Étude numérique de l'effet de la portance inverse pour un fluide de Bingham autour d'un obstacle

Z.Salloum[a,b], G.Mompean[b] et T.Zambrano[b,c]

salloum@ul.edu.lb ;gilmar.mompean@polytech-lille.fr ;tc.zambrano@ed.univ-lille1.fr

a. *Université Libanaise, Faculté de Sciences-I, Département de Mathématiques, Beyrouth, Liban*
b. *Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR-CNRS 8107, Polytech'Lille, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*
c. *Université Centrale du Venezuela (UCV), Cité Universitaire, 1053 Caracas, Venezuela.*

Résumé. Ce travail porte sur la simulation numérique d'un écoulement de fluide non-Newtonien (Bingham) autour d'un obstacle en forme de profil hydrodynamique. La méthode des volumes finis avec un maillage orthogonale généralisée est utilisée. Les résultats du calcul montrent une portance inverse pour l'écoulement du fluide de Bingham en régime laminaire. Ceci est qualitativement en accord avec des résultats expérimentaux concernant la portance inverse obtenus par B. Dollet et *al.* (Physical Review Letters, 2005, [1]) pour une solution mousseuse.

Abstract. The purpose of this work is the numerical simulation of non-Newtonian fluid flow (Bingham) around an obstacle in the form of hydrodynamic profile. We use the finite volume method with the generalized orthogonal coordinates. In the case of Bingham fluid flow, the simulation results show the presence of a downwards lift, opposite to the lift usually known in the newtonian case. This results is qualitatively in agreement with the experimental results concerning inverse lift obtained by B. Dollet and *al.* (Physical Review Letters, 2005, [1]) with a foam solution.

Mots clefs. Fluide de Bingham, volumes finis, portance, seuil des contraintes.

1 Introduction

Dans le domaine de la mécanique de fluide, la portance est une force normalement perpendiculaire au déplacement du fluide qui apparaît lors qu'il y a une différence de pression entre les deux cotés de l'obstacle. Dans le cas d'un obstacle en forme de profil hydrodynamique par exemple, la portance est crée par le déséquilibre de la pression au dessous et au dessus du profil et cette portance est normalement dirigée vers le haut. Toutefois une équipe de chercheurs du laboratoire de mécanique de Grenoble a découvert un nouveau effet, s'agissant d'une portance inverse, en plaçant un profil hydrodynamique dans un écoulement de fluide viscoélastique. Le fluide considéré pour cette expérience est une solution mousseuse obtenue notamment à l'aide de produit de vaisselle commercial (Taci, Henkel) et d'azote. Un profil est plongé dans un écoulement de cette mousse tout en étant maintenue à une base fixe à l'aide d'une fibre élastique. Le profil est libre de tourner autour de cette fibre. Le débit de l'écoulement est de 50 ml/min et sa vitesse moyenne de 2,7 mm/s. Ce qui est remarquable dans cette expérience est l'effet du portance observé, qui est orienté vers le coté opposé, contrairement à un cas classique. Les chercheurs ont suggéré que cet effet de portance inverse était du au caractère viscoélastique du fluide. Le but de ce travail est donc de chercher par une simulation numérique si un fluide non-newtonien entraîne ce phénomène de portance inverse. Nous effectueons la simulation sur un écoulement d'un fluide de Bingham autour d'un obstacle en forme de profil hydrodynamique. Le fluide de Bingham présente un seuil de contrainte nécessaire pour démarrer l'écoulement mais ne possède pas de élasticité. Cette étude montre non seulement la présence d'une portance inverse mais aussi l'importance et l'influence du seuil d'un fluide sur la négativité de cette portance. Notons que le fluide de Bingham était l'objet de plusieurs travaux mathématiques [3] et numériques. L'étude numérique d'écoulement de Bingham, a été faite dans de nombreuses publications, citons par exemple : [4, 8] pour d'écoulement stationnaire dans des domaines bidimensionnels, [6, 9] pour l'écoulement dans les tuyaux cylindriques et [5] pour l'écoulement non-stationnaire du Bingham.

2 Modèle Mathématique

Dans l'hydrodynamique des fluides isothermes et incompressibles, l'écoulement d'un fluide s'écrit sous la forme,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) & = & \mathrm{div}\, \sigma, \\ \mathrm{div} \mathbf{u} & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où ρ est la densité du masse, $\mathbf{u}$ est la vitesse, σ est le tenseur des contarintes (tenseur symétrique). De plus, nous pouvons décomposer σ de la manière suivante : $\sigma = \tau - pI$ où τ désigne la partie tangentielle du tenseur alors que pI est la partie normale (p est la pression). Dans le cas d'un fluide newtonien, τ dépend linéairement de $\nabla \mathbf{u}$ de la manière suivante, $\tau = 2\nu \mathbf{D}[\mathbf{u}]$, où $\mathbf{D}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ est le tenseur des taux de déformation et ν est la viscosité du fluide ($\nu > 0$). Alors, dans le cas d'un fluide newtonien incompressible, le système (2.1) prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p & = & 0, \\ \mathrm{div} \mathbf{u} & = & 0. \end{array} \right.$$

Il est bien connu que plusieurs fluides ne satisfont pas la loi newtonienne $\tau = 2\nu \mathbf{D}[\mathbf{u}]$. Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de cisaillement, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour décrire le comportement mécanique du fluide. Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Ce type de comportement est de loin le plus fréquent. Il concerne les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments. Un autre comportement est la viscoélasticité. Un certain nombre de modèles empiriques permettent la description non-newtonienne, citons par exemple les modèles d'Ericksen-Rivlin [10] ou les modèles introduits par Ladyzhenskaya [7], ou par Oldroyd. Dans ces modèles, le tenseur τ dépend de $\mathbf{D}[\mathbf{u}]$ d'une manière non linéaire. Dans le système adimensioné, il apparaît des nombres sans dimension tels que le Reynolds, $\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}$ où U, L et μ sont respectivement la vitesse, le longueur caractéristique et la viscosité dynamique du fluide.

Un autre type de fluide non newtonien est souvent dit fluide à seuil ou plastiques ou fluides de Bingham. Ce sont des liquides dits " à seuil ", c.à.d. qu'ils ne subissent pas de mouvement avant que la contrainte qui leur est appliquée ne dépasse une certaine limite qu'on appelle contrainte seuil. Ces fluides ne s'écoulent que si la contrainte appliquée est supérieure à une valeur seuil, comme par exemple la pâte de dentifrice. La loi de comportement s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau = \tau_0 + 2\nu \mathbf{D}[\mathbf{u}] & \text{si } ||\tau|| \geq \tau_0 \\ \mathbf{D}[\mathbf{u}] = 0 & \text{si } ||\tau|| < \tau_0, \end{array} \right.$$

tels que τ_0 est la contrainte seuil et $||\tau||$ est la mesure du contrainte. Remarquons que ces équations expriment l'effet de seuil : le fluide se déforme lorsque la mesure du contrainte atteint le seuil τ_0. Dans le cas contraire, le mouvement est celui d'un solide (pas de déformation).

3 Méthodes des volumes finis

La méthode des volumes finis est utilisée pour obtenir la forme discrétisée des équations. Cette méthode permet la résolution des équations de la mécanique des fluides en intégrant les équations de conservation sur des volumes finis jointifs recouvrant l'ensemble du domaine d'étude.

3.1 Équations en coordonnées curvilignes

Les équations précedentes sont formulées dans le cas cartésien, nous les écrivons en forme généralisée. Pour cela, nous considérons les coordonnées curvilignes (ψ_1, ψ_2), exprimées en fonction des coordonnées cartésiennes $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, par $\psi^1 = \psi^1(x_1, x_2)$ et $\psi^2 = \psi^2(x_1, x_2)$. Les deux vecteurs de base du nouveau système sont $\mathbf{g}_1 = (\partial x_1/\partial\psi^1, \partial x_2/\partial\psi^1)$ et $\mathbf{g}_2 = (\partial x_1/\partial\psi^2, \partial x_2/\partial\psi^2)$. Le tenseur métrique, défini par $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ $(i, j{=}1{,}2)$, est diagonal et les facteurs d'échelle sont $h_i = \sqrt{g_{ii}}$. Les équations de conservation sont réecrites par rapport au champ des vitesses physiques $V^i = h_i\, \mathrm{d}\psi^i/\mathrm{d}t$, en utilisant les dérivées spatiales physiques $\mathrm{d}\xi^i = h_i \mathrm{d}\psi^i$. Dans le nouveau système des coordonnées, la vitesse $\mathbf{u} = \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x_1}{\partial\psi^j}\frac{v^1}{h_j}, \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x_2}{\partial\psi^j}\frac{v^2}{h_j}\right)$, alors que l'opérateur de divergence généralisé s'écrit $\nabla\cdot_{(i)} = \frac{\partial()}{\partial\xi^i} + \sum_{j\neq i} H_i^j()$ où les facteurs d'étirement $H_i^j = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial\xi^j}$. Le tenseur des taux de déformation généralisé s'écrit $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^i}{\partial\xi^j} + \frac{\partial V^j}{\partial\xi^i} - H_j^i V^j - H_i^j V^i + 2\sum_{k=1}^{2} H_i^k V^k \delta_{ij}\right)$, où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker. Avec ces conventions, le système s'écrit pour $j = 1, 2$:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\partial_t(\rho V^j) + \sum_{i=1}^{2}\Big(\rho V^i V^j - 2\nu D_{ij} - \tau_0\Big) & = & \frac{\partial p}{\partial\xi^j} - \sum_{i=1}^{2} H_j^i\Big(\rho V^i V^j - 2\nu D_{ij} - \tau_0\Big) \\
 & & + \sum_{i=1}^{2} H_i^j\Big(\rho V^i V^i - 2\nu D_{ii} - \tau_0\Big), \\
\sum_{i=1}^{2} \nabla\cdot_{(i)} V^i & = & 0.
\end{array}
\right.
$$

3.2 Méthode numérique

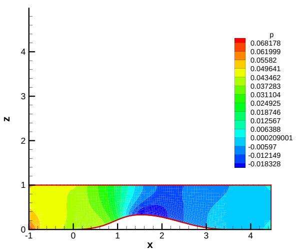
La méthode des volumes finis et un maillage orthogonal sur la base des coordonnées naturelles (ϕ, ψ) sont utilisés. Pour plus des détails voir [2]. Le principe général de cette méthode est de localiser au centre de chaque volume les grandeurs scalaires et de placer les vitesses au centre des faces de volume. C'est le principe du maillage entrelacé. Les équations sont discrétisées en temps sous forme semi-implicite. Nous utilisons également un volume de contrôle centré sur le nœud de pression, afin de transformer les intégrales de l'équation de continuité en sommations algébriques. Pour les équations de quantité de mouvement, les volumes de contrôle sont centrés sur la face du maillage de la composante de vitesse concernée. A chaque pas temporel, une équation discrétisée de Poisson pour la pression est résolue par la méthode de Cholesky, qui s'applique ici, puisque la matrice est symétrique et définie positive. A l'issu de la résolution du système linéaire, on obtient la pression en tout point du maillage à chaque instant. Les valeurs de vitesse s'obtiennent, à chaque pas du temps, en réinjectant les valeurs de pression trouvées.

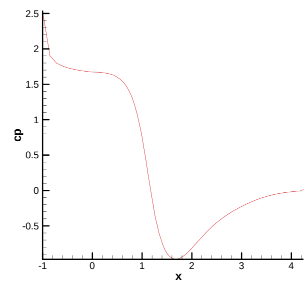
4 Résultats et intérpretation

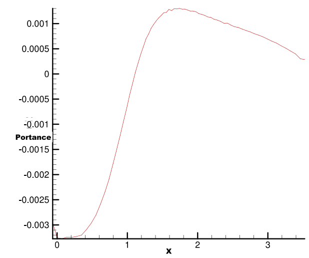
Dans ce travail, nous présentons nos résultats à l'aide du quatre nombres adimensionnels : Reynolds Re et les cœfficients de portance $\mathrm{C_z}$, de traînée $\mathrm{C_x}$ et de pression $\mathrm{C_p}$. Nous étudions le profil avec deux fluides : un Newtonien et l'autre dit de Bingham.

4.1 Écoulement Newtonien

Lorsque l'écoulement est newtonien, nous calculons les valeurs des grandeurs, mentionnés ci-dessus, ainsi que la traînée et la portance, pour trois nombres de Reynolds : Re = 262.39, Re = 266.67 et Re = 277.78. Dans tous les cas, on trouve une traînée positive ce qui était attendu. Il semble que la traînée soit essentiellement due aux forces visqueuses et on retrouve également une portance positive, valeur que l'on attendait bien évidement. On affiche ensuite la distribution de pression dans la surface maillée pour Re = 262.39 (Figure à gauche). Ensuite, on affiche les valeurs locales du coefficient de pression C_p le long du profil pour Re = 266.67 (Figure au centre). Pour visualiser la portance en action sur le profil, on affiche la portance obtenue à chaque point de l'obstacle pour Re = 277.78 (Figure à droite).







Le résultat est bien celui attendu pour la pression, il existe une dépression au dessus du profil. La dépression est marquée par la diminution du C_p. On remarque bien que la portance est due en grande partie à l'action de pression.

4.2 Écoulement Non-Newtonien

Lorsque l'écoulement est non-newtonien (Bingham), nous calculons également les valeurs des C_p, C_x, C_z, Trainée et Portance pour le même trois nombres de Reynolds : Re = 262.39, Re = 266.67 et Re = 277.78 avec un seuil 0.005.

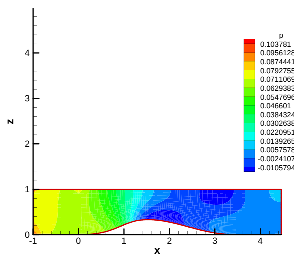
De même pour le fluide de Bingham, on affiche les valeurs locales du coefficient de pression C_p le long du profil pour Re = 262.39 (Figure à gauche). On visualise ensuite la distribution de pression dans la surface maillée pour Re = 266.67 (Figure au centre). Enfin, la portance en action sur le profil est affiché à chaque point de l'obstacle pour Re = 277.78 (Figure à droite).

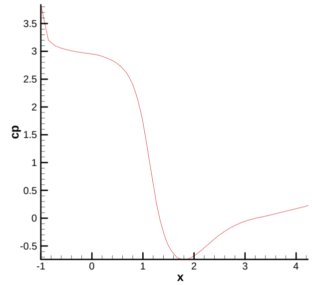
	Re= 262.39	Re=266.67	Re=277.78
C_p	0.1843E+00	0.1773E+00	0.1554E+00
C_x	0.2551E+00	0.2524E+00	0.2458E+00
C_z	0.3245E-02	0.8896E-02	0.2170E-01
Trainée	0.2414E-01	0.1887E-01	0.2871E-01
Portance	0.3071E-03	0.6651E-03	0.2535E-02

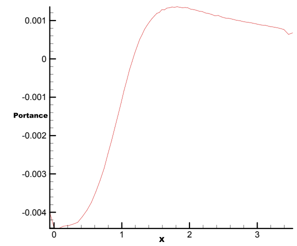
TABLE 1 – C_p, C_x, C_z, traînée et portance pour un écoulement newtonien.

	Re= 262.39	Re=266.67	Re=277.78
C_p	0.6405E+00	0.7309E+00	0.5417E+00
C_x	0.3311E+00	0.3526E+00	0.3080E+00
C_z	- 0.1102E+00	-0.1060E+00	-0.8730E-01
Trainée	0.3133E-01	0.2636E-01	0.3598E-01
Portance	- 0.1043E-01	-0.7925 E-02	-0.1020E-01

TABLE 2 – C_p, C_x, C_z, traînée et portance pour un fluide de Bingham.







On remarque que la pression au dessus de la bosse reste faiblement négative mais elle est moins répandue. La positivité de C_p est bien clair et on peut voir facilement la différence avec C_p obtenue dans le cas newtonien avec le même nombre de Reynolds. La valeur de la force de portance est négative. On en déduit que la portance est dirigée vers le bas. La traînée reste, quant à elle, positive.

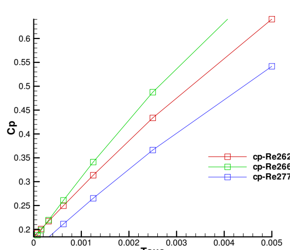
4.3 Influence de seuil sur la portance

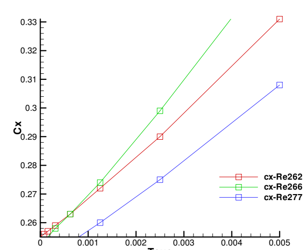
A cause de difficulté de trouver le seuil d'un tel écoulement d'un fluide de Bingham, nous calculons la valeur de la portance avec différent valeurs de seuil τ_0. Nous remarquons que la portance décroit avec l'augmentation du seuil puis elle sera négative.

Portance pour :	Re= 262.39	Re=266.67	Re=277.78
τ_0= 0	0.3071E-03	0.6651E-03	0.2535E-02
τ_0= 0.78125E-04	0.1181 E-04	0.3646E-03	0.2217E-02
τ_0= 0.15625E-03	-0.2793E-03	0.6946E-04	0.1902E-02
τ_0= 0.3125E-03	-0.8493E-03	-0.5045E-03	0.1284E-02
τ_0= 0.625E-03	-0.194E-02	-0.1588E-02	0.9506E-04
τ_0= 0.125E-02	-0.3925E-02	-0.3494E-02	-0.2098E-02
τ_0= 0.25E-02	-0.7111E-02	-0.6283E-02	-0.5749E-02
τ_0= 0.5E-02	- 0.1043E-01	-0.7925 E-02	-0.1020E-01

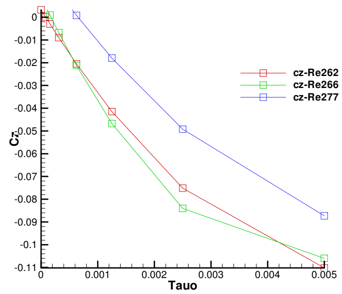
TABLE 3 – Influence de changement du seuil sur la portance.

Nous essayons maintenant de poursuivre graphiquement l'influence du valeur de τ_0 sur les trois grandeurs adimensionnels : C_p, C_x et C_z. Tout d'abord, nous remarquons que l'augmentation de C_p par rapport à τ_0 est harmonieux pour les trois nombres de Reynolds, ainsi que pour le C_x.





Pour C_z, il est clair l'influence du seuil. Le fluide de Bingham ne donne une portance négative qu'à partir un seuil. Par contre, sa valeur positive diminue avec l'augmentation de τ_0. Une fois que les contraintes dépassent le seuil, qui d'aileurs n'est pas fixe pour les trois nombres de Reynolds, l'effet d'une portance négative apparaissent et la valeur du coefficient de portance croît avec l'augmentation de τ_0.



5 Conclusion

Dans ce travail, un écoulement bi-dimensionnel d'un fluide de Bingham autour d'un obstacle hydraulique est étudié numériquement en utilisant le système des coordonnées généralisées et la méthode des volumes finis en coordonnées orthogonales généralisées. Pour l'écoulemnt newtonien, une portance attendue dirrigé vers le haut était trouvée pour trois nombres des Reynolds. Dans le cas d'un fluide non-newtonien et pus précisement le fluide dit de Bingham, l'effet d'une portance négative est observé.

Malgré la différence du nombre de Reynolds entre le calcul et l'expérience ce phénome observé numériquement est en accord avec résultats expérimentaux concernant la portance inverse obtenus par B. Dollet et *al.* dans [1] pour une solution mousseuse. Des futurs travaux seront réalisés pour valider ces résultats numériques, avec un autre approche pour le fluide de Bingham, et aussi étudier ce type de comportement pour les fluides viscoélastiques.

Références

[1] B.Dollet, M.Aubouy, and F. Graner*Anti-Inertial Lift in Foams : A Signature of the Elasticity of Complex Fluids*, Physical Review Letters **95**, 168303, 2005.

[2] G. Mompean, L. Thais, Finite *Volume Simulation of Viscoelastic Flows in General Orthogonal Coordinates*, Mathematics and Computers in Simulation, **80**, 2185-2199, 2010.

[3] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **219**.

[4] P. Grinevich, M. Olshanskii, *An iterative method for the Stokes-type problem with variable viscosity*, SIAM Journal on Scientific Computing **31**(5), (2009) 3959-3978.

[5] R. Glowinski, J.-L. Lions, R. Trémolières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, in : Studies in Mathematics and its Applications **8**, North- Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981. Translated from the French.

[6] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, in : Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1984.

[7] O.A.Ladyzhenskaya and G.A.Seregin, *Regularity of solutions of two-dimensional equations in fluid dynamics models with nonlinear viscosity*, J. Math. Sci., **109**(5), pp. 1911-1927, 2002.

[8] J.C. De Los Reyes and S.Andrade, *Numerical simulation of two-dimensional Bingham fluid flow by semismooth Newton methods*, J. of Computational and Applied Mathematics **235**(1), (2010), 11-32.

[9] J.C. De Los Reyes and S. González, *Path following methods for steady laminar Bingham flow in cylindrical pipes*, M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis **43**(1), (2009), 81-117.

[10] M.Slemrod, *Constitutive relations for Rivlin-Ericksen fluids based on generalized rational approximation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **146**(1), pp. 73-93, 1999.