

Étude de schémas de Runge-Kutta semi-implicites pour la simulation des écoulements de paroi

F. Kremer, C. Bogey, C. Bailly

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
UMR CNRS 5509, Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully, France

Résumé :

Pour la simulation de problèmes impliquant un raffinement de maillage, deux algorithmes de Runge-Kutta semi-implicites sont développés afin de traiter de manière implicite l'intégration temporelle dans la direction raffinée et de manière explicite dans les autres directions, et ainsi relaxer la contrainte sur le pas de temps. On impose également aux schémas d'être peu diffusifs et peu dispersifs. Ces schémas peuvent ainsi être utilisés pour la simulation de problèmes multi-échelles comme les écoulements de couche limite turbulente compressible. Dans ce papier, l'algorithme et les premiers résultats obtenus pour un cas test acoustique sont présentés.

Abstract :

For the simulation of problems involving mesh refinement, two semi-implicit Runge-Kutta algorithms are developed in order to treat in an implicit way the time integration in refined direction and in an explicit way in other directions, so that constraint on the timestep can be relaxed. Low-diffusive and low-dispersive properties of the scheme are also imposed. Then, these schemes can be used for simulation of multiscale problems such as compressible turbulent boundary layer flows. Algorithm and first results for an acoustic test case are presented.

Mots clefs : Runge-Kutta semi-implicite ; faible dissipation et faible dispersion

1 Introduction

Les phénomènes physiques reproduits par la simulation aéroacoustique directe couvrent une large gamme d'échelles spatiales et temporelles [7], pour lesquelles des méthodes numériques spécifiques ont été développées au cours des vingt dernières années [3]. En particulier, plusieurs méthodes d'intégration temporelle ont été proposées par Hu *et al.* [2], Stanescu & Habashi [5] et Berland *et al.* [1]. Ces méthodes de type Runge-Kutta (RK) explicite ont la particularité de présenter une faible dissipation et une faible dispersion jusqu'à des fréquences proches de la fréquence de coupure imposée par le pas de temps. Toutefois, dans un calcul impliquant une paroi, l'apparition de très petites échelles spatiales dont la stabilité doit être assurée implique une sévère réduction du pas de temps. Une solution à ce problème est d'utiliser un schéma implicite, qui assure la stabilité des petites échelles tout en gardant un pas de temps important. Cependant, ce gain sur le pas de temps risque d'être annulé par la nécessité d'inverser des systèmes de très grande taille, comprenant les trois dimensions de l'espace, ce qui implique un temps de calcul excessivement long.

Il existe une solution intermédiaire qui consiste à combiner deux schémas, l'un explicite et l'autre implicite, ce dernier n'étant utilisé que pour l'intégration temporelle dans la direction où le maillage est le plus fin. Dans un calcul de couche limite, par exemple, on peut ne traiter implicitement que la dérivée des flux normale à la paroi. Le système est alors beaucoup plus rapide à inverser car il n'implique qu'une dimension de l'espace. Un de ces schémas dits semi-implicites développé par Zhong [8] a été utilisé pour la simulation aux grandes échelles d'une couche limite turbulente compressible par Suh *et al.* [6].

Dans ce papier, deux méthodes semi-implicites adaptées à l'aéroacoustique sont développées. Chacune de ces méthodes combine le schéma explicite RK46-Ber d'ordre 4 à 6 sous-étapes de Berland *et al.* [1] avec un schéma implicite à 6 sous-étapes. La méthode suivie pour le développement de ces schémas, ainsi que les caractéristiques obtenues en termes de stabilité et de précision sont présentées dans la section 2. Ces caractéristiques sont ensuite étudiées sur des cas test acoustiques fournis dans la section 3. La section 4 conclut l'étude menée sur ces schémas semi-implicites.

2 Développement de méthodes semi-implicites

La stratégie de développement des schémas s'inspire des travaux de Kennedy & Carpenter [4]. Ceux-ci expriment un schéma semi-implicite à s sous-étapes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_i &= u_n + \Delta t \sum_{j=1}^i a_{ij}^{[I]} f(u_j) + \Delta t \sum_{j=1}^i a_{ij}^{[E]} g(u_j) \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i^{[I]} f(u_i) + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i^{[E]} g(u_i) \end{aligned} \quad (1)$$

On peut remarquer qu'un sous-schéma spécifique est dédié à chacun des termes f et g . Dans nos travaux, les coefficients $(a_{ij}^{[E]}, b_i^{[E]})$ du sous-schéma explicite sont choisis égaux à ceux du schéma RK46-Ber d'ordre 4 à 6 sous-étapes de Berland *et al.* [1]. Un sous-schéma implicite d'ordre 4 est alors recherché, tel que l'erreur de couplage entre les deux sous-schémas soit d'ordre 3. Les coefficients $(a_{ij}^{[I]}, b_i^{[I]})$ sont donc soumis aux contraintes suivantes [4] (par souci de clarté, les contraintes (2) portant sur l'ordre 4 du sous-schéma implicite sont écrites sans l'exposant [I]) :

$$\begin{aligned} (O1) \quad \sum_{i=1}^s b_i &= 1 & (O2) \quad \sum_{i=1}^s b_i c_i &= \frac{1}{2} \\ (O3)a \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 &= \frac{1}{3!} & (O3)b \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{3!} \\ (O4)a \quad \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s b_i c_i^3 &= \frac{1}{4!} & (O4)b \quad \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j &= \frac{3}{4!} \\ (O4)c \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2 &= \frac{1}{4!} & (O4)d \quad \sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k &= \frac{1}{4!} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & b_i^{[I]} = b_i^{[E]} \\ (C3)a \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i^{[E]} c_i^{[E]} c_i^{[I]} - \frac{1}{3!} &= 0 & (C3)b \quad \sum_{i,j=1}^s b_i^{[E]} a_{ij}^{[E]} c_j^{[I]} - \frac{1}{3!} &= 0 \\ (C3)c \quad \sum_{i,j=1}^s b_i^{[E]} a_{ij}^{[I]} c_j^{[E]} - \frac{1}{3!} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

avec $c_i = \sum_{j=1}^i a_{ij}$ et $s = 6$. Les jeux de coefficients $(a_{ij}^{[E]}, a_{ij}^{[I]}, b_i)$ (avec $b_i = b_i^{[E]} = b_i^{[I]}$) obtenus constituent donc des schémas semi-implicites à 6 sous-étapes d'ordre 3, notés SIRK63 (SIRK signifiant Semi-Implicit Runge-Kutta). L'ordre 3 est lié au couplage entre les deux sous-schémas.

Dans ce travail, deux schémas de type SIRK63 ont été construits. Le premier schéma possède des propriétés de stabilité assez fortes. Il est donc noté SIRK63-S (S pour Stability). Le second schéma, noté SIRK63-A (A pour Accuracy), a été déterminé avec des contraintes supplémentaires pour améliorer la précision :

$$\begin{aligned} & c_i^{[I]} = c_i^{[E]} \\ (C4) \quad \sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij}^{[I]} a_{jk}^{[E]} c_k - \frac{1}{4!} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Le second schéma est toujours formellement d'ordre 3, mais les contraintes supplémentaires ont pour effet de diminuer l'amplitude des erreurs induites.

Dans les descriptions qui suivent, on fera référence aux sous-schémas explicites et implicites d'un schéma X par les notations X(E) et X(I) respectivement. L'erreur de dissipation $1 - |G_{imp}|$ en fonction de la pulsation adimensionnée $\omega_y \Delta t$ est montrée sur la figure 1(a) pour les sous-schémas implicites SIRK63-A(I) et SIRK63-S(I) développés dans ce papier, ainsi que pour le sous-schéma implicite ASIRK-3C(I) de Zhong [8]. L'erreur de dissipation du schéma Runge-Kutta standard d'ordre 4 est également fournie comme référence.

Le sous-schéma implicite de Zhong est plus dissipatif que les schémas proposés : sa dissipation est supérieure d'un ordre de grandeur de celle de RK4 pour $\omega_y \Delta t < \pi/4$, tandis que dans cette même gamme de pulsation adimensionnée, le premier sous-schéma développé, SIRK63-S(I), a une dissipation

proche de celle de RK4. Il devient même légèrement plus précis pour $\omega_y \Delta t > \pi/4$. Le second sous-schéma SIRK63-A(I), qui a été développé spécifiquement pour la précision, montre une dissipation inférieure de deux ordres de grandeur de celle de SIRK63-S(I), pour $\omega_y \Delta t < \pi$.

L'erreur de dispersion $|\omega_{imp}^* \Delta t - \omega_y \Delta t| / \pi$ en fonction de $\omega_y \Delta t$, montrée sur la figure 1(b), fait apparaître les mêmes tendances que celles observées sur l'erreur de dissipation. Le sous-schéma implicite de Zhong est plus dispersif que les schémas proposés. Parmi ces derniers, le sous-schéma SIRK63-A(I) est de nouveau plus précis que le SIRK63-S(I), pour $\omega_y \Delta t < \pi/4$. Pour des pulsations additionnées supérieures, les deux sous-schémas développés présentent une dispersion équivalente.

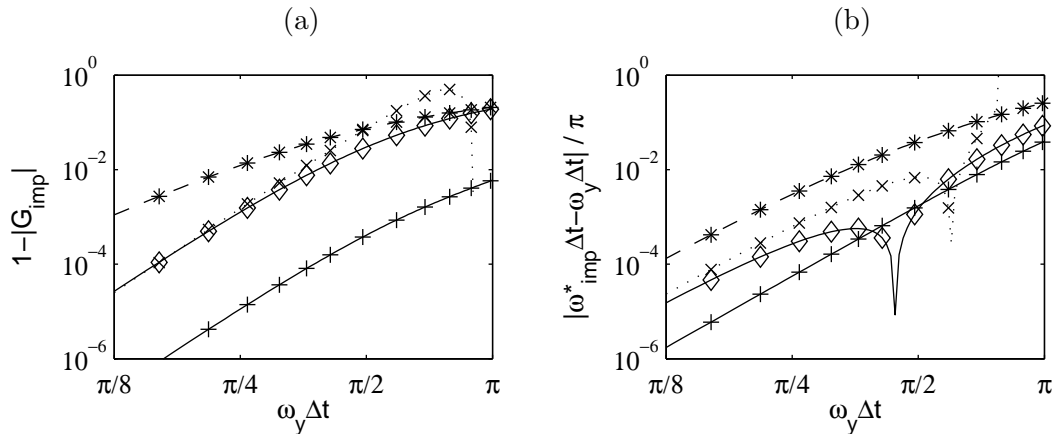


FIG. 1 – (a) Dissipation, et (b) dispersion des sous-schémas implicites. $\cdots \times$ RK4 standard d'ordre 4, $-\ast$ ASIRK-3C(I) d'ordre 3 de Zhong, $+$ SIRK63-A(I) d'ordre 4, \diamond SIRK63-S(I) d'ordre 4

L'erreur de dissipation des différents sous-schémas explicites en fonction de la pulsation adimensionnée $\omega_x \Delta t$ est donnée sur la figure 2(a). Le sous-schéma explicite de Zhong présente encore l'erreur la plus importante. Les deux schémas proposés ont le même sous-schéma explicite : RK46-Ber. Ce dernier a une dissipation inférieure d'au moins deux ordres de grandeur de celle de RK4 pour $\omega_x \Delta t < \pi$. L'erreur de dispersion fournie sur la figure 2(b) fait apparaître globalement les mêmes tendances.

En définitive, l'étude menée dans cette section permet de montrer que la précision des schémas semi-implicites fournis dans ce papier est plus grande que celle du schéma semi-implicite de Zhong, et au moins équivalente à celle de RK4.

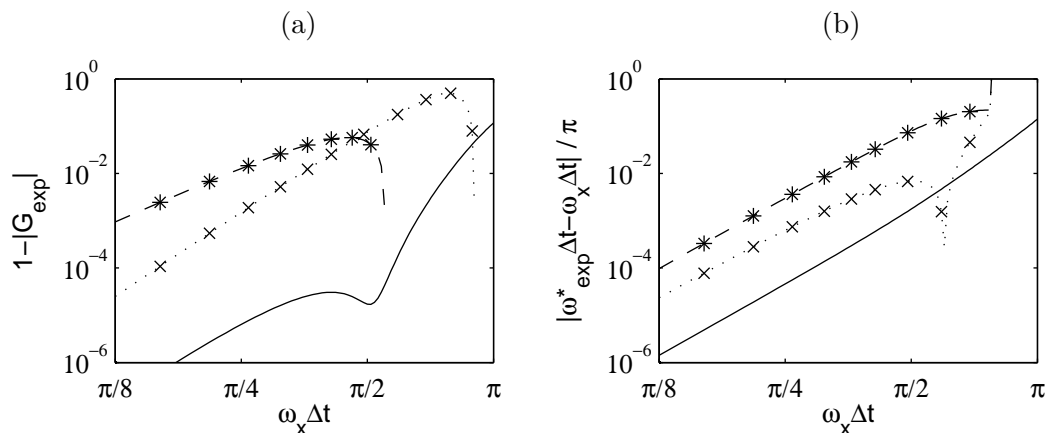


FIG. 2 – (a) Dissipation, et (b) dispersion des sous-schémas explicites. $\cdots \times$ RK4 standard d'ordre 4, $-\ast$ ASIRK-3C(E) d'ordre 3 de Zhong, $+$ SIRK63-S(E) et \diamond SIRK63-S(E) : RK46-Ber

3 Application à des cas test acoustiques

Les propriétés des schémas semi-implicites sont étudiées sur un cas de propagation d'impulsion acoustique sans écoulement moyen. Les équations d'Euler 2D sont résolues sur un maillage cartésien et anisotrope. On définit le rapport d'aspect $AR = \Delta x / \Delta y$ (AR pour Aspect Ratio) où Δx et Δy sont les pas de discrétisation spatiale dans les directions x et y respectivement. Plus AR est grand, et plus le maillage est raffiné dans la direction y . L'impulsion initiale a une demi-largeur égale à $3\Delta x$ et une amplitude de 10 Pa. Pour comparer les performances des différents schémas d'intégration temporelle, l'erreur de discrétisation spatiale doit être négligeable devant l'erreur de discrétisation temporelle. On utilise donc un schéma aux différences finies centrées sur 21 points, d'ordre 20. Pour les tests de stabilité, des conditions de périodicité sont appliquées aux bords du domaine, ce qui permet d'utiliser le schéma centré sur l'ensemble du maillage, et d'éviter ainsi d'éventuelles instabilités causées par l'utilisation de schémas décentrés.

Les simulations sont réalisées avec les schémas d'intégration temporelle suivants : SIRK63-S, SIRK63-A, ASIRK-3C et RK4. Chacun est testé pour des rapports d'aspect de 2, 4, 8, 16 et 32, avec $\Delta x = 1$ fixé et en faisant varier Δy . Le nombre de CFL est défini par $CFL = c\Delta t / \Delta x$.

3.1 Stabilité

Des tests de stabilité sont effectués pour trouver le nombre de CFL maximum CFL_{max} avant divergence. Les résultats sont fournis sur la figure 3. Les axes sont en échelle logarithmique. Le schéma RK4 étant explicite, son nombre de CFL maximum diminue progressivement, comme prévu, lorsque le rapport d'aspect augmente, c'est à dire lorsque Δy diminue. Le schéma de Zhong présente un nombre de CFL maximum constant, égal à 0.2. Le nombre de CFL maximum de SIRK63-A diminue lorsque AR augmente, jusqu'à se stabiliser à $CFL_{max} = 0.25$ pour $AR \geq 16$. Le schéma SIRK63-S, enfin, est le plus stable, avec $CFL_{max} = 1.2$ quelquesoit la valeur de AR.

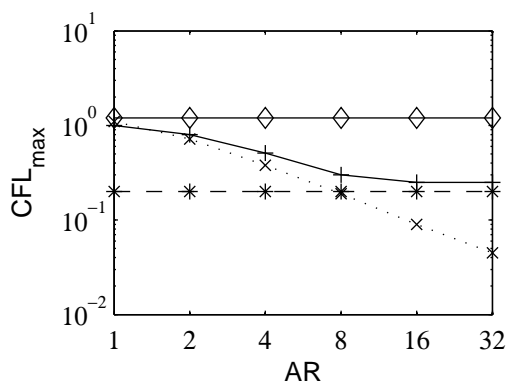


FIG. 3 – Nombre de CFL maximum en fonction de AR, pour les schémas : $\cdot \times \cdot$ RK4 standard, $- \star$ ASIRK-3C de Zhong, \boxplus SIRK63-A, \diamond SIRK63-S

3.2 Précision

Pour les tests de précision, on réalise des calculs aux mêmes rapports d'aspect que précédemment. La simulation est menée jusqu'à $t = 32\Delta x / c$ où c est la vitesse du son, pour des nombres de CFL variant entre 0.1 et 1. Les résultats sont comparés à des calculs de référence. Les maillages étant différents pour chaque rapport d'aspect, un calcul de référence est réalisé sur chaque maillage, avec un nombre de CFL très faible. Il est par exemple égal à 10^{-2} pour $AR = 1$, et à 10^{-4} pour $AR = 32$. La solution donnée par un des calculs de référence est représentée sur la figure 4.

On définit alors l'erreur globale de la manière suivante :

$$E_{glob} = \frac{\sqrt{\iint_S (p - p_{ref})^2 ds}}{\sqrt{\iint_S (p_{ref} - p_0)^2 ds}} \quad (5)$$

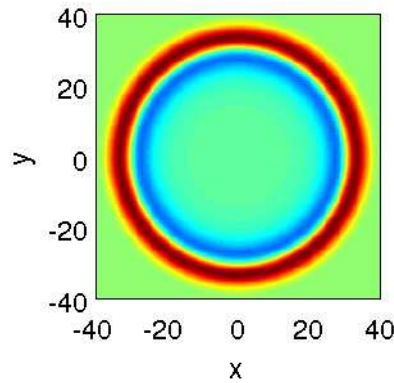


FIG. 4 – Solution de référence à $t = 32\Delta x/c$. Représentation de $p - p_0$ pour une amplitude $\Delta p = \pm 1 Pa$

où p_{ref} est issu du calcul de référence. La figure 5 présente l'erreur obtenue pour les différents schémas, pour des rapports d'aspect de 1 et 32. Les axes sont en échelle logarithmique. La comparaison des figures 5(a) et 5(b) montre que les courbes sont sensiblement les mêmes aux deux rapports d'aspect. Seule une différence est notée pour le nombre de CFL maximum de SIRK63-A et de RK4. On peut donc se limiter à l'analyse des résultats obtenus avec $AR = 1$, donnés sur la figure 5(a). Les algorithmes semi-implicites présentent tous la même pente d'ordre 3. Le schéma de Zhong a une précision relativement faible : son erreur est de plus d'un ordre de grandeur supérieure de celle de RK4. Les schémas proposés sont en revanche plus précis : celui développé pour sa stabilité (SIRK63-S) a une erreur similaire à celle de RK4, et celui développé pour sa précision (SIRK63-A), a une erreur d'un ordre de grandeur inférieure à celle de RK4.

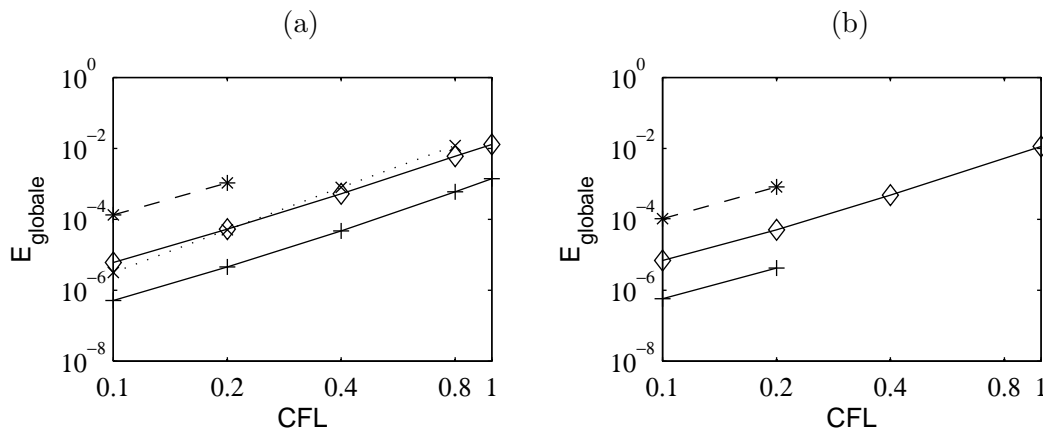


FIG. 5 – Erreur globale en fonction du nombre de CFL : (a) $AR=1$, (b) $AR=32$. $\cdots \times \cdots$ RK4 standard d'ordre 4, $-- * --$ ASIRK-3C d'ordre 3 de Zhong, $- + -$ SIRK63-A d'ordre 3, $- \diamond -$ SIRK63-S d'ordre 3

4 Conclusions

Deux schémas semi-implicites d'ordre 3, SIRK63-A et SIRK63-S, sont proposés dans ce papier. Ces deux schémas utilisent le même sous-schéma explicite : le schéma RK46-Ber de Berland *et al.* [1]. Leurs sous-schémas implicites respectifs sont inconditionnellement stables et permettent d'intégrer les équations dans la direction où les tailles de maille sont très petites, sans diminuer le pas de temps. L'erreur de dissipation et l'erreur de dispersion des schémas SIRK63-A et SIRK63-S sont inférieures ou égales à celles du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) standard. Des tests effectués sur un cas de propagation d'impulsion acoustique en deux dimensions permettent de retrouver ces propriétés. Des mesures de temps CPU ont été effectuées sur des calculs non présentés ici. Ces mesures montrent que le schéma SIRK63-S permet d'obtenir un temps de calcul jusqu'à dix fois plus petit qu'avec un schéma explicite, pour un coût en mémoire raisonnable.

Le schéma SIRK63-S pourrait donc être utilisé pour des calculs tels que la simulation de couche limite turbulente compressible, où le raffinement du maillage pénalise fortement le pas de temps des schémas explicites. Le schéma SIRK63-A se révèle également intéressant, notamment pour sa grande précision. Il nécessite toutefois un traitement amélioré de la résolution du système implicite, pour le rendre plus rapide.

Références

- [1] Berland J., Bogey C., Bailly C. Optimized explicit schemes : Matching and boundary schemes and 4th-order Runge-Kutta algorithm In *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 10-12 May 2004, Manchester, UK* AIAA Paper 2004-2814
- [2] Hu F.Q., Hussaini M.Y., Manthey J.L. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics *Journal of Computational Physics* **124** 177-191, 1996
- [3] Colonius T., Lele S.K. Computational aeroacoustics : Progress on nonlinear problems of sound generation *Progress in Aerospace Sciences* **40**(6) 345-416, 2004
- [4] Kennedy C.A., Carpenter M.H. Additive Runge-Kutta schemes for convection-diffusion-reaction equations *Applied Numerical Mathematics* **44** 139-181, 2003
- [5] Stanescu D., Habashi W.G. 2N-Storage Low Dissipation and Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics *Journal of Computational Physics* **143** 674-681, 1998
- [6] Suh J., Frankel S.H., Mongeau L., Plesniak M.W. Compressible large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows using a semi-implicit numerical scheme for low Mach number aeroacoustics *Journal of Computational Physics* **215** 526-551, 2006
- [7] Tam C.K.W. Computational aeroacoustics : issues and methods. *AIAA Journal* **33**(10) 1788-1797, 1995
- [8] Zhong X. Additive semi-implicit Runge-Kutta methods for computing high-speed nonequilibrium reactive flows *Journal of Computational Physics* **128** 19-31, 1996