

Instabilité elliptique sous champ magnétique

D. CEBRON, W. HERREMAN, M. LE BARS, S. LE DIZES, P. LE GAL, P. MAUBERT, G. VERHILLE

IRPHE, UMR 6594, CNRS et Aix-Marseille Universités, 49 rue Joliot Curie, 13013 Marseille

Résumé :

Nous présentons une approche théorique, expérimentale et numérique de la dynamique de l'instabilité elliptique dans un fluide tournant conducteur lorsqu'un champ magnétique est imposé le long de l'axe de rotation. Nous démontrons que le taux de croissance de l'instabilité et le carré de l'amplitude du champ induit diminuent linéairement avec le carré du champ appliqué. Une dynamique non-linéaire particulièrement riche est mise en évidence. Enfin, l'éventualité d'une dynamo par instabilité elliptique est discutée.

Abstract :

We present a theoretical, experimental and numerical approach of the dynamics of the elliptical instability in a rotating conducting fluid when a magnetic field is imposed along the rotation axis. We show that the growth rate of the instability and the square of the amplitude of the induced field decrease linearly with the square of the applied field. A particularly rich non-linear dynamics is highlighted. Finally, the possibility of a dynamo by elliptical instability is discussed.

Mots clefs : instabilité elliptique, induction, dynamo

1 L'instabilité elliptique

L'instabilité elliptique est une instabilité générique des fluides en rotation qui apparaît dès que les lignes de courant de l'écoulement sont déformées elliptiquement. Une telle déformation peut venir par exemple de l'interaction entre tourbillons ou bien d'effets de marées en géo- et astrophysique. L'instabilité elliptique est due à un mécanisme de résonance paramétrique entre le forçage elliptique et deux ondes inertielles du fluide en rotation, qui correspondent aux modes propres de l'écoulement tournant, habituellement amortis par les effets visqueux. L'instabilité se produit lorsque les caractéristiques des deux ondes complètent parfaitement celles du forçage, permettant une résonance triadique suffisamment forte pour mettre en mouvement le fluide en dépit des forces visqueuses qui s'y opposent. Un écoulement tridimensionnel se met alors en place, dont la forme dépend des ondes inertielles excitées. A condition que le nombre d'Ekman E de l'écoulement (qui caractérise l'intensité des effets visqueux par rapport à la rotation) soit suffisamment faible, cette résonance génère une forte turbulence tridimensionnelle, même si l'excentricité ε à l'origine de l'instabilité est relativement faible. Nous avons procédé à l'étude systématique de cette instabilité à l'aide de dispositifs expérimentaux dans lesquels un conteneur de forme cylindrique ou sphérique est mis en rotation et déformé elliptiquement par deux rouleaux symétriques. Ces études expérimentales ont été complétées par des études analytiques et numériques. Notre objectif principal est de mieux appréhender l'importance de l'instabilité elliptique dans l'organisation des mouvements dans les enveloppes fluides des étoiles et des planètes. Bien sûr, le modèle étudié en laboratoire est toujours grandement simplifié par rapport aux situations naturelles : nous nous sommes donc attachés à prendre progressivement en compte les diverses complexités planétaires et stellaires. La présente contribution porte ainsi sur le développement de l'instabilité elliptique dans un fluide conducteur. Deux questions primordiales à l'échelle géo-/astro-physique sont abordées : tout d'abord, quel est le comportement de l'instabilité en présence d'un champ magnétique imposé parallèlement à l'axe de rotation, créé par exemple par une dynamo convective dans un noyau planétaire ? Et par ailleurs, l'instabilité elliptique est-elle capable à elle seule, d'entretenir une dynamo, et d'expliquer ainsi la présence surprenante d'un champ magnétique autoentretenu dans Ganymède ou dans la lune primitive ?

2 Etude expérimentale

2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental « Imagine » (une abréviation pour « Instabilité MAGnéto INertielle ») a été spécialement conçu pour étudier l'évolution non linéaire de l'instabilité elliptique sous champ magnétique (figure 1). Il est semblable au dispositif classique d'étude de l'instabilité elliptique développé tout d'abord par Malkus [1], et utilisé par notre groupe depuis plusieurs années [e.g. 2, 3]. La nouveauté réside dans l'utilisation des effets magnétiques pour détecter les mouvements dans le métal liquide en vertu de l'application d'un champ magnétique homogène aligné le long de l'axe de rotation. En effet, les ondes inertielles excitées par l'instabilité elliptique sont accompagnées par des champs magnétiques induits, qui sont détectés en dehors du cylindre par des sondes à effet Hall de grande sensibilité. Le fluide conducteur utilisé est du Galinstan, un eutectique de gallium-indium-étain liquide à température ambiante. Le fluide est contenu dans un récipient cylindrique déformable (voir «1» sur la figure 1) avec un rayon intérieur $R = 25 \pm 0.5 \text{ mm}$ et une hauteur H qui peut être ajustée entre 120 et 160 mm. Le cylindre tourne à une vitesse angulaire Ω entre 0 et 5 Hz. L'excentricité de la déformation elliptique peut être modifiée lors de l'expérience dans l'intervalle $[0 ; 0.3]$. Le cylindre est monté entre deux bobines de Helmholtz refroidies à l'eau (voir «3» sur la figure 1) et alimentées par une alimentation continue stabilisée. Nous pouvons imposer l'intensité B_0 du champ dans l'intervalle $[0 ; 0.12] \text{ T}$. L'amplitude typique du champ induit par l'instabilité est de l'ordre d'un dix millième de B_0 . Par conséquent, des sondes à effet Hall très sensibles sont utilisées, avec un filtrage systématique de la composante constante du champ qui correspond à la composante verticale imposée. Le signal restant est ensuite amplifié par un facteur 100 à 200 et filtré par un filtre passe-bas, avant d'être enregistré par l'unité d'acquisition de données.

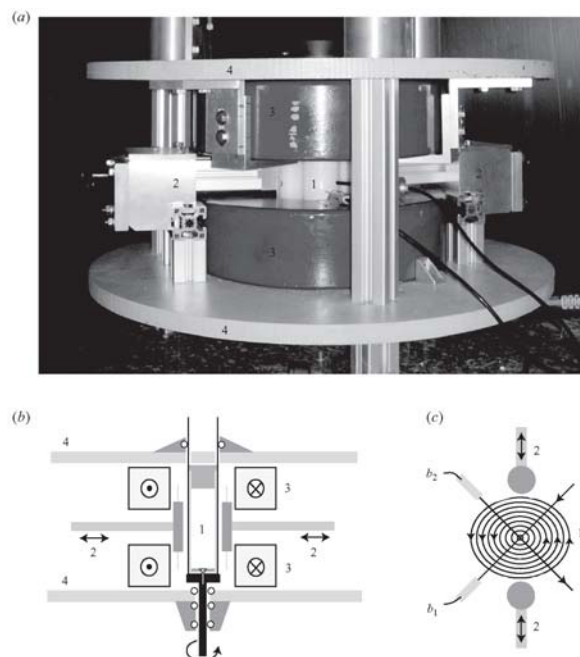


FIG. 1 – (a) Photographie et (b, c) représentations schématiques du dispositif Imagine, vu respectivement de côté et de dessus. (1) Cylindre (ou sphère) déformé elliptiquement, rempli de Galinstan. (2) Rouleaux pour déformation elliptique. (3) Bobines de Helmholtz. (4) Plaques de fer. Les sondes à effet Hall b_1 et b_2 sont placées dans le plan équatorial et mesurent les composantes radiales du champ dans les directions C et S.

2.2 Modération de l'instabilité elliptique par le champ magnétique imposé

Deux cas de figures se présentent suivant les valeurs du champ imposé B_0 . A champ faible, la force de Lorentz est insuffisante pour modifier l'instabilité elliptique. Dans ce cas, le champ magnétique induit par le mode instable est une simple image de l'hydrodynamique. En particulier, la croissance exponentielle du

mode de « spin-over » dans la sphère, i.e. le mode le plus simple de l'instabilité elliptique correspondant à une rotation solide inclinée par rapport à l'horizontale, a pu être mesurée en fonction de l'amplitude de la déformation elliptique à proximité du seuil de l'instabilité. Dans le cas où la force de Lorentz n'est plus négligeable, nous avons montré qu'une partie de l'énergie cinétique est dissipée sous forme d'effet Joule et ralentit donc la croissance de l'instabilité. La figure 2 compare l'évolution pour différents champs inducteurs, de l'intensité de l'instabilité obtenue par un modèle non linéaire (détaillé dans [4]) et par les mesures expérimentales. L'amortissement par freinage magnétique, d'amplitude génériquement égale à $-\Lambda/4$ pour tous les modes de l'instabilité [4, 5], où $\Lambda = \sigma B_0^2 / \rho \Omega$ est le nombre d'Elsasser de l'écoulement, est parfaitement visible et peut même inhiber l'instabilité à champ fort.

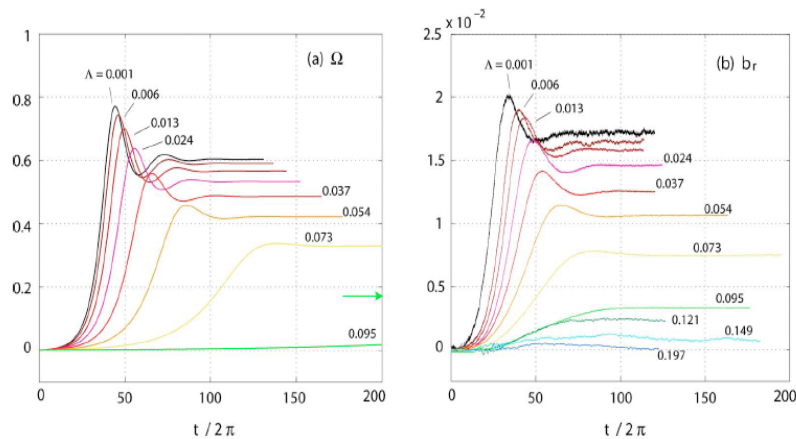


FIG. 2 – Comparaison pour différents champs magnétiques imposés (mesurés ici par le nombre d'Elsasser $\Lambda \sim B_0^2$), de l'évolution temporelle du spin-over. (a) Amplitude du mode $\Omega(t)$ calculée par un modèle non linéaire de l'instabilité elliptique (voir détails dans [4]) et (b) mesures expérimentales des champs induits b_r .

2.3 Dynamique non-linéaire

La figure 3 illustre la richesse de la dynamique non-linéaire de l'instabilité elliptique lorsque l'on s'éloigne de son seuil de stabilité, par exemple ici en décroissant progressivement le champ imposé. Pour des champs relativement forts ($\Lambda = 0.063$), la saturation a lieu le long d'une spirale dans le plan (b1, b2). Les trajectoires semblent quitter l'origine vers le bas, comme ce serait le cas pour une bifurcation supercritique. Pour un champ modérément fort ($\Lambda = 0.028$), la structure en spirale dans le plan (b1, b2) est toujours présente, mais le système ne sature plus et évolue lentement vers une modulation de cycle limite. Un changement radical est observé pour des champs plus faibles ($\Lambda = 0.016$) : après la croissance initiale le long d'une direction fixe dans le plan de phase, un changement soudain de direction est observé conduisant à un changement de signe des deux composants magnétiques. Après ce renversement, les champs magnétiques restent dans un domaine près d'un point fixe, avec de petites oscillations irrégulières. Pour un champ magnétique imposé faible ($\Lambda = 0.002$), les oscillations deviennent suffisamment grandes pour entraîner plusieurs inversions. Lorsque ces renversements se produisent, les champs magnétiques induits disparaissent presque complètement, de telle sorte qu'une phase de croissance linéaire peut de nouveau être observée.

2.4 Vers une dynamo synthétique...

Il est aujourd'hui irréaliste de construire une expérience de dynamo par instabilité elliptique. Mais une première étape est déjà en cours de développement sur la base du dispositif Imagine, permettant d'appréhender la richesse de la dynamique et des processus de saturation d'une telle dynamo. Dans ce modèle de dynamo «synthétique» (voir par exemple [6] pour une approche similaire dans la géométrie de von Kármán), une partie du cycle dynamo est générée par une source externe de rétroaction, mais l'écoulement chaotique entraîné par l'instabilité conserve un rôle majeur. Ainsi, à partir d'un champ magnétique vertical imposé le long de l'axe de rotation, nous mesurons le champ magnétique radial induit par l'instabilité de marées, qui, à son tour, contrôle l'intensité du champ magnétique vertical imposé, et

est donc capable de modifier l'écoulement. Par conséquent, cette expérience permet d'aborder certaines questions en suspens concernant la dynamique d'une dynamo de marées, en fonction du gain externe dans la boucle de rétroaction. Cette étude est aujourd'hui en cours, et les premiers résultats seront présentés cet été à Besançon.

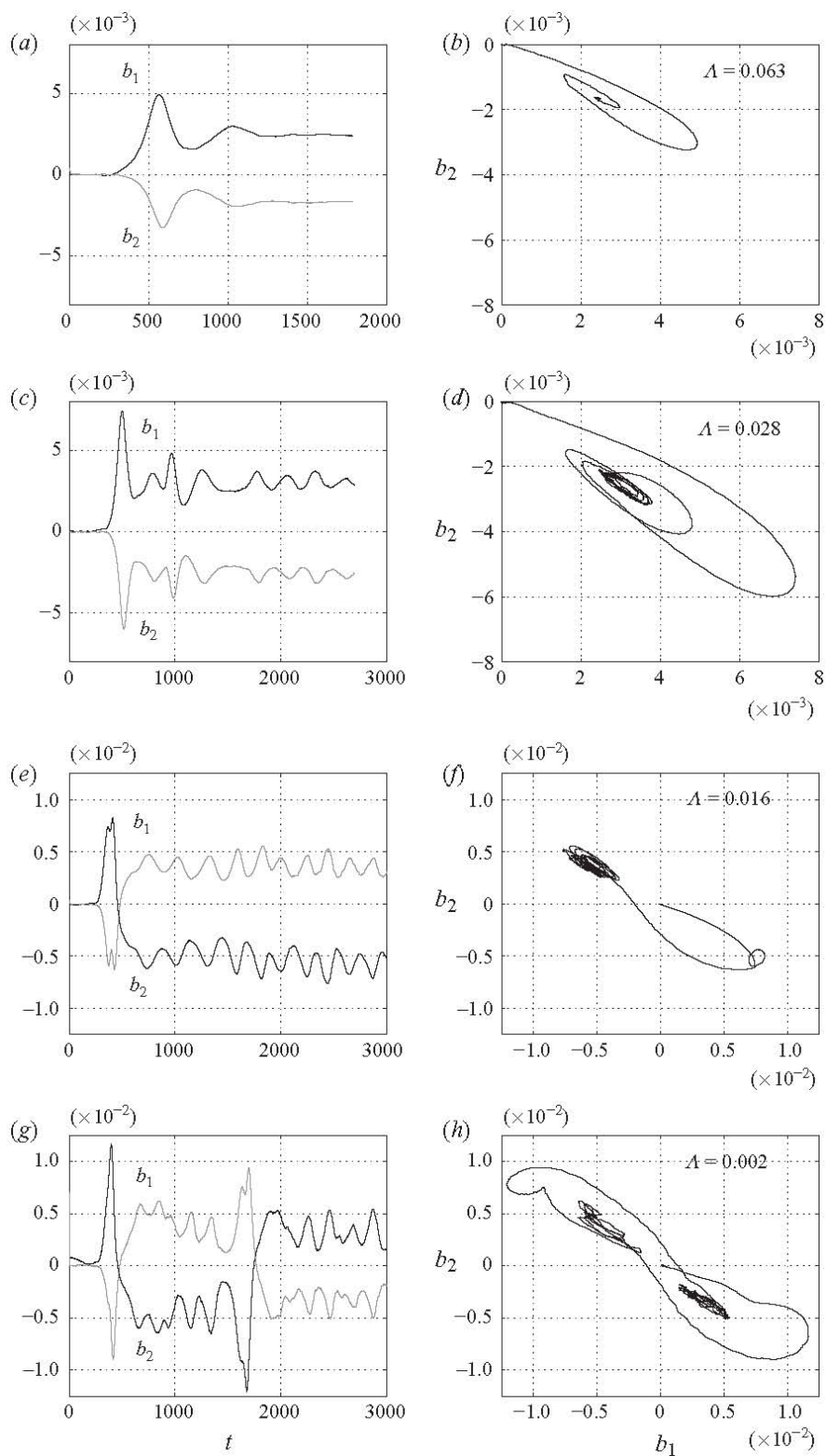


FIG. 3 – Exemples de séries temporelles des champs magnétiques b_1 et b_2 déterminées expérimentalement et diagrammes de phase correspondants pour différentes valeurs du nombre d'Elsasser Λ . Ici, le rapport d'aspect du cylindre vaut $h=148/25$, le nombre d'Ekman $E=1.58 \times 10^{-4}$ et l'excentricité $\varepsilon=0.15$.

3 Etude numérique

3.1 Méthode numérique et validations

Parallèlement à nos études expérimentales, nous avons développé une approche numérique de la magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique basée sur un code en éléments finis, en l'occurrence le code COMSOL Multiphysics. Cette approche nous permet de reproduire la géométrie exacte d'une planète déformée par les marées, la contrepartie étant que la résolution accessible à nos moyens numériques actuels reste relativement faible, en particulier lorsque nous essayons d'accéder à des petits nombres d'Ekman. Les aspects hydrodynamiques de notre modèle numérique ont été validés en comparant à nos résultats analytiques et expérimentaux, l'évolution du taux de croissance de l'instabilité en fonction des paramètres sans dimension [7]. Nous avons ensuite validé les aspects magnétiques du code en reproduisant l'étude d'induction de la section 2.2. Enfin, comme illustré sur la figure 4, nous avons étudié avec notre modèle la dynamo de Ponomarenko et son seuil, en excellent accord avec l'étude de Laguerre (2006) [8]. En conclusion, au vu de ces différents « benchmarks », nous pouvons aujourd'hui accorder une pleine confiance à notre outil numérique pour l'étude de l'ensemble des aspects magnétohydrodynamiques des effets de marées.

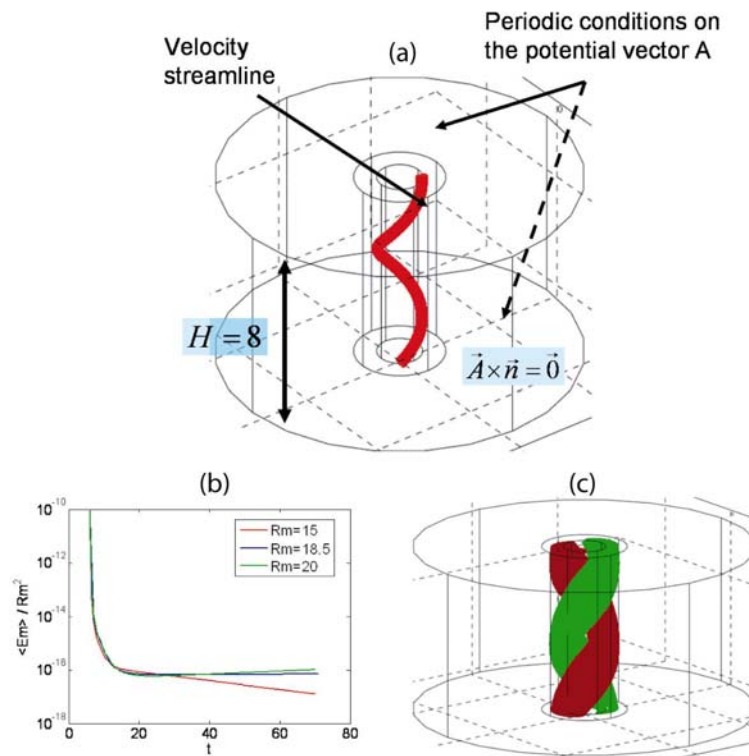


FIG. 4 – (a) Schéma du problème de dynamo Ponomarenko résolu par nos simulations numériques. Un écoulement hélicoïdal est imposé dans la région $r \leq 1$, le fluide est au repos dans la région $1 < r < 2$ et la région $2 \leq r \leq 8$ est isolante (voir [8] pour plus de détails). (b) Evolution temporelle de l'énergie magnétique pour différentes valeurs du nombre de Reynolds magnétique Rm . (c) Iso surfaces de la composante axiale du champ magnétique à $\pm 25\%$ du maximum pour $Rm=20$.

3.2 Vers une dynamo de marées...

Tout est donc réuni aujourd'hui pour démontrer l'existence d'une dynamo de marées. Nos calculs systématiques en fonction du nombre de Reynolds magnétique (basé sur la vitesse de rotation) semblent indiquer une convergence progressive vers un seuil à hauteur de $Rm \sim O(10^3)$. En particulier, pour le mode de spin-over, nous retrouvons les résultats de Tilgner (2005) [9] qui a étudié ce même mode, mais excité par un forçage de précession dans une sphère, au lieu d'un forçage de marées non axisymétrique. Le Reynolds

magnétique critique pour cet écoulement laminaire stationnaire est d'environ 7000. De plus, nous prévoyons un seuil beaucoup plus bas pour d'autres modes non stationnaires de l'instabilité de marées, par exemple $Rm \sim 1300$ pour un mode (1,3) [7] avec des conditions aux limites ferromagnétiques. Ce seuil demeure toutefois encore inaccessible à nos moyens numériques actuels. Heureusement, une version parallèle du logiciel COMSOL Multiphysics est disponible depuis le dernier trimestre 2010, et nous travaillons actuellement avec le CINES pour installer ce logiciel sur une machine massivement parallèle. La démonstration d'une dynamo de marées est donc imminente.

4 Conclusion

La magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique présente une richesse de comportements tout à fait surprenante, dont les implications à l'échelle planétaire et stellaire sont aujourd'hui encore à explorer. Ainsi, les inversions du champ induit par l'instabilité elliptique à partir d'un champ imposé le long de l'axe de rotation pourraient participer à l'explication de la complexité du signal magnétique enregistré sur Terre. La possibilité d'une dynamo par instabilité de marées reste aujourd'hui encore à démontrer, mais les études en cours tant au niveau expérimental que numérique, devraient rapidement aboutir à une réponse définitive.

References

- [1] Malkus, W. V. R. 1989 An experimental study of global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 48, 123–134.
- [2] Eloy, C., Le Gal, P. & Le Dizès, S. 2003 Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* 476, 357–388.
- [3] Le Bars, M., Le Dizès, S. & Le Gal, P. 2007 Coriolis effects on the elliptical instability in cylindrical and spherical rotating containers. *J. Fluid Mech.* 585, 323–342.
- [4] Herreman, W., Le Bars, M. & Le Gal, P. 2009 On the effects of an imposed magnetic field on the elliptical instability in spheroids. *Phys. Fluids* 21, 46602.
- [5] Herreman, W., Cébron, D., Le Dizès, S. & Le Gal, P. 2010 Elliptical instability in rotating cylinders: liquid metal experiments under imposed magnetic field. *J. Fluid Mech.* 661, 130–158.
- [6] Verhille, G., Plihon, N., Bourgoin, M., Odier, P. & Pinton, J.-F. 2010 Induction in a von Kármán flow driven by ferromagnetic impellers. *New J. Phys.* 12, 033006.
- [7] Cébron, D., Le Bars, M., Leontini, J., Maubert, P. & Le Gal, P. 2010 A systematic numerical study of the tidal instability in a rotating triaxial ellipsoid. *Phys. Earth Planet. Inter.* 182, 119–128.
- [8] Laguerre, R. 2006 Approximation des équations 3D de la magnétohydrodynamique par une méthode spectrale – éléments finis nodaux. *Comptes-rendus des Rencontres du Non-Linéaire*.
- [9] Tilgner, A. 2005 Precession driven dynamos. *Phys. Fluids* 17, 034104.