

# Modèle numérique de convection mixte pour les liquides (eau) sous l'approximation des faibles nombres de Mach

M. MEDALE, A. HADDAD, C. ABID

*Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI), UMR 6595 CNRS - Université Aix-Marseille, 5 rue Enrico Fermi, Technopole de Château-Gombert, 13453 MARSEILLE Cedex 13.*

## Résumé :

*Le modèle numérique 3D que nous avons développé présente deux caractéristiques principales : un modèle dilatable pour l'eau et la prise en compte de domaines ouverts. Les difficultés associées au premier aspect concernent l'adaptation de la loi d'état de l'eau au modèle dilatable sous l'approximation des faibles nombres de Mach, tandis que celles associées au second sont relatives à la mise en œuvre de conditions aux limites numériques de sortie compatibles avec l'algorithme de projection utilisé. Les résultats de simulations d'écoulement de convection mixte en canal horizontal uniformément chauffé par le bas ont été confrontés à celles utilisant l'approximation de Boussinesq et aux expériences.*

## Abstract:

*The 3D numerical model we have developed presents two main features: a Low-Mach-Number approximation for water along with an open boundary condition formulation. Indeed, the difficulties related to the former point stand in a computationally efficient adaptation of the water equation of state in the framework of Low Mach number approximation, whereas the difficulties related to the latter concern the introduction of Open Boundary Conditions in the projection algorithm used. We have computed a mixed convection flow in a horizontal channel uniformly heated from below and compared the results obtained with either the Boussinesq approximation or the low-Mach-number one.*

**Mots clefs :** Convection mixte, approximation à faibles nombres de Mach, écoulements en domaines ouverts, conditions aux limites de sortie.

## 1 Introduction

La compréhension d'écoulements tridimensionnels de convection mixte peut dans certains cas être essentielle pour l'optimisation de composants (échangeurs thermiques, mélangeurs, etc.) ou procédés industriels pour lesquels on cherche à intensifier les échanges et par conséquent l'efficacité énergétique.

Cependant, plusieurs difficultés parfois délicates à surmonter surviennent pour simuler numériquement ces écoulements de convection mixte, en particulier dans le cas des liquides soumis à des écarts de température supérieurs à une dizaine de degrés. En effet, bien qu'à première vue relativement modestes, ces valeurs correspondent dans le cas de l'eau à des conditions qui se situent bien au-delà du domaine de validité de l'approximation de Boussinesq [1-2]. D'autre part, dans les conditions d'écoulement que nous considérons ici, la variation de masse volumique induite par les écarts de température est plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle induite par les variations de pression intrinsèques à l'écoulement. Ceci justifie donc le recours à un modèle dilatable, qui est couramment utilisé dans le cadre de l'approximation à faibles nombres de Mach avec une loi d'état des gaz parfaits [3-6] ou en présence de fluides supercritiques [7]. En revanche pour les liquides, et en particulier l'eau, nous n'avons pas trouvé de publication impliquant d'une part un modèle dilatable sous l'approximation des faibles nombres de Mach et d'autre part une loi d'état applicable à l'eau. Nous sommes alors partis de travaux originaux, initialement destinés aux écoulements diphasiques liquide-vapeur [8-9], dans lesquels nous avons introduit une loi de comportement représentative de l'eau [10].

La seconde difficulté rencontrée pour la modélisation de ces écoulements de convection mixte concerne la prise en compte de domaines ouverts pour lesquels on ne connaît pas toujours la partition de la frontière sur laquelle l'écoulement est entrant ou sortant, vis à vis du domaine de calcul. De plus, les équations que nous

cherchons à résoudre ne sont pas linéaires, ce qui conduit à introduire des conditions aux limites locales et approchées sur les portions de frontières du domaine de calcul où les flux sont sortants [11-13]. Par ailleurs, les écoulements tridimensionnels que nous cherchons à modéliser conduisent à des équations de type parabolique qui rendent inadaptées les conditions aux limites de type hyperbolique issues des équations de Sommerfeld, telles que proposées par Orlanski [14]. Enfin, la résolution numérique d'un problème avec un modèle à faibles nombres de Mach introduit deux variables internes, la pression thermodynamique et sa dérivée temporelle. Leur détermination fait directement intervenir les flux entrants ou sortants (de masse, de quantité de mouvement et d'énergie) aux frontières ouvertes du domaine de calcul, amplifiant encore l'impact des conditions aux limites de sortie sur la fiabilité du modèle numérique et la précision des calculs.

## 2 Modèle physique

Le modèle est basé sur les équations de Navier-Stokes compressibles, sous l'approximation des faibles nombres de Mach, proposées dans [8]. Nous avons introduit dans ce modèle les propriétés thermo-physiques de l'eau qui dépendent de la température (densité, viscosité dynamique et la conductivité thermique).

### 2.1 Modèle dilatable pour l'eau

La configuration que nous désirons modéliser concerne l'écoulement 3D de convection mixte d'eau, à une pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique et des températures comprise entre 10 et 90 °C. Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes compressibles peuvent s'écrire sous la forme adimensionnelle suivante [8] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= -\frac{1}{Ma^2} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \tau - \frac{\rho}{Fr^2} \vec{e}_z \\ \rho C_p \frac{DT}{Dt} &= \beta \alpha T \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{Re Pr} \nabla \cdot \vec{q} + \frac{Ma^2}{Re} \tau : \nabla \vec{v} \end{aligned} \quad (1)$$

dans lesquelles les inconnues sont adimensionnées par leur valeur de référence et où  $\rho(p, T)$ ,  $C_p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $T$ , et  $t$  sont respectivement la densité, la chaleur spécifique, le coefficient de dilatation volumique du fluide, une fonction thermodynamique ( $\beta = \alpha p / \rho C_p$ ), la vitesse, la pression, la température et le temps. Les nombres adimensionnels sont : le nombre de Mach ( $Ma = v_{ref} / c$ , où  $c$  est la vitesse du son dans le liquide, définie par :  $c = 1 / \sqrt{\partial \rho / \partial p - \alpha^2 T / C_p}$ ), le nombre de Reynolds ( $Re = v_{ref} L_{ref} \rho_{ref} / \mu_{ref}$ ), le nombre de Froude ( $Fr = v_{ref} / \sqrt{L_{ref} g}$ ) et le nombre de Prandtl ( $Pr = \mu_{ref} / C_p k_{ref}$ ). En ce qui concerne les lois de comportement de l'eau qui est un fluide newtonien qui obéit à la loi de Fourier, nous adoptons un formalisme classique dans lequel la densité dépend de la pression thermodynamique et de la température :

$$\begin{aligned} \rho &= P_0(t) \cdot f(T) \\ \tau &= \mu \left[ \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) I \right] \\ \vec{q} &= -k \nabla T \end{aligned} \quad (2)$$

où  $P_0(t)$ ,  $f(T)$ ,  $\mu(T)$  et  $k(T)$  sont respectivement la pression thermodynamique, une fonction de la température, la viscosité dynamique et conductivité thermique de l'eau, qui dépendent toutes deux de la température. A ces équations, sont associées des conditions initiales et aux limites qui seront détaillées ultérieurement.

### 2.2 Modèle dilatable à faibles nombres de Mach pour l'eau

En injectant le développement asymptotique de toutes les variables en fonction du nombre de Mach dans le système d'équations (1) et (2), puis en faisant l'hypothèse des faibles nombres de Mach ( $Ma \ll 1$ ), les équations du problèmes peuvent s'écrire sous la forme suivante, dérivée de [8, 9] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\
\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= -\vec{\nabla}\Pi + \frac{1}{\text{Re}} \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{\rho}{Fr^2} \vec{e}_z \\
\rho C_p \frac{DT}{Dt} &= \beta \alpha T \frac{dP_0}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}
\end{aligned} \tag{3}$$

où  $\Pi$  désigne la pression dynamique de l'écoulement. Pour fermer le système, il faut introduire une équation supplémentaire, permettant de relier la pression thermodynamique aux variables de l'écoulement. Nous écrivons cette relation de fermeture sous une forme générique à partir de l'éq. (2a) :

$$P_0(t) = M(t) / \int_{\Omega} f(T) d\Omega \tag{4}$$

où  $M(t)$  représente la masse de fluide contenue dans le domaine de calcul  $\Omega$  à l'instant courant  $t$ . Connaissant la masse à l'instant initial  $M(t_0)$ , on calcule la masse de fluide à l'instant courant  $M(t)$  par intégration de l'équation de conservation de la masse (éq. 3a).

En ce qui concerne le calcul de la dérivée temporelle de la pression thermodynamique, nous avons repris la démarche initialement proposée pour le modèle à faibles nombres de Mach de gaz parfait contenu dans une enceinte fermée [5], et l'avons étendue à la loi de comportement de l'eau dans un domaine partiellement ouvert. Cette démarche consiste à injecter la relation de comportement de la densité (2a) dans la l'équation de conservation de la masse (3a) et de l'énergie (3c), puis à combiner ces deux dernières.

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \frac{\Gamma}{V} \left[ \frac{\beta}{\text{Re Pr } C_p} \frac{f'(T)}{f(T)} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega - P_0(t) f(T) \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega \right] \tag{5}$$

où  $\Gamma = \rho_{ref} c^2 / p_{ref}$ ,  $V$  est le volume du domaine de calcul et  $f'(T)$  est la dérivée par rapport à la température de la fonction  $f(T)$ . Une fois la pression thermodynamique et sa dérivée temporelle calculées, on peut calculer la pression dynamique, par une approche semblable à celle utilisée dans les algorithmes de projection destinés aux calculs d'écoulements incompressibles :

$$\Delta \Pi = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\Gamma P_0(t)} \frac{dP_0(t)}{dt} - \frac{\beta}{\text{Re Pr } P_0(t)} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \tag{6}$$

### 3 Modèle numérique développé

Le modèle numérique que nous avons développé pour la simulation d'écoulements 3D de convection mixte de liquides, et en particulier l'eau, est basé sur une approche par couplage faible ('segregated'), pour laquelle nous construisons un système algébrique pour chacune des équations du système à résoudre (3-6). L'algorithme de résolution est instationnaire et consiste à enchaîner les étapes permettant une résolution stable, précise et performante.

#### 3.1 Algorithme de résolution

Le couplage vitesse-pression est traité par un algorithme de projection qui résulte d'une adaptation de [15] et [16] pour ce modèle dilatable avec l'approximation des faibles nombres de Mach, où nous introduisons les conditions aux limites de sortie de vitesse et température en suivant la démarche présentée dans [17]. L'algorithme global de résolution reprend l'enchaînement des étapes de résolution proposé dans [5], en dépit des différences entre ce modèle (gaz parfait, cavité fermée) et le notre (pour l'eau, domaine ouvert). Partant de valeurs initiales des champs de température, de vitesse et de pression, l'algorithme consiste à effectuer une boucle sur les pas de temps, dont chacun d'eux contient la séquence suivante :

- Calcul de la variation temporelle de la pression thermodynamique, en résolvant l'éq. 5 ;
- Calcul du champ de température, en résolvant l'éq. 3c ;
- Calcul du champ de vitesse, en résolvant l'éq. 3b ;
- Calcul de la pression thermodynamique, en résolvant l'éq. 4 ;
- Calcul du champ de pression dynamique, en résolvant l'éq. 6.

### 3.2 Discrétisation des équations et implémentation HPC

La discrétisation spatiale des formes intégrales associées au système d'équations (3-6) est effectuée par la méthode des éléments finis standard. Les composantes du champ de vitesse et le champ de température sont discrétisés avec une approximation quadratique par morceaux et des éléments finis hexaédriques de Lagrange (H27). Le champ de pression hydrodynamique est quant à lui discrétisé avec une approximation linéaire par morceaux et des éléments finis hexaédriques de Lagrange (H8). La discrétisation temporelle est réalisée avec un schéma BDF2, tandis que les quantités non encore mises à jour aux étapes intermédiaires de l'algorithme global dans lesquelles elles apparaissent sont alors extrapolées au second ordre [18].

L'implémentation de l'algorithme global dans l'environnement de programmation PETSc [19] nous permet d'exécuter le code avec de très bonnes performances sur des calculateurs parallèles à hautes performances, tels que l'IBM SP6 de l'IDRIS ou le SGI Altix du CINES. A chaque pas de temps, les systèmes algébriques ainsi construits sont résolus par la méthode itérative BCGS (Bi-Conjugate Gradient Stabilized), pré-conditionnée par une méthode ASM (Additive Schwartz Method) implémentées dans la librairie PETSc [19].

## 4 Ecoulement de convection mixte en conduite horizontale

Le problème considéré concerne un écoulement de convection mixte d'eau, qui se développe dans un canal horizontal de section rectangulaire (rapport d'aspect longitudinal  $A=L/h=75$ , transversal  $B=l/h=10$ ), uniformément chauffé à la paroi inférieure à flux imposé au delà d'une longueur d'entrée ( $A_e=5$ ), tel que schématisé sur la figure 1. Les conditions aux limites associées à ce problème sont les suivantes :

- section d'entrée ( $x=-A_e$ ) :  $u=u_{\text{pois}}(y, z)$ ,  $v=w=0$  et  $\theta=0$  (où  $u_{\text{pois}}(y, z)$  représente la valeur de l'écoulement de Poiseuille en tout point de la section d'entrée) ;
- section de sortie ( $x=A-A_e$ ) : condition limite de sortie [15-17] ;
- paroi horizontale inférieure ( $z=0$ ) :  $u=v=w=0$  ;  $\partial_z\theta=0$  (adiabatique) pour  $-A_e \leq x < 0$  puis  $\partial_z\theta=1$  (flux constant) pour  $0 \leq x \leq A-A_e$  ;
- paroi horizontale supérieure ( $z=1$ ) :  $u=v=w=0$  ;  $\partial_z\theta=0$  (adiabatique) ;
- parois verticales ( $y=0$  et  $y=B$ ) :  $u=v=w=0$  ;  $\partial_y\theta=0$  (adiabatique).

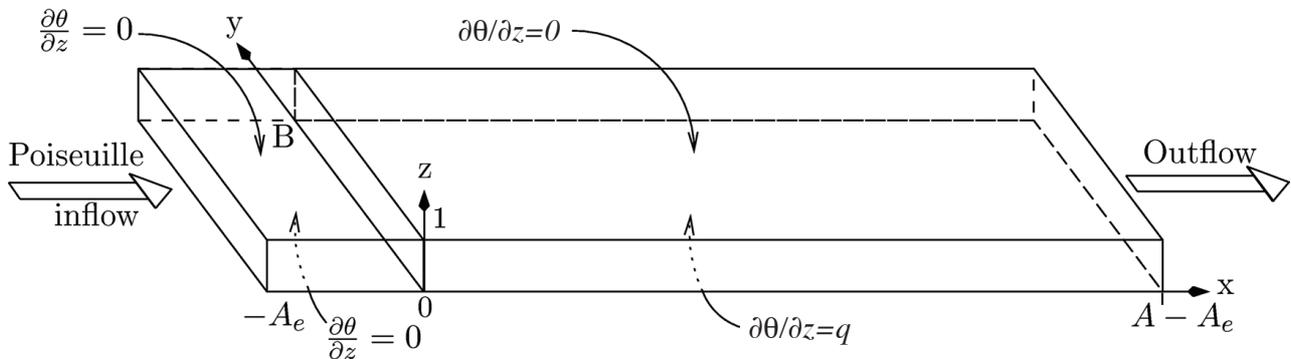


FIG. 1 – Schéma du domaine de calcul et de conditions aux limites.

Les paramètres de l'écoulement sont fixés par l'intensité de la convection forcée ( $Re=50$ , construit sur la vitesse moyenne du fluide sur la section d'entrée et la hauteur du canal) et naturelle ( $Ra=1,5 \cdot 10^4$ , construit sur le flux de chaleur à la paroi chauffée et la hauteur du canal), ainsi que les caractéristiques du fluide (eau :  $Pr=6,9$ ). Le maillage du domaine de calcul est constitué de  $750 \times 200 \times 20$  éléments finis H27 uniformément distribués selon les directions longitudinale, transversale et verticale. Cette discrétisation spatiale conduit à 24 677 941 nœuds de vitesse et de température, et 3 169 971 nœuds de pression, uniformément répartis dans les trois directions.

Pour ces valeurs des paramètres, l'écoulement est stationnaire et composé de structures convectives alignées longitudinalement dans la partie centrale du canal. Nous présentons sur la figure 2 le champ de température à la paroi inférieure chauffée, obtenu sur la figure du haut à l'aide de l'approximation de Boussinesq [20], et sur la figure du bas à l'aide de la présente approximation à faibles nombres de Mach, de cette communication. Nous pouvons observer que sur les trois premiers quarts du domaine, les structures d'écoulement sont très comparables, alors que dans le dernier quart elles commencent à différer. On peut avancer comme explication que cette dernière zone est celle où les températures sont les plus élevées, et par conséquent c'est

là que l'approximation de Boussinesq et le modèle à faible nombre de Mach produisent des résultats différents. En effet, le premier considère les propriétés constantes tandis que le second intègre la dépendance de propriétés à la température.

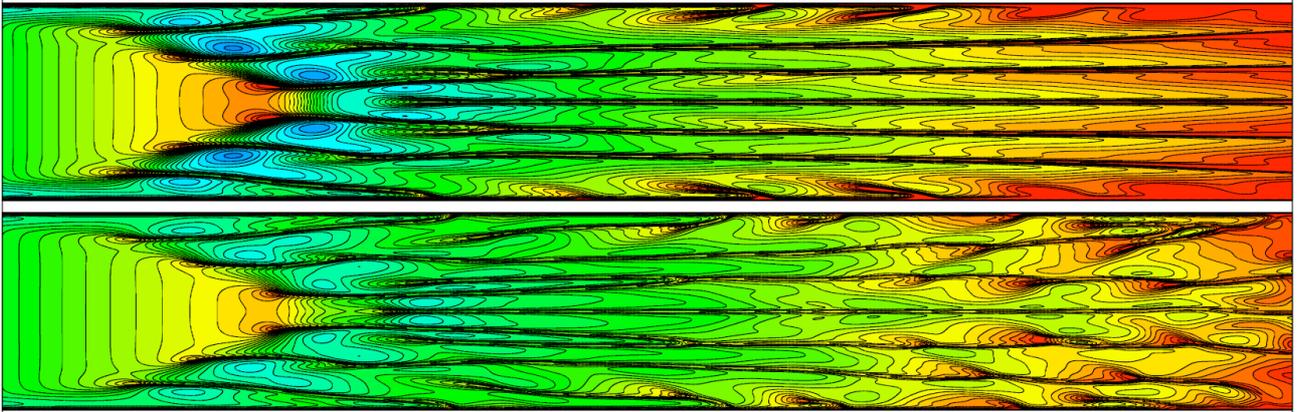


FIG. 2 – Isothermes à la paroi chauffée. Haut) Approximation Boussinesq ; bas) Approximation LMN.

Pour accéder à une comparaison quantitative, nous avons tracé sur la figure 3 le profil longitudinal du nombre de Nusselt à la paroi chauffée (moyenné sur la largeur du canal), pour chacun des deux modèles. Sur cette figure, la confrontation des deux modèles met en évidence deux parties : une zone d'apparition des structures convectives pour  $x < 22$  et une zone aval où ces structures se développent parfois se déstabilisent. Pour la première zone, l'accord entre les deux modèles est indéniable, en revanche dans la seconde zone, d'importantes différences apparaissent entre le modèle basé sur l'approximation de Boussinesq et celui basé sur le modèle à faibles nombres de Mach. En particulier, le premier modèle sous-estime de façon assez générale la valeur du nombre de Nusselt par rapport au modèle LMN. Ceci provient du fait que dans ce dernier, les couches limites hydrodynamiques et thermiques sont plus fines, ce qui favorise les transferts thermiques comme l'atteste la figure 3.

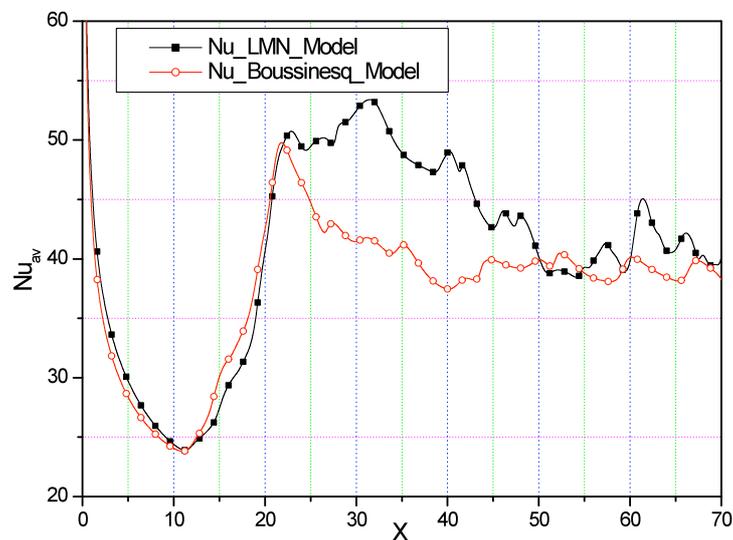


FIG. 3 – Profil longitudinal du nombre de Nusselt moyenné sur la largeur du domaine, pour deux modèles.

## 5 Conclusions

Nous avons présenté dans cette communication un modèle original pour l'étude de la convection mixte 3D de liquides, basé sur un modèle dilatable qui intègre l'approximation des faibles nombres de Mach. Ce modèle reprend le formalisme développé dans [8] et l'étend au cas des liquides et en particulier à celui de l'eau. La seconde originalité de ce travail concerne la prise en compte de conditions aux limites de sortie, compatibles d'une part avec l'algorithme de projection utilisé, et d'autre part avec la détermination des variables internes du modèle à faibles nombres de Mach. Il est implémenté dans un environnement de calcul

parallèle à hautes performances, ce qui permet de simuler des écoulements de grande taille dans lesquels peuvent apparaître des structures complexes, même pour des nombres de Richardson relativement faibles.

Dans une seconde partie, nous avons confronté le modèle dilatable à faibles nombres de Mach à un modèle précédemment développé, basé sur l'approximation de Boussinesq. Le problème simulé concerne l'écoulement de convection mixte dans un canal horizontal dans lequel le profil de vitesse est de type Poiseuille sur la section d'entrée, et uniformément chauffé à flux imposé à la paroi inférieure, les autres étant adiabatiques. Pour les valeurs des paramètres de contrôle ( $Re=50$ ,  $Ra=1,5 \cdot 10^4$  et  $Pr=6,9$ ), l'écoulement est stationnaire et composé de structures convectives longitudinales. Les deux modèles produisent des résultats assez semblables dans la zone d'établissement, avec des différences plus notables sur les valeurs des nombres de Nusselt (sous-estimés par le modèle basé sur l'approximation de Boussinesq par rapport au modèle LMN).

## References

- [1] Gray D.D. and Giorgini A., The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.
- [2] De Boer P.C.T., Thermally driven motion of strongly heated fluids, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 2239-2252, 1984.
- [3] Chenoweth D.R. and Paolucci S., Natural Convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences. *J. Fluid Mech.*, Vol. 169, pp. 173-210, 1986.
- [4] Frohlich J. Résolution numérique des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach par méthode spectrale. Thèse de Doctorat Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1990.
- [5] Le Quéré P., Masson R. and Perrot P., A Chebyshev collocation algorithm for 2D Non-Boussinesq convection. *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, pp. 320-335, 1992.
- [6] Paillère H., Viozat C., Kumbaro A. and Toumi I. Comparison of low Mach number models for natural convection problems. *Heat and Mass Transfer*, Vol 36, pp. 567-573, 2000.
- [7] Accary G., Raspo I., Bontoux P. and Zappoli B., An adaptation of the low Mach number approximation for supercritical fluid buoyant flows, *C. R. Mécanique*, Vol. 333, pp. 397-404, 2005.
- [8] Dellacherie S., On a diphasic low Mach number system, *ESAIM: M2AN* Vol. 39, No 3, Low Mach Number Flows Conference, pp. 487-514, 2005.
- [9] Dellacherie S., Numerical resolution of a potential diphasic low Mach number system, *J. Comput. Phys.*, Vol. 223, pp. 151-187, 2007.
- [10] Perry's, *Chemical Engineers' Handbook*, Mc Graw-Hill, 1997.
- [11] Colonius T., Modeling Artificial Boundary Conditions for Compressible Flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 36, pp. 315-345, 2004.
- [12] Bruneau C.-H. and Fabrie P., Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 19, pp. 693-705, 1994.
- [13] Bruneau C.H. and Creusé E., Towards a transparent boundary condition for compressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 36, 807-840, 2001.
- [14] Orlanski I., A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comp. Phys.*, Vol. 21, 251-269, 1976.
- [15] Guermond J.L. and Quartapelle L., Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM, *J. Comput. Phys.*, Vol. 132, pp. 12-33, 1997.
- [16] Rabier S. and Medale M., Computation of free surface flows with a projection FEM in a moving mesh Framework, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, pp. 4703-4721, 2003.
- [17] Papanastasiou TC, Malamataris N, Ellwood K., A new outflow boundary condition. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 14, pp. 587-608, 1992.
- [18] Guermond J.L. and Shen J., A new class of truly consistent splitting schemes for incompressible flows, *J. Comput. Physics*, Vol. 192, pp. 262-276, 2003.
- [19] Balay S., Buschelman K., Groppe W. D., Kaushik D., Knepley M. G., Curfman McInnes L., Smith B. F. and Zhang H., *Petsc Web pages*, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2007.
- [20] Benderradji A., Haddad A., Taher R., Medale M., Abid C. and Papini F., Characterization of fluid flow patterns and heat transfer in horizontal channel mixed convection, *Heat and Mass Transfer Journal*, Vol. 44, pp. 1465-1476, 2008.