, *viscoelastic flow in a curved channel: A similarity solution for the Oldroyd-B fluid*, *J. of Applied Mathematics and Physics*, vol. 41, 1990, 766-781.
- [10] Y. L. Joo, E. S. G. Shaqfeh, *Viscoelastic Poiseuille flow through a curved channel: A new elastic instability*, *Phys. Fluids A*, vol. 3, No. 9, 1991, 2043-2046.
- [11] Y. L. Joo, E. S. G. Shaqfeh, *The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor-Couette flow instabilities with application to coating flows*, *Phys. of Fluids A* 4, 11:2415-2431, 1992.
- [12] M. Boutabaa, L. Helin, G. Mompean, L. Thais, *Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross section*, *C. R. Mecanique*, 337, 2009, 40-47.
- [13] L. Helin, L. Thais, G. Mompean, *Numerical simulation of viscoelastic Dean vortices in a curved duct*, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 156, 2009, 84-94.
- [14] N. Phan-Thien, *A nonlinear network viscoelastic model*, *J. Rheol.*, 22, 259-283, 1978.
- [15] S. B. Pope, *The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates*, *J. Comp. Phys.*, 26, 197-217, 1997.
- [16] L. Thais, L. Helin, G. Mompean, *Numerical simulation of viscoelastic flows with Oldroyd-B constitutive equation and novel algebraic stress models*, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 140 (2006) 145-158.
- [17] B. P. Leonard, *A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 19, 59-98, 1979.
- [18] D. Rajagopalan, R. A. Brown, R. C. Armstrong, *Finite element methods for calculation of steady viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity of state*, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 36, 159-199, 1990.
- [19] F. H. Harlow, J. E. Welch, *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface*, *Phys. Fluids*, 8, 2182-2189, 1965.