

# Focalisation d'ondes de surface et déferlement

G. Ruiz-Chavarria<sup>a,b</sup>, M. Le Bars<sup>b</sup>, P. Le Gal<sup>b</sup>, Y. Pomeau<sup>c</sup>

a. *Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de Mexico, Ciudad Universitaria, 04510 MEXICO D.F.*

b. *Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre, Technopôle de Château-Gombert, 49 Rue Joliot-Curie, 13384 MARSEILLE Cedex 13*

c. *Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, 75231 PARIS Cedex 05*

## Résumé :

*Cette étude expérimentale et numérique s'intéresse aux processus de focalisation spatiale d'ondes de surface générées par un batteur de forme parabolique. Selon un mécanisme de focalisation bien connu en optique ondulatoire, l'amplitude des vagues augmente fortement au voisinage du cusp de Huygens, pouvant même aboutir à un déferlement local. Les lois d'échelle déterminées théoriquement sont vérifiées dans une expérience modèle de laboratoire et par des simulations 2D. Ce mécanisme pourrait constituer une explication générique du déferlement en eau profonde au voisinage des caustiques.*

## Abstract :

*In this experimental and numerical study the process of spatial focusing of surface waves generated by a parabolic wavemaker is investigated. According to a focalization mechanism well-known in wave optics, the wave amplitude increases sharply near the cusp of Huygens, which may even lead to a local wave breaking. The theoretical scaling laws are verified in a laboratory model experiment and in 2D simulations. This mechanism could provide a generic explanation of the wave breaking in deep water in the vicinity of caustics.*

**Mots clefs :** déferlement, caustiques, ondes de surface

## 1 Introduction

Le déferlement des vagues est un phénomène bien connu. Il se produit notamment près des côtes par la diminution de la profondeur de l'océan jusqu'à une valeur inférieure à la moitié de la longueur d'onde. Nous ne nous intéresserons pas ici à ce type de déferlement bathymétrique mais au déferlement en profondeur constante, voire infinie, pouvant se produire par focalisation spatiale [1], [2] ou temporelle [3]. Une méthode pour produire une focalisation spatiale en laboratoire est de générer des ondes de surface à l'aide d'un batteur dont la forme dans le plan horizontal est parabolique. Si nous considérons en première approximation que les lois de l'optique géométrique sont valables, alors l'amplitude des vagues va croître jusqu'à devenir infinie le long d'une courbe que l'on appelle le Cusp de Huygens. En réalité, l'optique géométrique n'est qu'une approximation et le caractère ondulatoire des ondes se révèle pleinement empêchant la divergence de l'amplitude du train d'ondes. Le seul cas où la théorie ondulatoire prédit une amplitude infinie est celui d'un batteur de forme circulaire car dans ce cas tous les rayons convergent vers un seul point. A titre d'exemple, ce cas sera calculé et présenté dans la suite. Dans ce manuscrit, des résultats préliminaires concernant la focalisation et la croissance de l'amplitude d'ondes de surface, leurs déferlements ainsi que l'extension spatiale de ce dernier dans la direction perpendiculaire à la propagation des vagues seront présentés. Les vagues de gravité générées à l'aide du batteur parabolique possèdent une longueur d'onde comprise entre 0.1 m et 1.55 m qui correspondent à des fréquences entre 1 et 4 Hz. D'autre part, une simulation numérique a été réalisée dans l'approximation d'eau peu profonde. La hauteur de la surface libre est une fonction des deux

variables spatiales (direction de propagation  $Y$  et direction latérale  $X$ ) et du temps. Une méthode de résolution en coordonnées polaires ( $r, \theta$ ) a été choisie afin de profiter de la périodicité de la variable angulaire qui permet l'utilisation d'une méthode spectrale de Fourier pour la coordonnée  $\theta$ , tandis que pour les variables  $r$  et  $t$ , un schéma de différences finies de deuxième ordre est implanté. Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, le dispositif expérimental est décrit et des résultats préliminaires concernant la position du déferlement ainsi que son extension latérale (i.e. perpendiculairement à la propagation des vagues) sont présentés. Dans la section 3, la méthode numérique est décrite. On montre en particulier que la prise en compte des termes non linéaires ne modifie pas la vitesse de propagation des ondes. Par contre, l'amplitude des vagues croît au fur et à mesure qu'elles se rapprochent du cusp de Huygens. Les crêtes deviennent alors plus raides par rapport au cas purement linéaire. Finalement, nous présenterons en section 4 les conclusions de cette recherche.

## 2 Déferlement des vagues. Résultats expérimentaux préliminaires

La partie expérimentale a été réalisée dans un bassin de longueur 4m selon la direction de propagation  $Y$ , de largeur 1 m selon la direction latérale  $X$ , et de profondeur 1 m. Les ondes de surface sont produites par un batteur de forme parabolique situé à une extrémité du bassin. Afin de réduire les réflexions aux bords, une bande de mousse de polyester a été disposée sur les parois verticales du bassin. En outre, à l'extrémité opposée au batteur, une plage en plexiglas a été installée avec le même but. Le batteur a été découpé dans un panneau de polystyrène de 10 cm d'épaisseur. Sa forme dans le plan horizontal est déterminée par la parabole  $y = ax^2$  où le paramètre  $a$  vaut ici  $1 \text{ m}^{-1}$ . La largeur totale du batteur selon l'axe  $x$  est égale à 0.9 m, c'est à dire  $-0.45\text{m} < X < 0.45\text{m}$ . Notons que l'approximation d'eau profonde est pleinement vérifiée pour une couche d'eau de profondeur 50 cm quand la longueur d'onde des vagues est inférieure à 1.18 m. Cette condition correspond à une fréquence d'émission  $\nu > 1.15 \text{ Hz}$ . Le batteur est actionné par un moteur de puissance 800 watts muni d'un réducteur. Le contrôle de la fréquence se fait par un programme écrit en LabView. Il est guidé par quatre barres verticales et son mouvement vertical purement sinusoïdal est obtenu par la rotation d'un disque excentré qui le pousse périodiquement dans l'eau. Afin que le disque reste toujours en contact avec le batteur quatre ressorts de rappel sont rajoutés au dispositif. Les amplitudes d'oscillation du batteur prennent des valeurs allant de 1 à 10 cm qui vont permettre d'étudier les différents régimes de focalisation avec et sans déferlement. Afin de visualiser la forme de la surface libre nous avons choisi d'éclairer un plan vertical ( $X = \text{cte}$ ) à l'aide d'un laser d'une puissance maximale de 6 watts. Le faisceau est tout d'abord focalisé à l'aide d'une lentille sphérique puis une nappe est produite par une lentille cylindrique. Des mesures ont été faites sur différents plans avec le but de déterminer l'apparition et l'évolution du déferlement.

Dans l'approximation de l'optique géométrique, une vague dont le front d'onde initial est parabolique se focalise à l'intérieur d'un domaine délimité par le cusp de Huygens. En effet, à un instant donné, certains points de l'espace sont atteints par un unique rayon alors que d'autres le seront par 3. La courbe qui sépare les deux régions est connue sous le nom de Cusp de Huygens (voir figure 1). L'équation de cette courbe est donnée par[4] :

$$X = \pm \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{3}} \left( Y - \frac{1}{2a} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

La position de l'origine du cusp de Huygens est  $Y = \frac{1}{2a}$ . Dans notre expérience ce point se trouve à 0.5 m de la parabole. L'évolution de la vague, après sa génération par le batteur, est suivie à l'aide d'une caméra vidéo rapide qui enregistre les images à une fréquence de 1000 Hz. La taille de chaque image est de 1024 x 1024 pixels. L'étude des différents régimes des vagues focalisées a été conduite en fonction de deux paramètres : l'amplitude du déplacement vertical du batteur et sa fréquence.

Il existe en général deux types de déferlement : le déferlement glissant et le déferlement plongeant. Au cours de nos expériences, nous avons observé uniquement des déferlements du premier type. La figure 2 présente une image de la surface libre où on voit clairement le processus de déferlement. Dans tous les cas étudiés, si le déferlement apparaît, il se produit au voisinage direct de l'origine du cusp, i.e., là où l'amplitude et donc la cambrure sont suffisamment grandes. Pour confirmer ce résultat nous avons

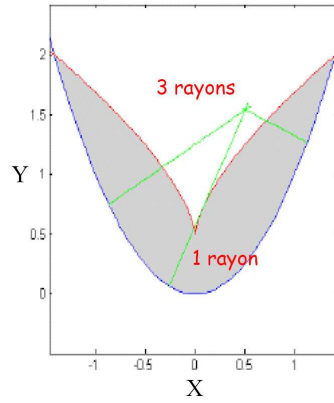


FIG. 1 – Parabole et Cusp de Huygens. La parabole représente le bord vertical du batteur qui oscille verticalement ; la région entre le cusp et la parabole est caractérisée par une augmentation de l’amplitude des ondes. C’est à l’intérieur de cette région que se produit le déferlement. Au delà du cusp, dans la direction Y de propagation, l’amplitude des vagues décroît.

également réalisé des simulations numériques.

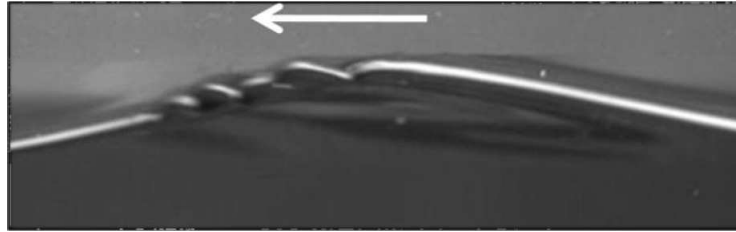


FIG. 2 – Déferlement d’une vague dans notre installation expérimentale. Le batteur se trouve à droite de l’image et la vague se propage vers la gauche. Le déferlement observé est de type glissant et il est intervenu avant que la vague n’arrive à son maximum d’amplification au cusp de Huygens qui se trouve quelques centimètres à gauche de la photographie.

### 3 Simulation numérique de la focalisation d’ondes d’eau peu profonde émises par un batteur parabolique

Dans cette section, nous considérons une couche de fluide dont l’épaisseur est  $h = H + \eta$ , où  $H$  est la profondeur de la couche non perturbée et  $\eta$  est la perturbation par rapport à cette position d’équilibre. Les équations de la dynamique de fluides, dans l’approximation d’une couche d’eau peu profonde ( $H \ll \lambda$ ), sans viscosité et en coordonnées polaires, sont les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -g \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} = -\frac{g}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r\eta u)}{\partial r} + \frac{\partial (\eta v)}{\partial \theta} \right) = -\frac{H}{r} \left( \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

L’équation de continuité ainsi que la condition cinématique à l’interface ont été utilisées afin de déduire l’équation de la hauteur de la surface libre. A titre d’exemple, nous pouvons tout d’abord illustrer la

focalisation des ondes en géométrie cylindrique, où l'énergie se concentre en un seul point au centre du cercle émetteur. Si les termes non linéaires sont négligés et la dépendance en  $\theta$  n'est pas prise en compte, nous obtenons un système de deux équations linéaires :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{H}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

qui nous amène finalement à une équation d'onde :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) - \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Une première conclusion est que la vitesse de phase est constante et égale à  $c = \sqrt{gH}$ , ce qui est bien connu dans la théorie des ondes de gravité. D'autre part, le phénomène est non dispersif ce qui marque une différence par rapport à la théorie générale des ondes de surface linéaires, où la vitesse de phase est égale à

$$c = \frac{g}{k} \sqrt{\tan(kh) \left( 1 + \gamma \frac{k^2}{g} \right)} \quad (8)$$

La solution analytique de l'équation (7) pour une perturbation qui se produit à une distance  $r$  de l'origine s'exprime en terme des fonctions de Bessel :

$$\eta(r, t) = J_0(kr) \cos(\omega t) + Y_0(kr) \sin(\omega t) \quad (9)$$

Il s'agit bien comme escompté, d'une onde progressive qui se déplace vers l'origine des coordonnées. Comme on l'avait remarqué, l'amplitude de la vague tend vers l'infini quand elle se rapproche de l'origine du cusp. Loin de l'origine des coordonnées l'amplitude de l'onde est proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ . En général (sans la symétrie cylindrique évoquée auparavant) le problème que nous désirons résoudre numériquement dépend de deux variables spatiales et du temps. Une différence par rapport au problème de l'évolution réelle des vagues de gravité provient du caractère dispersif de leur propagation. Cette propriété qui n'est pas présente dans l'approximation d'eau peu profonde n'est cependant pas un élément pertinent du processus de focalisation car nous ne considérons qu'un train d'onde monochromatique dont la fréquence est fixée. D'autre part, en 2D il est impossible d'arriver au processus de déferlement car  $\eta$  devient multivalué. Cependant, la solution numérique de ce problème simplifié nous apportera une connaissance des interactions non linéaires (hors interaction entre différentes orientations du vecteur d'onde) quand les vagues se focalisent. Pour adimensionner le système d'équations nous utilisons comme longueur caractéristique l'épaisseur de la couche  $H$  et comme vitesse représentative  $U = \sqrt{gH}$ .

Nous avons choisi une méthode spectrale pour la coordonnée  $\theta$ , tandis que pour  $r$  et  $t$  une méthode de différences finies a été utilisée. Le schéma global d'intégration est celui d'Adams-Bashfort de deuxième ordre [5]. Le principal avantage d'une méthode spectrale basée sur les fonctions trigonométriques est l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT) et la possibilité d'une parallélisation presque immédiate. Le code numérique a été écrit en fortran 90 en utilisant des variables en double précision. La grille spatiale est constituée de  $256 = 2^8$  points pour la variable angulaire et de 300 points pour  $r$ . Le domaine d'intégration est  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et  $5 \leq r \leq 64$ . Afin de pouvoir considérer les interactions non linéaires entre les ondes avant le cusp de Huygens et les interférences à l'intérieur de celui-ci, nous avons choisi de placer l'origine du cusp à la position  $r=45$  et  $\theta = 0$ . Pour l'intégration temporelle nous avons sélectionné un pas  $dt=0.002$ .

En ce qui concerne les conditions à la frontière, nous considérons que le batteur produit une perturbation purement sinusoïdale d'une amplitude  $\eta_0$  et que celui-ci reste à l'extérieur du domaine d'intégration. En fait le batteur est situé à une position où ses deux extrémités sont en contact avec la

frontière extérieure à  $r=64$ , sur la droite du domaine de calcul. Ainsi, afin de déterminer la condition sur le cercle extérieur de rayon  $r=64$ , on fait l'hypothèse que pendant le parcours de la vague entre le batteur et le rayon extérieur, la théorie linéaire de propagation des ondes reste valable. Cette hypothèse est une bonne approximation car à ce stade les termes non linéaires ont une très faible influence. Finalement, la condition initiale correspond à une surface libre sans déformation. La simulation a été réalisée sur une machine avec deux processeurs Xeon et sur un ordinateur muni d'un processeur Core2 Duo. Afin de comparer la solution avec le cas d'une onde linéaire, le système d'équation (6)-(8) a également été résolu sans les termes non linéaires. Le premier résultat montre que la vitesse de phase n'est pas modifiée par les termes non linéaires, celle-ci reste toujours égale à  $c=1$ . Sur la figure 3, la croissance de la vague est présentée sur l'axe de symétrie de la parabole ( $X=0$ ) et  $t=52$  dans le cas linéaire. La vague se déplace du batteur situé à droite vers la gauche et la hauteur de la surface libre augmente au cours de la propagation pour atteindre une valeur maximale près de  $r=45$  où se trouve l'origine du cusp. Ensuite, l'amplitude diminue et est le siège d'oscillations provenant d'interférences. Quand  $r \rightarrow \infty$  la longueur du front d'onde diverge et l'amplitude des ondes décroît. Il est important de noter que dans le cadre de la théorie linéaire, le rapport  $\frac{\eta}{\eta_0}$  est indépendant de  $\eta_0$ . Finalement il faut signaler que la valeur maximale de ce rapport est d'environ 5.

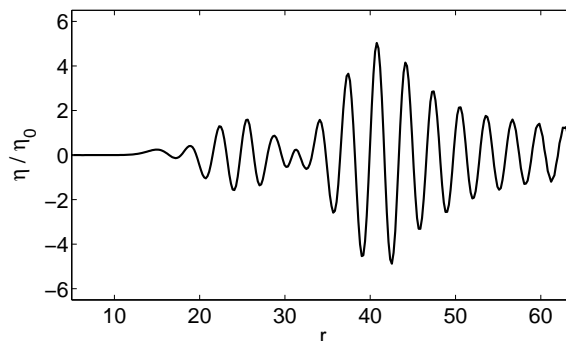


FIG. 3 – Hauteur de la vague  $\frac{\eta}{\eta_0}$  en fonction de  $r$  sur l'axe de symétrie ( $X = 0$ ) de la parabole. Solution linéaire. La vague croît jusqu'à atteindre la valeur  $\eta = 5\eta_0$  au voisinage du cusp en  $r = 45$ . L'enveloppe est décrite par une fonction d'Airy.

La figure 4 montre le rapport  $\eta/\eta_0$  en fonction de  $r$  pour le cas non-linéaire. On a choisi  $\eta_0 = 0.02$ . La comparaison avec la figure 3 montre que la valeur maximale est d'environ 30 % plus grande par rapport à la théorie linéaire. En outre, on peut constater une asymétrie de la surface libre par rapport à  $\eta = 0$ . Les crêtes sont plus pointues que les creux. Ce comportement est en accord avec la conservation de l'énergie car dans les deux cas (linéaire et non linéaire) l'énergie injectée est la même.

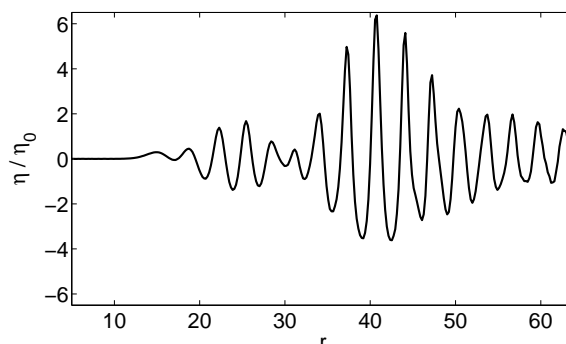


FIG. 4 – Hauteur de la vague  $\frac{\eta}{\eta_0}$  en fonction de  $r$  sur l'axe de symétrie ( $X = 0$ ) de la parabole. Solution non linéaire. La valeur maximale de  $\eta/\eta_0$  est égale à 6.5, ce qui est 30% plus grand que dans le cas linéaire. D'autre part, les crêtes sont plus pointues

La figure 5 montre l'évolution de  $\eta$  dans le plan horizontal (X,Y) pour les mêmes conditions que la figure 4. Les valeurs maximales sont situées près du cusp de Huygens dont nous reconnaissons la forme caractéristique. Il y a cependant des régions où des mécanismes d'interférence produisent des maxima locaux.

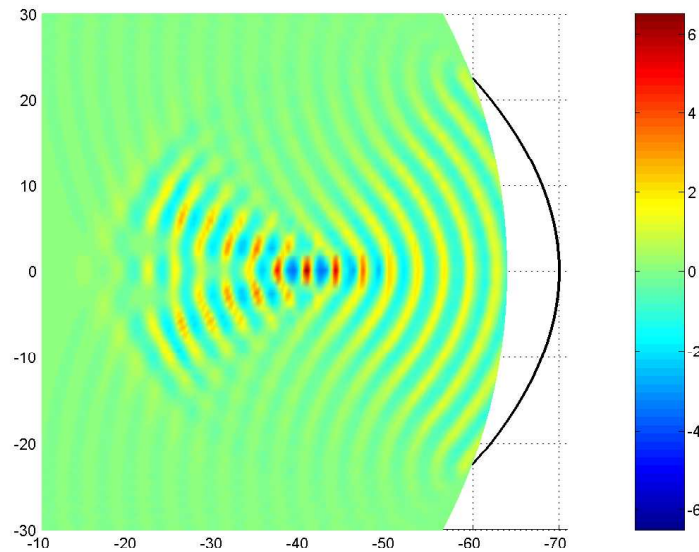


FIG. 5 – Hauteur de la vague  $\frac{\eta}{\eta_0}$  dans le plan (X,Y). L'échelle de couleurs est présentée à droite. L'augmentation de l'amplitude près du cusp est parfaitement visible tout comme des maxima locaux produits par des interférences entre ondes.

## 4 Conclusions

Dans ce manuscrit, le déferlement par focalisation spatiale a été étudié tant théoriquement qu'expérimentalement. Nous avons constaté que le déferlement se produit dans une région voisine du cusp du Huygens. Grâce à la simulation numérique nous avons réussi à reproduire le comportement de l'enveloppe de la vague qui s'exprime à l'aide de la fonction d'Airy (pour le cas linéaire). Quand les termes non linéaires sont pris en compte, une importante croissance de la crête de la vague est observée, ce qui conduit à des ondes plus pointues et au déferlement dans la réalité physique.

## Références

- [1] Pomeau Y 1990 Caustics on non linear waves and related questions *Europhys. Lett.* **11** 713-718
- [2] Fochesato C., Dias F.,Grilli S. 2005 Wave Energy Focusing in a Three-dimensional Numerical Wave Tank *Proceeding of the fifteen International Offshore and Polar Engineering Conference, Seoul, Korea, June 19-24*, ISBN 1-880653-64-8
- [3] Kharif C. and Pelinovsky E. 2003 Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon *Eur.J.Mech.B-Fluids* **22(6)** 603634
- [4] Zemenzer S. 2009 Etude expérimentale du déferlement des vagues en eau profonde par focalisation spatiale *Rapport de stage de M2* Université de la Méditerranée 45 pp.
- [5] Peyret R. 2010 Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow. Springer-Verlag, New York 432 pp.